Guía 7 - Hamilton - Transformaciones Canónicas-Corchetes de Poisson.
Mecánica Clásica 2016 - Clase G. Mindlin.

a. Hamilton

Problema 1

Considere la máquina de Atwood de la figura, pero suponga que la polea es un disco de masa uniforme de masa M y radio R. Usando x como la coordenada generalizada, escriba el Lagrangiano, el momento generalizado p y el Hamiltoniano $\mathscr{H} = p\dot{x} - \mathscr{L}$. Encuentre las ecuaciones de Hamilton y úselas para encontrar la aceleración.

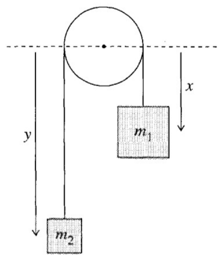

Figure 1: Esquema del sistema del problema 1

Problema 2

Una bolita de masa m se encuentra enhebrada en un alambre que se enrolla en forma helicoidal cumpliendo la relación en coordenadas polares (ρ, ϕ, z) de $z = c\phi$ y $\rho = R$, con R y c constantes. El eje z está en la vertical en dirección hacia arriba y la gravedad en el mismo eje en dirección hacia abajo. Usando ϕ como coordenada generalizada, escriba la energía cinética T y la potencial U y luego escriba el Hamiltoniano $\mathscr{H}$ como una función de ϕ y del momento conjugado p. Escriba las ecuaciones de Halmiton y resuelva para $\ddot{\phi}$ y por lo tanto encuentre también $\ddot{z}$. Explique el resultado en términos de la mecánica Newtoneana y discuta el caso espcial donde $R = 0$.

Problema 3

Una carrito de una montaña rusa de masa m se mueve a lo largo de un riel sin rozamiento dispuesto en el plano xy (x coordenada horizontal e y vertical hacia arriba). La altura del riel se puede parametrizar como cierta función de x como: $y = h(x)$. Usando x como coordenada generalizada, escriba el Lagrangiano, el momento generalizado p y el Hamiltoniano $\mathscr{H} = p\dot{x} - \mathscr{L}$ (como función de x y p). Encuentre las ecuaciones de Hamilton

Problema 4

Sea una partícula de masa m moviéndose en dos dimensiones sujeta a una fuerza $F = -k\check{x} + K\check{y}$, donde k y K son constantes positivas. Escriba el Hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton usando x e y como coordenadas generalizadas. Resuelva y describa el moviemiento resultante.

Problema 5

La forma simple del Hamiltoniano $\mathscr{H} = T + U$ es solo válida si las coordenadas generalizadas son naturales (i.e, la relación entre las coordenadas generalizadas y las cartesianas es independiente del tiempo). Sin embargo si las coordenadas no son naturales dicha forma no es válida y por ende el Hamiltoniano se calcula por definición. Pruebe que para el caso de una bolita de masa m enhebrada en un riel horizontal unidimensional sin rozamiento rotando con velocidad ω respecto a un eje vertical que pasa por el centro del riel, la forma simple no es válida.

Problema 6

Considere una bolita de masa m cuyo movimiento está restringido a moverse en un cilindro sin rozamiento de radio R, que en coordenadas polares (ρ, ϕ, z) se escribe como $\rho = R$. La bolita se encuentra sometida a una fuerza externa $\overrightarrow{F} = -kr\check{r}$, donde k es una constante positiva y r es la distancia al origen. Usando z y ϕ como coordinadas generalizadas, encuentre el hamiltoniano $\mathscr{H}$, escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton. Describa el moviemiento.

Problema 7

Considere el problema de una masa realizando un moviemiento confinado a la superficie de un cono. Se vio en clase que el movimiento está acotado a desarrollarse entre dos alturas z_{min} y z_{max}. Cuando z es máximo o mínimo la velocidad en z debe ser cero ($\dot{z} = 0$). Demuestre que esto pasa si y solo si el momento conjugado $p_z = 0$ y use que $\mathscr{H} = E$, donde $\mathscr{H}$ es el Hamiltoniano del sistema, para demostrar que a una energía dada E, esto ocurre para dos valores de z exactamente. Para ello grafique el comportamiento como función de z considere cuando el momento conjugado p_z se anula. A partir de dicho gráfico describa el movimiento de la masa.

Problema 8

Considere una masa m moviéndose en dos dimensiones bajo el efecto de una fuerza sencilla F que no depende de r ni de t. Encuentre el potencial $U(r)$ y el Hamiltoniano. Demuestre que usando coordenadas rectangulares x e y con x en la dirección de la fuerza F, la coordenada y es ignorable. Demuestre asimismo que si usa coordenadas rectangulares pero la fuerza no coincide con ninguno de los ejes, entonces ninguna coordenada es ignorable.

b. Transformaciones Canónicas

Problema 9

Considere los siguientes puntos:

- Pruebe que si se hace una transformación canónica de (p, q) a (P, Q) se tiene que: $\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i}$; $\frac{\partial q_i}{\partial P_j} = \frac{-\partial Q_j}{\partial p_i}$; $\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial q_i}$ y $\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$
- Considere un oscilador de hamiltoniano $H = p^2/2m + (k/2)q^2$ y muestre que la transformación= $Q = ln(\frac{sinp}{q})$, $P = qcot(p)$, es canónica y determine las generatrices $F_1(q, Q)$ y $F_2(q, P)$.

Problema 10

Considere el oscilador bidimensional cuyo hamiloniano es:

$$H(p, q) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + m\omega^2/2(x^2 + y^2). \tag{1}$$

Muestre que la transformación que sigue es canónica y halle el nuevo hamiltoniano $H'(P, Q)$ y las correspondientes ecuaciones de Hamilton: $x = Xcos\lambda + \frac{P_y sin\lambda}{m\omega}$; $y = Ycos\lambda + \frac{P_x sin\lambda}{m\omega}$; $p_x = -m\omega Y sin\lambda + P_x cos\lambda$ y $p_y = -m\omega X sin\lambda + P_y cos\lambda$. Describa además el movimiento del oscilador bidimensional cuando $y = p_y = 0$ en el $t = 0$.

Problema 11

- Bajo qué condiciones pueden ser H y L^2 simultáneamente variables canónicas? Idem para H y L_z.
- Pueden ser L_x y L_y simultáneamente variables canónicas? Ídem para L_x

Problema 12

Para un oscilador armónico unidimensional, halle la transformación canónica de cuya función generatriz es $F_1(q, Q) = \lambda q^2 cotg(Q)$ y elija λ para que el nuevo Hamiltoniano $K(Q, P)$ sea $H = \omega P$ con ω la frecuencia de oscilación del oscilador armónico.

c. Corchetes de Poisson

Problema 13

Demuestre la siguientes propiedades de los corchetes de Poisson, siendo $f; g; h$ funciones arbitrarias de p_i, q_i; $F(f)$ es una función de f y c es una constante:

- $[f, c] = 0; [f, f] = 0; [f, g] + [g, f] = 0; [f + g, h] = [f, h] + [g, h]; f[g, h] = f[g, h] + [f, h]g; \frac{\partial [f,g]}{\partial t} = [\frac{\partial f}{\partial t}, g] + [f, \frac{\partial g}{\partial t}, f]; [f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0; [f, F(f)] = 0$
- $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0; [q_i, p_j] = \delta_{ij}$

Problema 14

Muestre que si f y g son constantes de movimiento, también lo es $[f, g]$. Además calcule explícitamente, para una partícula, los corchetes de Poisson de las componentes cartesianas de $\overrightarrow{L}$ con las de $\overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{r}$. También calcule $[L_x, L^2], [L_y, L^2], [L_z, L^2]$ donde $L^2 = |\overrightarrow{L}^2|$.

Problema 7

Demuestre que $\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}$. Qué se obtiene para los casos donde $f = q_i$ o $f = p_i$? Si f no depende explícitamente del tiempo, muestre que la condición necesaria y suficiente para que f sea una constante del movimiento es que $[f, H] = 0$.