

MEFE: SEGUNDO PARCIAL - VERANO 2019

PONGA NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS. ENTREGUE LOS PROBLEMAS EN HOJAS SEPARADAS.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Problema 1: Sea la función distribución $\text{Gamma}(x|\alpha, \beta)$.

- Considerando α conocido, encontrar el estimador de máxima verosimilitud para β .
- ¿Es 100% eficiente?, y si no lo es, buscar una función de él que si lo sea.
- Calcular el sesgo y la varianza del estimador 100% eficiente hallado en el ítem anterior.

Problema 2: Considerar el experimento que consiste en contar el número de trazas de muones que se observan en un minuto utilizando una pequeña cámara de niebla.

- ¿Cuál fue el número de muones observados si el intervalo frecuentista reportado para el flujo de muones por minuto con un 90% de nivel de confianza es $(0, 7.99)$?
- ¿Cual hubiese sido el intervalo informado si se hubiese decidido por uno central frecuentista con el 68% de nivel de confianza?

Problema 3: Para el mismo experimento del problema anterior, ahora se quiere informar un intervalo utilizando el enfoque bayesiano.

- Encontrar la relación de transformación entre el Prior y el Posterior sabiendo que la distribución $\text{Gamma}(\theta|\alpha, \beta)$ es la conjugada de la distribución de $\text{Poisson}(k|\mu)$.
- Se realiza una medición de un minuto de duración y se observan cinco trazas de muones. Usando la distribución $\text{Gamma}(\theta|\alpha = 7, \beta = 2.2)$ como prior, indique el estimador bayesiano para μ .
- Informar un intervalo para μ usando como receta para su construcción: $E(x) \pm \sqrt{\text{Var}(x)}$.
- Calcular la cobertura de la receta del ítem anterior para $\mu = 4$. ¿Se parece al 68% que hubiese esperado antes de cursar esta materia?

Problema 4: Con un experimento similar al del problema 2, pero de mayor duración por medición, se quiere establecer una alarma que avise cuando el promedio del conteo de muones resulta sospechosamente alto, siendo el valor de μ_0 esperado igual a 100.

- Determinar el valor de k_{max} de la alarma para establecer un test de significancia $\alpha=0.025$.
- Calcular la potencia del test considerando $\mu_1=169$ como hipótesis alternativa.

Datos útiles: $\text{Gamma}(x|\alpha, \beta) = \beta^\alpha x^{\alpha-1} \exp(-\beta x) / \Gamma(\alpha)$, $E(x) = \alpha/\beta$ y $\text{Var}(x) = \alpha/\beta^2$.

	$\mu_1=2.09$		$\mu_2=4.00$		$\mu_3=7.14$		$\mu_4=7.99$	
k^*	$P(k^* \mu_1)$	$\sum_{k=0}^{k^*} P(k \mu_1)$	$P(k^* \mu_2)$	$\sum_{k=0}^{k^*} P(k \mu_2)$	$P(k^* \mu_3)$	$\sum_{k=0}^{k^*} P(k \mu_3)$	$P(k^* \mu_4)$	$\sum_{k=0}^{k^*} P(k \mu_4)$
0	0.12369	0.12369	0.01832	0.01832	0.00079	0.00079	0.00034	0.00034
1	0.25851	0.38219	0.07326	0.09158	0.00566	0.00645	0.00271	0.00305
2	0.27014	0.65233	0.14653	0.23810	0.02021	0.02666	0.01082	0.01386
3	0.18820	0.84053	0.19537	0.43347	0.04809	0.07475	0.02881	0.04267
4	0.09833	0.93886	0.19537	0.62884	0.08585	0.16060	0.05754	0.10021
5	0.04110	0.97996	0.15629	0.78513	0.12259	0.28319	0.09195	0.19215
6	0.01432	0.99428	0.10420	0.88933	0.14588	0.42907	0.12244	0.31460
7	0.00427	0.99856	0.05954	0.94887	0.14880	0.57786	0.13976	0.45436
8	0.00112	0.99967	0.02977	0.97864	0.13280	0.71066	0.13959	0.59394
9	0.00026	0.99993	0.01323	0.99187	0.10536	0.81602	0.12392	0.71786
10	0.00005	0.99999	0.00529	0.99716	0.07522	0.89124	0.09901	0.81688
11	0.00001	1.00000	0.00192	0.99908	0.04883	0.94007	0.07192	0.88880
12	0.00000	1.00000	0.00064	0.99973	0.02905	0.96912	0.04789	0.93668