Problema 1

Muestre que la integral que describe la longitud entre dos puntos sobre la superficie de una esfera de radio R en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) es:

$$L = R \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + sin^2\theta\phi'(\theta)^2} d\theta. \tag{1}$$

con (θ_1, ϕ_1) y (θ_2, ϕ_2) dos puntos sobre la esfera y que el camino está escrito como $\phi = \phi(\theta)$.

Problema 2

Considere que un rayo de luz viaja en el vacío de un punto P_1 a otro punto P_2 reflejándose en un punto Q perteneciente a un espejo plano. Demuestre que el principio de Fermat implica que Q, P_1 y P_2 pertenecen a un mismo plano vertical y que el camino del rayo obedece la ley de reflexión $\theta_1 = \theta_2$. [Ayuda: deje el espejo en el plano xz, el punto P_1 en el eje y $(0, y_1, 0)$, el punto P_2 en algún lugar del plano xy $(x_2, y_2, 0)$ y deje al punto Q en el plano $(x, 0, z)$. Luego calcule el tiempo que demora la luz en recorrer el camino P_1QP_2 y pruebe que para que sea un mínimo debe cumplir lo pedido en el problema.]

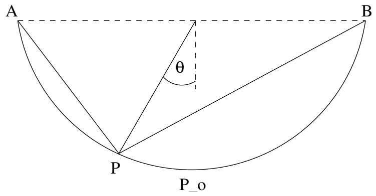
Problema 3

Considere que un rayo de luz viaja de un punto P_1 en un medio con índice de refracción n_1 a otro punto P_2 en un medio con índice de refracción n_2 a través de un punto Q perteneciente a un espejo plano ubicado en la interfase entre los dos medios. Demuestre que el principio de Fermat implica que Q, P_1 y P_2 pertenecen a un mismo plano vertical y que el camino del rayo obedece la ley de Snell $sin\theta_1 n_1 = sin\theta_2 n_2$. [Ayuda: deje el espejo en el plano xz, el punto P_1 en el eje y $(0, y_1, 0)$, el punto P_2 en algún lugar del plano xy $(x_2, -y_2, 0)$ y deje al punto Q en el plano $(x, 0, z)$. Luego calcule el tiempo que demora la luz en recorrer el camino P_1QP_2 y pruebe que para que sea un mínimo debe cumplir lo pedido en el problema.]

Nota a los problemas 2 y 3: observe como en ambos casos la integral sobre la cual se busca un extremo $t = \int n(x, y, z)ds$ se puede calcular directamente, entonces el problema se reduce a buscar extremos diferenciando t.

Problema 4

El principio de Fermat se enuncia en general como "el tiempo que tarda un rayo de luz en recorrer el camino desde A a B es el mínimo posible". Sin embargo, de forma más estrictica debería decir que el tiempo no es mínimo, sino estacionario o extremo. En este caso se presenta una situación donde el tiempo que tarda el rayo de luz en recorrer de A a B no es el mínimo, sino el máximo. Considere la parte cóncava de un espejo semiesférico como muestra la figura con A y B en los extremos opuestos del diámetro. Considere un rayo de luz viajando en el vacío desde A hasta B a través de una reflexión en P, en el mismo plano vertical que A y B. Según la ley de reflexión el rayo viaja a través del punto P_0 en la parte inferior de la semiesfera ($\theta = 0$). Encuentre el tiempo que tarde el rayo en recorrer APB en función de θ y demuestre que $P = P_0$ es un máximo.



Problema 5

Considere un cilindro recto de radio R centrado en el eje z y encuentre la ecuación, dando ϕ como función de z, para la geodésica entre dos puntos sobre la superficie del cilindro. Use coordenadas polares donde los puntos en el cilindro quedan descriptos por (R, ϕ_1, z_1) y (R, ϕ_2, z_2). Describa la geodésica, es única?. Imagine la superficie del cilindro extendida de forma plana, explique porque la geodésica tiene esa forma.

Problema 6

Considerando el problema de la braquistócrona explicado en la teórica, suponga ahora que el carro se suelta en el punto 1 con una velocidad fija v_0. Verifique entonces que la velocidad del carro es $\sqrt{2gy + v_0^2}$. Muestre que el camino que lleva el tiempo mínimo entre 1 y 2 sigue siendo una cicloide, pero corrida $v_0^2/2g$.

Problema 7

Use el resultado del problema 1 para calcular la geodésica entre dos puntos sobre una esfera. Pruebe que la geodésica obtenida es un gran círculo (la intersección entre un plano que pasa por el origen de la esfera con la superficie de la misma) [ayuda: de aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene que $\frac{\partial f}{\partial \phi'} = c$. Se puede evitar realizar la integral, sin perder generalidad, haciendo pasar el eje z por el punto 1, así probar que $c = 0$ y describir la correspondiente geodésica.]

Problema 8

Una superficie de revolución es generada por dos puntos fijos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano xy unidos por una curva. Toda la curva luego se hace rotar en torno al eje x para generar la superficie. Demuestre que la curva que genera la superficie de menor área tiene la forma $y = y_0 cosh[(x - x_0)/y_0]$ con x_0 e y_0 constantes. [ayuda: escriba la curva inicialmente que une los puntos como $x = x(y)$.]

Problema 9

En general el integrando $f(x, y, y')$ de cuya integral se quiere calcular sus extremos es función de las tres variables, x,y,y'. Sin embargo el problema se simplifica si f deja de depender de alguna de dichas variables.

- Muestre que cuando f no depende de y las ecuaciones de Euler-Lagrange se reducen a: $\partial f/\partial y' = const$. Notar que es una ecuación de primer orden para $y(x)$, cuando las ecuaciones de Euler-Lagrange son de segundo orden. Por ello a este simplificación se la llama *primera integral* de las ecuaciones de Euler-Lagrange y se verá luego en mecánica Lagrangeana que dicha simplificación aparece cuando el momento se conserva.

- Otra simplificación donde se puede hallar una *primera integral* de Euler-Lagrange es cuando el integrando f no depende explícitamente de la variable independiente x, entonces:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' \tag{2}$$

  Muestre que usando las ecuaciones de Euler-Lagrange y reemplazando $\partial f/\partial y$ en la igualdad de arriba se obtiene:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(y' \frac{\partial f}{\partial y'}) \tag{3}$$

  y que por lo tanto la *primera integral* queda:

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = const. \tag{4}$$

  En mecánica Lagrangeana la variable independiente es el tiempo y por lo tanto este resultado corresponde a la situación en que el Lagrangeano no depende del tiempo y por lo tanto la energía del sistema se conserva.

Problema 10

Dada una cuerda de longitud l con un extremo fijo en el origen O y otro ubicado en algún lugar del eje x encerrando un área en el plano xy entre la cuerda y este eje. Muestre que para que este área sea máxima la forma debe ser un semicírculo. El área encerrada es $\int y dx$, pero se puede reescribir como $\int_0^l f ds$ con s la distancia medida a lo largo de la soga desde O y $f = y\sqrt{1 - (dy/ds)^2}$. Notal que f no depende de la variable independiente s y por lo tanto puede utilizar la *primera integral* encontrada en el ejercicio anterior