MEFE 2023: Segundo parcial

Entregue cada bloque (123, 456, 78) del parcial por separado.
Justifique todas sus respuestas. Ponga nombre en todas las hojas.

Batman quiere saber cuántos murciélagos habitan Ciudad Gótica, y Gatubela, que cursó MEFE en 2023, le sugirió la siguiente estrategia: ponele un anillo en una pata a los murciélagos que viven en la Baticueva, contalos y liberalos en la ciudad. Un mes más tarde, contá cuántos murciélagos debes encontrar para dar con **uno** que lleve puesto el anillo. Cuando eso suceda, anotate el número y dejá de contar. Repetilo durante tres noches. Batman no entendió porqué eso le ayudaría. Gatubela lo miró y le dijo: ¿como te pensás que estimé cuántos gatos hay en la Ciudad?

1. Escribamos primero la verosimilitud del experimento que Gatubela le sugirió a Batman.
2. ¿Existe un estadístico suficiente para p (la probabilidad de que un murciélago al azar en la ciudad lleve puesto el anillo)? Si la respuesta es sí, diga cuál es.
3. ¿Existe un estimador 100% eficiente para p? Si la respuesta es sí, calcúlelo y diga cual es su varianza. Si la respuesta es no, diga si otra función de p lo tiene, y calcule su varianza.

Batman instruyó a Alfred para que le coloque un batianillo a cada murciélago de la Baticueva y los libere, y así lo hizo con los **290** ejemplares que encontró. Un mes mas tarde, Batman se pasó toda una noche merodeando las alturas de Ciudad Gótica y no fué hasta que contó **70** murciélagos que encontró **uno** (el 70°) con el batianillo. Decidió que no volvería a pasar otra noche como esa, pero no se lo quería decir a Gatubela, así que acudió a Robin (que cursó MEFE en 2017) para que lo ayude con las cuentas. Robin le explicó cómo estimar p siguiendo tanto el enfoque frecuentista como el bayesiano y le dijo también como estimar el número de murciélagos a partir de p. Démosle a Batman esos resultados para que pueda chequear sus cuentas.

4. ¿Cuál es la estimación frecuentista para p?
5. ¿Cuál es la estimación bayesiana para p si usas un prior uniforme?¿Te parece razonable esa elección de prior en este caso?
6. ¿Cuáles son entonces las estimaciones del número de murciélagos en Ciudad Gótica según cada enfoque? (si este ítem te parece muy fácil, no dudes, confiá en vos).

Robin, que era medio manija, lo convenció además de que valía la pena hallar el intervalo central frecuentista (y el bayesiano) con el 68% de nivel de confianza (credibilidad) para p. Para colaborar con esta tarea, y a pesar de sus manos mordidas por murciélagos, Alfred (que también cursó MEFE pero en 1955) construyó las curvas de la Figura. El punto es que Batman, que ya está decidido a cursar MEFE en 2025, no tiene idea de como utilizarlas.

7. Ayudalo a obtener el intervalo frecuentista para p sugerido por Robin.
8. Usando el mismo prior que antes, ayudalo ahora a informar el intervalo bayesiano para p.

Por las dudas, Alfred también le preparó un machete de fórmulas que copiamos a continuación y podrían llegar a ser de ayuda. El tipo está en todas.

Condición de Darmois: Se dice que f(x, $\underline{\theta}$) pertenece a la familia exponencial si:
f(x, $\underline{\theta}$)= $\exp(\sum_i B_i(\underline{\theta})C_i(x) + D(\underline{\theta}) + E(x))$

Condición de Cramer-Rao: Se dice que un estimador t(x) de un parámetro θ satisface la condición de Cramer-Rao si: $\frac{\partial \ln L(\mathbf{x},\theta)}{\partial\theta} = A(\theta)[t(\mathbf{x}) - h(\theta)]$

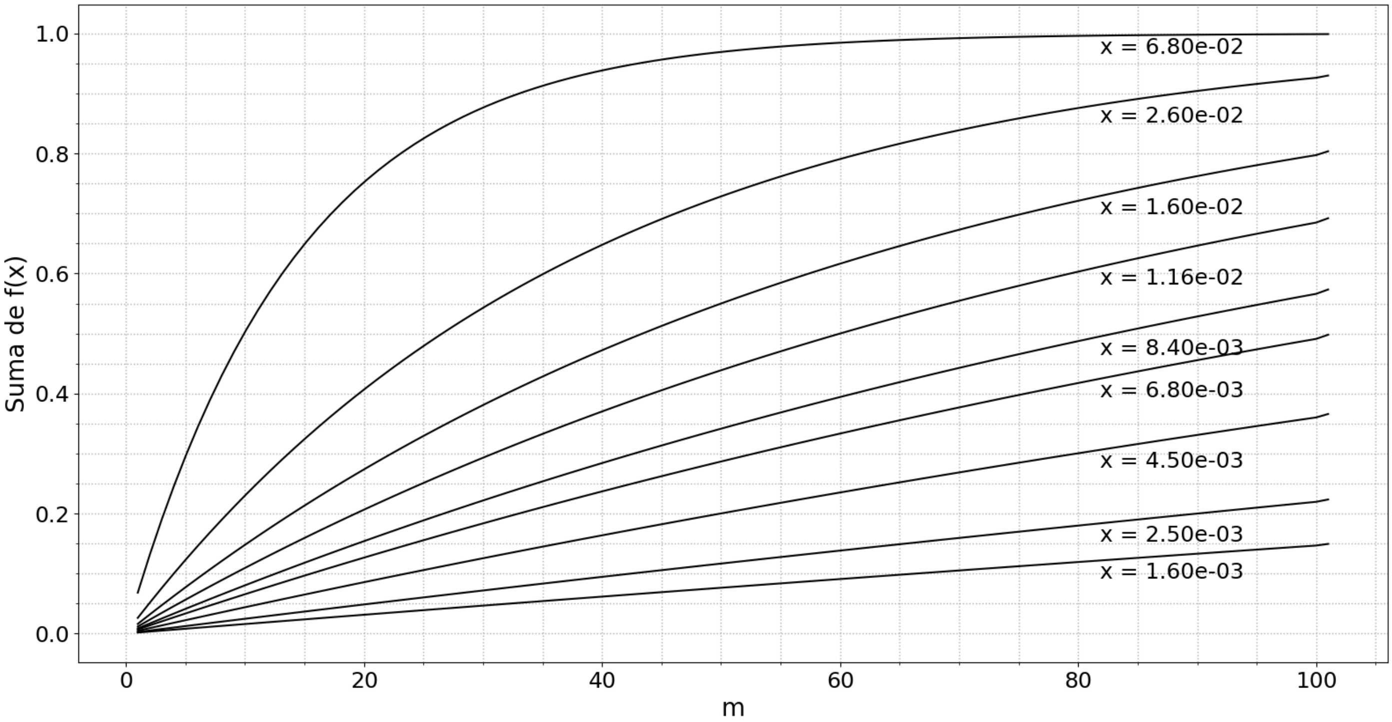

Figura 1: Curvas que resultan de sumar sobre n desde 1 hasta m la función $f(x) = x(1-x)^{n-1}$.

Distribución	Fórmula	Esperanza	Varianza
Binomial	$B(k\|n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Hipergeométrica	$H(k\|N,n,K) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\frac{nK}{N}$	$n\frac{K(N-K)}{N^2}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
Binomial negativa	$P(n\|k,p) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$	$\frac{k}{p}$	$\frac{k(1-p)}{p^2}$
Poisson	$P(k\|\mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$	μ	μ
Erlang	$f(x\|\lambda,n) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$
Beta	$Beta(x\|\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$
Gamma	$Gamma(x\|\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x)$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$