a. Ejemplos de ecuaciones de Lagrange

Problema 1

En la figura se muestra un esquema de un yoyo cilindrico de masa m y radio R sostenido verticalmente por una cuerda sin masa. Un extremo de la misma se encuentra fijo en un punto y el otro enrollado alrededor del yoyo. Cuando se deja en movimiento el mismo cae por efecto de la gravedad rotando a medida que la cuerda se desenrolla. Escriba el Lagrangeano del sistema usando la distanca x como la coordenada generalizada. Encuentre las ecuaciones de Lagrange del movimiento y muestre que el cilindro se acelera hacia abajo con $\ddot{x} = 2g/3$.

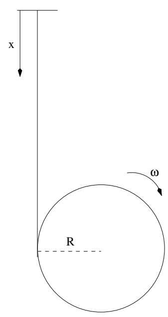

Figura 1: Problema 1

Problema 2

Una masa m se encuentra suspendida de una cuerda sin masa cuyo otro extremo se encuentra enrollado varias veces en un cilindro ubicado horizontalmente de radio R. El mismo tiene un momento de inercia I_{cm} y es libre de rotar en torno a un eje horizontal que pasa por su centro de masa. Usando una cordenada adecuada escriba el Lagrangeano del sistema y las ecuaciones de Lagrange del movimiento para luego encontrar la aceleración de la masa m.

Problema 3

Un carrito de masa m se encuentra montado sobre rieles dentro de un carro más grande. Ambos se encuentran unidos por un resorte de constante elástica k de forma tal que la posición de equilibrio del carrito es en la mitad del carro grande. La distancia del carrito respecto de su posición de equilibrio es x mientras que la posición del carro grande respecto de un origen fijo a la tierra es X como se muestra en la figura. El carro grande se fuerza a oscilar de forma tal que $X(t) = Acos(\omega t)$ con A y ω fijos. Escriba el Lagrangeano del carro pequeño y demuestre que la ecuación de Lagrange es:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = Bcos(\omega t) \tag{1}$$

con ω_0 es la frecuencia natural de oscilación $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ y B es constante.

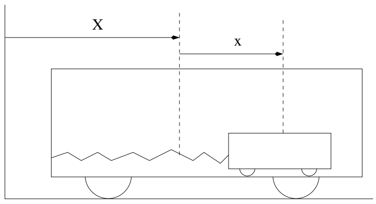

Figura 2: Problema 3

Problema 4

Un péndulo simple (masa m y largo l) se encuentra colgando del punto P ubicado en el borde de un volante (centro O y radio R) que es forzado a rotar con velocidad angular ω constante como muestra la figura. Escriba el Largrangeano y encuentre la ecuación del movimiento para el ángulo ϕ. (ayuda: sea cuidadoso al escribir la energía cinética, una forma segura de hacerlo es primero encontrar la posición de la masa en función del tiempo y luego derivarla). Corrobore que su resultado tenga sentido considerando el caso especial de $\omega = 0$ considerando que a $t = 0$ la masa esta ubicada a la derecha y a la misma altura que el centro O.

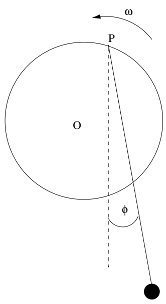

Figura 3: Problema 4

Problema 5

Un péndulo simple (masa M y largo l) está suspendido de un carro (masa m) que puede oscilar ya que se encuentra unido a un resorte (de constante elástica k) como muestra la figura.

- Escriba el Lagrangeano en términos de dos coordenadas generalizadas x (extensión del resorte respecto a su posición de equilibrio) y ϕ y Encuentre las dos ecuaciones de Lagrange.
- Simplifique las ecuaciones para el caso en que ambas coordenadas son pequeñas.

Problema 6

Considere una partícula de masa m enhebrada sin fricción en un alambre de forma parabólica que se está haciendo girar en torno a un eje vertical como muestra la figura. Use coordenadas cilíndricas de forma tal que la ecuación de la parábola

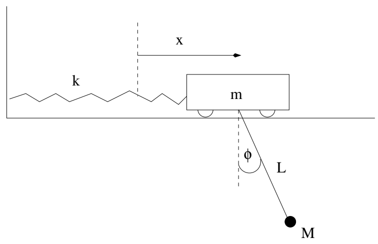

Figura 4: Problema 5

quede $z = k\rho^2$. Escriba el Lagrangeano en términos de ρ como coordenada generalizada. Encuentre la ecuación del movimiento de la masa y determine cuáles son las posiciones de equilibrio, es decir, los valore de ρ para los cuales la masa queda fija sin deslizar ni para arriba ni para abajo. Discuta la estabilidad de los puntos de equilibrio hallados.

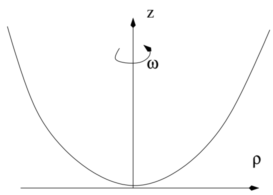

Figura 5: Problema 6

b. Leyes de conservación

Problema 7

El teorema de Noether encuentra una conexión entre los invariantes de un sistema y las leyes de conservación. Demuestre que la invarianza rotacional del Lagrangeano implica la conservación del momento angular total. Para ello suponga el Lagrangeano de un sistema de N-partículas es invariante ante rotaciones respecto a un eje. Sin perder generalidad puede tomar a ese eje como el eje z y probar que el Lagrangeano es invariante cuando todas las partículas rotan simultáneamente de (r_o, θ_o, ϕ_o) a $(r_o, \theta_o, \phi_o + \epsilon)$, el mismo ϵ para todas las partículas y por lo tanto demostrar que:

$$\sum_{o=1}^{N} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_o} = 0. \tag{2}$$

Use luego las ecuaciones de Lagrange para demostrar que el resultado anterior implica que el momento angular L_z se conserva en torno al eje de simetría. En particular si el Lagrangeano es invariante ante rotaciones en torno a cualquier eje.

Problema 8

Muestre que para considerar invarianzas ante transformaciones rígidas en el Lagrangeano alcanza con estudiar cuál es el comportamiento del potencial. De esta manera analice las magnitudes conservadas a partir de las simetrías del lagrangeano en un sistema de tres masas, m_1, m_2 y m_3 enhebradas en un aro circular.

Las tres masas interactúan mediante ciertos resortes especiales cuyo potencial es $V(\theta_i - \theta_j) = 1/2k(\theta_i - \theta_j)^2$, con $i, j = 1, 2, 3$ y k una constante.

Problema 9

Sea $F = F(q_1, ..., q_t)$ una función de las coordenadas generalizadas de un sistema cuyo Lagrangeano $\mathscr{L}(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, t)$. Pruebe que los dos Lagrangeanos $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}' = \mathscr{L} + dF/dt$ dan lugar a las mismas ecuaciones del movimiento.

c. Multiplicadores de Lagrange

Problema 10

Una masa m_1 se encuentra en reposo sobre un plano horizontal sin rozamiento conectada con una masa m_2 mediante una soga como muestra la figura. Use las coordenadas x e y como las distancias de las masas a la polea, se cumple entonces la relación que $f(x, y) = x+y = const.$ Escriba las ecuaciones de Lagrange modificadas y resuelvala junto con la ecuación de vínculo para $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ y el multiplicador de Lagrange λ. Encuentre la tensión de la cuerda entre las dos masas y compare sus respuestas con la resolución del problema vía las ecuaciones de Newton.

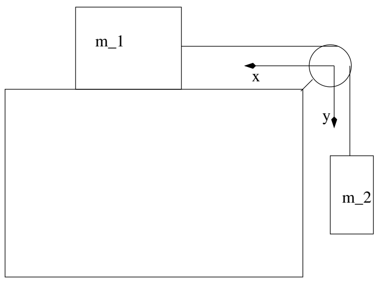

Figura 6: Problema 10

Problema 11

Escriba el Lagrangeano de un péndulo simple en términos de las coordenadas rectangulares x e y. Estas coordenadas están restringidas a cumplir el vínculo que impone la soga que es $f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2)} = l = const.$ Escriba entonces las dos ecuaciones de Lagrange modificadas, compárelas con las ecuaciones de Newton y muestre que el multiplicador es, a menos de un signo, la tensión de la cuerda.