Estadística en Física Experimental (1er Cuatrimestre 2023)

Guía de Problemas N° 6 | Propagación de Errores

1. En un experimento se mide un observable que está descripto por la variable aleatoria X, cuya distribución de probabilidad tiene esperanza μ y varianza σ^2. Se realizan N repeticiones del mismo experimento, obteniendo N mediciones $\{x_i\}$.
   (a) Muestre que el error del promedio $\bar{X} = \sum_i X_i/N$ es: $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{N}$, si las mediciones son independientes.
   (b) Discuta la diferencia entre el error de cada medición σ y el error del promedio $\sigma_{\bar{X}}$.
   (c) Ahora las N mediciones están completamente correlacionadas, es decir: $\rho = 1$, o lo que es lo mismo $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}\sqrt{\mathrm{Var}(X_j)}$, para todo $1 \leq i, j \leq N$. ¿Cuánto vale el error del promedio? [Rta: $\sigma_{\bar{X}} = \sigma$]

2. Muestre que si una magnitud Y se obtiene como:
   (a) sumas y restas de magnitudes independientes X_i, entonces el *error absoluto* de Y es la suma en cuadratura de los errores de los X_i.
   (b) productos y divisiones de magnitudes independientes X_i, entonces el *error relativo* de Y es la suma en cuadratura de los errores relativos de X_i.

   Aclaración: la *suma en cuadratura* de a y b es: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, que suele notarse como: $c = a \oplus b$.

   Comentario: muestre que si en lugar de sumar en cuadratura se hace la *suma aritmética* el error queda *sobreestimado*.

3. Una ley establece que la variable y depende de otras variables x_i según una ley $y = (x_1)^{\alpha_1} \times \ldots \times (x_N)^{\alpha_N}$.
   (a) Si las N variables se miden independientemente obteniendo para cada una de ellas: $x'_i \pm \sigma_i$, mostrar que: $\sigma_y/|y| \geq \max\{\alpha_1\sigma_1/|x'_1|, \ldots, \alpha_N\sigma_N/|x'_N|\}$.
   Nota: esta regla permite chequear fácilmente en muchos casos si una propagación tiene valores subestimados.
   (b) ¿Vale en general la desigualdad anterior si las variables x_i no son independientes o si la ley tiene una forma genérica $y = f(x_1, \ldots, x_N)$?

4. Se hace girar la varilla del ejercicio 5 de la guía 3 y se mide el ángulo obteniendo Θ=1.10 $\pm$ 0.03 rad.
   (a) ¿Cuánto vale el error de Y=tan Θ según la fórmula de propagación?
   (b) Alguien a ojímetro dice que Θ=1.1 $\pm$ 0.5 rad. ¿Vale usar la fórmula usual de propagación del error para la variable Y en este caso? Si tiene dudas dibuje Y vs Θ y mire cuánto vale $Y(1.1 + 0.5)$. ¿Qué límites tiene la ley de propagación?

5. ¿Puede utilizar la fórmula de propagación para encontrar el error de $Z = X/Y$, con X e Y, normales $N(0, 1)$ independientes? ¿Por qué? ¿Cuánto vale la varianza de la distribución de Cauchy?

6. Un experimento se propone determinar los brillos máximo y mínimo, B_{max} y B_{min}, de una estrella variable con un detector que cuenta fotones. El procedimiento consiste en medir el brillo de la estrella más el cielo, F, y luego el de una región del cielo libre de estrellas, C, para descontar la contribución del mismo. El brillo B de la estrella se obtiene entonces como

$$B = \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{F}{t_F} - \frac{C}{t_C}\right)$$

   donde t_F y t_C son los tiempos de medición en segundos para la estrella más cielo y para el cielo, respectivamente, y ϵ es la eficiencia del detector.
   (a) Un astrónomo realiza las tres mediciones, brillo mínimo y máximo de la estrella y brillo del cielo, cada una durante un tiempo de $t = 10\,min$, resultando $F_{max} = 2384$, $F_{min} = 992$ y $C = 69$. El detector utilizado tiene una eficiencia de $\epsilon = 0.1$, con un error sistemático de 6%. Calcule los resultados de B_{max} y B_{min} a publicar, con su matriz de error. [Rta: $B_{max} = 38.58$, $B_{min} = 15.38$, $\mathrm{Var}(B_{max}) = 6.0406$, $\mathrm{Var}(B_{min}) = 1.1467$, $\mathrm{Cov}(B_{max}, B_{min}) = 2.1559$]
   (b) Obtenga el factor de correlación entre B_{max} y B_{min} y dibuje la correspondiente elipse de covarianza, utilizando los resultados de los últimos ejercicios de la guía 4. [Rta: 0.8192]

(c) Un astrofísico teórico ha desarrollado un modelo estelar, el cual predice una relación de la forma $B_{max}=(B_{min})^{\alpha}$, con $\alpha^{\text{modelo}} = 1.4$. Determine si dicha teoría es consistente con las observaciones experimentales publicadas por el astrónomo en el ítem a. Muestre que sus conclusiones respecto al acuerdo teoría-experimento ($\Delta\alpha \equiv |\alpha^{\text{modelo}} - \alpha^{\text{exp}}|$) son distintas si en la propagación de errores se olvida de incluir el término de correlación. [Rta: $\Delta\alpha = 3.2\,\sigma_{\alpha}^{(\text{con correlación})}$ y $\Delta\alpha = 1.5\,\sigma_{\alpha}^{(\text{sin correlación})}$]

7. En un artículo se reporta que el promedio de un observable A tiene este valor: $\bar{A} \pm \sigma_A^{\text{est}} \pm \sigma_A^{\text{sist}}$, donde σ_A^{est} y σ_A^{sist} son los errores estadístico y sistemático.
   (a) ¿Cuánto debería valer la incerteza total: σ_A?
   (b) ¿Qué resultado esperaría leer si el experimento se repite en el futuro realizando el doble de mediciones? Expresarlo en función de $\bar{A}$, σ_A^{est} y de σ_A^{sist}.
   (c) ¿Podría haber hecho el cálculo anterior si originalmente se hubiera publicado solo la incerteza total: $\bar{A} \pm \sigma_A$?

8. Considere N mediciones (x_i, y_i), donde los y_i son independientes y todos con el mismo error σ, ésto es, $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \delta_{ij}\sigma^2$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. En este caso los x_i son números sin error (no son variables aleatorias). Los parámetros de la recta $y=a_1 + a_2 x$ que mejor ajusta los datos surgen de minimizar la suma $S_N=\sum_i^N [y_i - (a_1 + a_2 x_i)]^2$, obteniéndose la conocida fórmula de cuadrados mínimos

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \left(\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i\right)/\Delta \\ \hat{a}_2 = \left(N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i\right)/\Delta \end{cases} \qquad \text{con} \quad \Delta = N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 \tag{1}$$

   (a) Usando la fórmula de propagación de errores muestre que la matriz de covarianza de los parámetros de la recta es

$$\text{Cov}(\hat{a}_1, \hat{a}_2) = \frac{\sigma^2}{\Delta}\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & N \end{pmatrix} \tag{2}$$

   (b) Analice intuitivamente por qué la correlación es negativa si el promedio de los datos está del lado positivo de la abscisa, positiva en el caso contrario, y por qué la pendiente y la ordenada al origen no están correlacionadas si $\sum x_i = 0$.
   Ayuda: puede ser útil usar que la recta ajustada $y = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 x$, pasa por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$.
   (c) Encuentre, con su error, los parámetros de la recta que mejor ajusta los siguientes datos, con $\sigma = 0.3$. Grafique los datos, con su error, y la recta obtenida para $0 \le x \le 5$. [Rta: $\hat{a}_1$=1.452 ± 0.721 y $\hat{a}_2$=0.799 ± 0.286]

X	2.00	2.10	2.20	2.30	2.40	2.50	2.60	2.70	2.80	2.90	3.00
Y	2.78	3.29	3.29	3.33	3.23	3.69	3.46	3.87	3.62	3.40	3.99

   (d) A partir de esta recta prediga, con su error, el valor esperado y_a para un cierto x_a. No olvide usar la matriz de covarianza completa. Grafique $y_a(x_a)$, y agréguelo al gráfico anterior en forma de banda de error. Encuentre qué valor de x_a minimiza el error de y_a, e interprete la magnitud de este valor mínimo. Discuta por qué el error aumenta para valores de x_a alejados de la región donde se hicieron las mediciones.
   (e) Grafique la banda de error que obtiene si ignora el término de correlación en la propagación de errores y discuta por qué ésta es claramente errónea.

9. Verifique los resultados analíticos obtenidos en el ítem 8d escribiendo un programa que realice la siguiente simulación numérica:
   I. para cada x_i genere al azar un y_i de la distribución gaussiana $\text{N}(\hat{a}_1+\hat{a}_2 x_i,\, \sigma)$.
   II. ajuste una recta a los (x_i, y_i) generados, y prediga el valor y_a para $x_a = 0.5$.

   Repita 1000 veces los pasos I.–II., construyendo un histograma con los valores de y_a, y dibuje sobre éste la gaussiana con el valor esperado y el error de y_a calculado teoricamente en 8d.

10. Para cada uno de los cuatro pares de datos de Anscombe del problema 8 de la guía 4:
   (a) Haga un ajuste lineal de cada par de datos y encuentre los valores de los parámetros ajustados con sus errores.
   (b) Grafique cada par de puntos, junto con la recta ajustada y las bandas de error. ¿Qué concluye, alcanza con mirar solo los parámetros ajustados, o hacer el ajuste ‘a ciegas’? ¿Qué está faltando?