

Problema 1

Considere el sistema de dos masas interactuando mediante una fuerza central. Demuestre que en el sistema de referencia del centro de masa (CM) el momento angular \vec{l}_1 de la partícula 1 cumple con el momento angular total \vec{L} la relación $\vec{l}_1 = (m_2/M)\vec{L}$ y que a su vez $\vec{l}_2 = (m_1/M)\vec{L}$. Se conservan l_1 y l_2 por separado en el sistema del CM? Y en otro sistema de referencia fijo en un punto del espacio que no sea el CM?

Problema 2

Considere dos partículas interactuando mediante la Ley de Hooke con una energía potencial $U = 1/2kr^2$, donde $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ y no existen fuerzas externas aplicadas sobre el sistema. Demuestre que $\vec{r}(t)$ describe una elipse. Por lo tanto pruebe que las dos partículas se mueven sobre una elipse similar alrededor del CM del sistema de ambas. [ayuda: elija el plano xy como el plano de la órbita y resuelva la ecuación del movimiento para x e y por separado, de esta forma $x = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, con similar expresión para y . Despeje $\cos(\omega t)$ y $\sin(\omega t)$ y luego use la identidad $\sin^2 + \cos^2 = 1$ para demostrar que es una elipse la órbita resultante.]

Problema 3

A partir de analizar el potencial efectivo típico de un sistema de dos cuerpos interactuando gravitatoriamente (como ser un planeta y el sol, $U(r)_{ef} = -Gm_1m_2/r + l^2/(2\mu r^2)$) encuentre el radio para el cual el planeta, con momento angular l , puede orbitar con trayectorias circulares alrededor del sol. Luego pruebe que esta órbita circular es estable, en el sentido que pequeñas perturbaciones a dicha órbita sólo causan pequeñas oscilaciones radiales. Muestre que el período de dichas oscilaciones es igual al período de la órbita del planeta.

Problema 4

En la derivación de la tercera ley de Kepler comúnmente se aproxima $M_s \gg m$ basándose en que la masa del sol M_s es mucho mayor que la del planeta de masa m . De esta forma se llega a que $\tau^2 = [4\pi^2/(GM_s)]a^3$. Demuestre que la ley de forma exacta es en verdad $\tau^2 = [4\pi^2/(G(M_s + m))]a^3$ y que por lo tanto la "constante" de proporcionalidad en un poco diferente para los distintos planetas. Considerando que la masa del planeta más pesado (Júpiter) es alrededor de $2 \times 10^{27} \text{ kg}$, mientras que la del sol M_s es cercana a $2 \times 10^{30} \text{ kg}$ qué porcentaje esperaría que varíe la "constante" de la tercera ley de Kepler al variar los planetas (considerando que la mayoría de los planetas tiene varios órdenes de magnitud menor masa que Júpiter).

Problema 5

Considere dos partículas de igual masa $m_1 = m_2 = m$ unidas entre sí por un resorte en línea recta (constante elástica k y longitud natural l) y libre de moverse sobre una mesa sin rozamiento.

- Escriba el Lagrangiano en términos de las coordenadas r_1 y r_2 y luego reescríbalo en términos del CM y la posición relativa, R y r , usando coordenadas polares para (r, ϕ) .
- Escriba y resuelva las ecuaciones de Lagrange para las coordenadas del CM (X e Y).
- Escriba el Lagrangeano para r y ϕ y resuélvalo para los casos particulares en donde r se mantiene constante y en donde ϕ se mantiene constante. Describa los movimientos correspondientes, en particular muestre que la frecuencia de oscilación del segundo caso es $\omega = \sqrt{2k/m_1}$.

Problema 6

La altura de un satélite en el perigeo (punto de mayor cercanía a la tierra) es de 300 km respecto de la superficie terrestre y en el apogeo (punto de mayor lejanía) es de 3000 km . Calcule la excentricidad de la elipse. Ahora, considere que la órbita tiene lugar en el plano xy y que el eje mayor de la elipse es el eje x que une la Tierra con el origen, calcule la altura del satélite cuando corta al eje y . [ayuda: el radio de la Tierra es $R_T = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$ y $GM_t/R_T^2 = g$].

Problema 7

Una partícula de masa m se mueve con momento angular l en el campo de una fuerza central fija de la forma:

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} + \frac{\lambda}{r^3} \quad (1)$$

con λ y k constantes positivas. Escriba la ecuación radial transformada para esta fuerza y pruebe que las órbitas tienen la forma:

$$r(\phi) = \frac{c}{1 + \epsilon \cos(\beta\phi)} \quad (2)$$

donde c y β son constantes positivas. Encuentre el valor de dichas constantes en términos de los parámetros del problema y describa las órbitas para el caso $0 < \epsilon < 1$. Para qué valores de β son cerradas las órbitas? Qué ocurre cuando $\lambda \rightarrow 0$?

Problema 8

Considere la partícula del problema anterior, pero suponga que ahora la constante λ es negativa. Escriba la ecuación radial transformada y describa las órbitas de bajo momento angular (específicamente cuando $l^2 < -\lambda m$).

Problema 9

En el problema de Kepler se tiene que el comportamiento de las órbitas en polares $r(\phi)$ está dado por $r(\phi) = c/(1 + \epsilon \cos \phi)$, que para $\epsilon < 1$ resultan órbitas ligadas. Reescriba las órbitas en coordenadas Cartesianas para los casos $\epsilon = 1$ y $\epsilon > 1$. Muestre que para el primer caso se obtiene una parábola y que para el segundo un hipérbola. Explícite los parámetros característicos de ambas curvas en función de c y ϵ .