Segundo parcial de Estadística en Física Experimental 2017

Ponga nombre en todas las hojas. Entregue los problemas en hojas separadas.
Justifique todas sus respuestas.

Problema 1: Para estudiar la respuesta en energía de un detector se llevaron a cabo una serie de mediciones. En cada una de ellas se hizo incidir sobre el detector un haz de partículas α con energía E bien definida, barriendo el intervalo de 5001 a 5004 keV de a pasos de 0.1 keV. Siete de los espectros (histogramas) obtenidos al registrar la energía medida por el detector se muestran en la Figura 1. Las fluctuaciones observadas son precisamente debido a la resolución del detector.

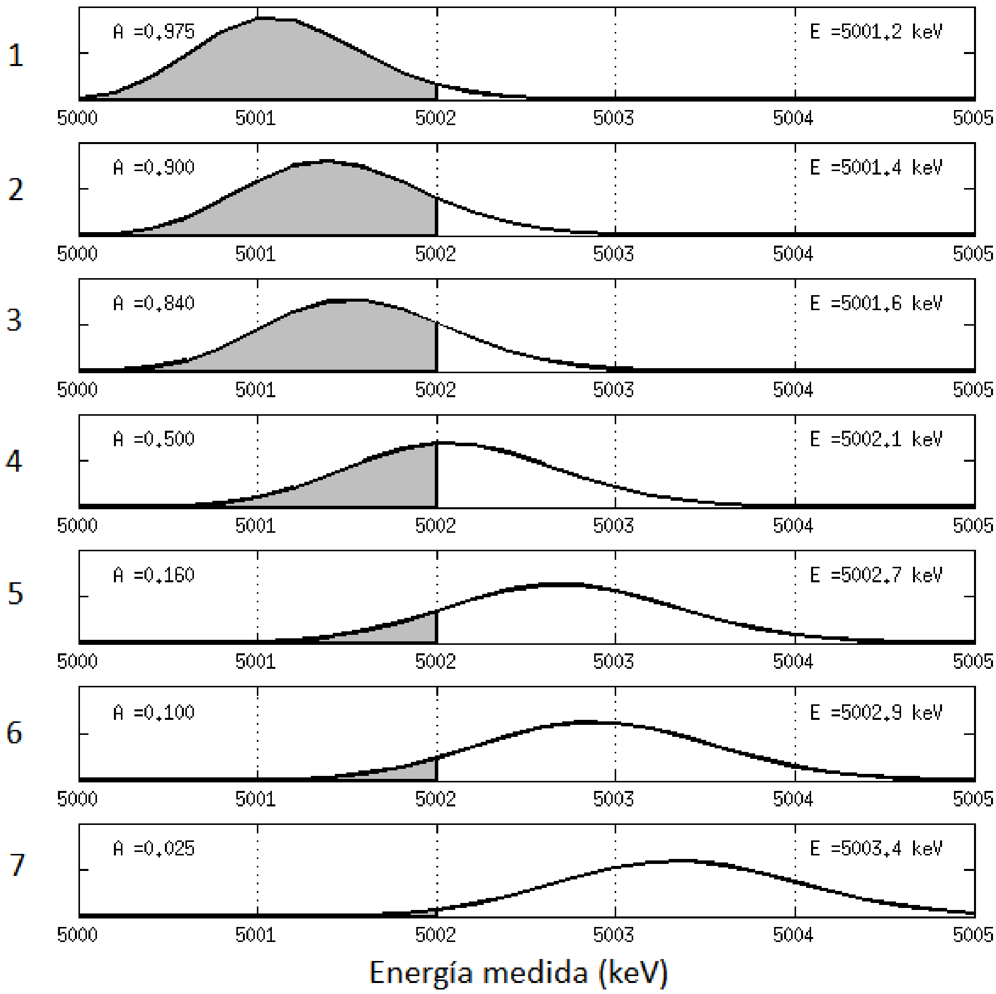

Figura 1: Espectros obtenidos al incidir con partículas α de energía E (indicada en la parte superior derecha). Todos los espectros fueron debidamente normalizados. El área indicada en la parte superior izquierda de cada espectro corresponde a la integral hasta 5002 keV.

Parte frecuentista Utilizando este mismo detector para determinar la energía de una partícula α emitida en un decaimiento radiactivo se obtuvo como resultado E_{obs} = 5002 keV. Informe los siguientes intervalos para la energía de dicha partícula (justifique claramente):

a) Una cota inferior con 90% de nivel de confianza.

b) Una cota superior con 97.5 % de nivel de confianza.

c) Central con 68 % de nivel de confianza.

Parte Bayesiana Se pretende mejorar la precisión con que se conoce la actividad (número de decaimientos por segundo) de la fuente radiactiva de la cual provienen dichas partículas α.

a) Encuentre la relación de transformación entre el Prior y el Posterior sabiendo que la distribución Gamma(θ; α, β) es la conjugada de la distribución de Poisson(k; μ).

b) Si la Gamma(θ; 100, 10) es una buena descripción de lo que se sabe sobre la actividad de la fuente, diga cual es la actividad de la fuente y con que error se conoce.

c) Usando los resultados de los dos ítems anteriores, estime cuántas mediciones de un segundo deben realizarse si se quiere reducir a la mitad la incerteza en la actividad de la fuente. Considere que la actividad calculada en el punto b) es un buen estimador del valor medio de la nueva serie de mediciones.

Datos útiles: Gamma(θ; α, β)=$\beta^\alpha\theta^{\alpha-1}\exp(-\beta\theta)/\Gamma(\alpha)$, E($\theta$)=$\alpha/\beta$ y Var(θ)=α/β^2

Problema 2: Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución log normal(μ, σ^2), si su función densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\Big(-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)$$

a) Suponiendo μ conocido, muestre que existe un estimador 100% eficiente para una función de σ y calcule su varianza.

Suponiendo en adelante μ y σ desconocidos:

b) Verifique que a partir de la condición de Darmois es posible encontrar un par de estadísticos suficientes para los parámetros de la distribución.

c) Encuentre los estimadores de máxima verosimilitud conjuntos para μ y σ^2.

d) ¿Que puede decir del sesgo de los estimadores hallados conforme aumenta el tamaño de la muestra?

Condición de Darmois: Se dice que f(x, $\underline{\theta}$) pertenece a la familia exponencial si:
f(x, $\underline{\theta}$)= $\exp(\sum_i B_i(\underline{\theta})C_i(x) + D(\underline{\theta}) + E(x))$