Recuperatorio Integrador Diferido de MEFE 2017

Ponga nombre en todas las hojas. Entregue los problemas en hojas separadas. Justifique todas sus respuestas.

Problema 1.1: Se tienen dos dados, uno normal y otro alterado. Este último en lugar del 1 también tiene un 3 (o sea, las caras del dado tienen 2, 3, 3, 4, 5, 6). Se toma uno de ellos, se lo lanza 12 veces y el número 3 aparece dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que se trate del dato alterado?

Problema 1.2: Cuando llega el otoño en los Montes Urales nieva muchísimo, tanto que las ramas de los árboles no resisten el peso de la nieve. Un determinado día de verano en Buenos Aires, Esteban y Ulises viajan a Rusia y cuentan cuántas roturas de ramas escuchan en 30 minutos, contabilizando 120 en total. Ya muertos de frío se preguntan:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que pase un minuto entero sin que se rompa una rama?¿Y de que sean 3 minutos consecutivos? Resuelva esta última pregunta de dos formas diferentes.

b) Muestre que la probabilidad de que se rompan dos ramas en un mismo segundo es 30 veces menor que la probabilidad de que se rompa sólo una y calcule cuántos segundos más (después de los 30 minutos) espera que tengan que aguantar el frío para llegar a escuchar exactamente 125 roturas de ramas en total.

Nota: Explicite todas las aproximaciones necesarias para que su solución sea válida.

Problema 1.3: Como punto de partida para realizar una simulación Monte Carlo Computacional se requiere generar una distribución equiespaciada de puntos dentro de una superficie circular. Para ello se cuenta con dos variables aleatorias independientes X e Y uniformes en [0, 1].

a) Escriba la función densidad conjunta $f_{R,\Theta}$(r, θ).

b) Encuentre la función densidad de $f_R(r)$ y $f_\Theta(\theta)$ y diga si son independientes.

c) Indique como generaría la distribución requerida a partir de X e Y.

Problema 2.1: Cuando Christian se enteró de lo que habían hecho Esteban y Ulises (leer problema 1.2), decide hacer lo mismo al año siguiente. Una vez en el Monte de los Urales, Christian, que no había ido lo suficientemente abrigado, soportó 5 minutos el frío y decidió volver. En esos 5 minutos no escuchó ninguna rama romperse. ¿Cual es la cota superior 90 % CL frecuentista al número de ramas que se espera se rompan por minuto durante ese invierno?

Problema 2.2: Se lanza diez veces una moneda cargada obteniéndose ocho caras y dos secas. Se quiere conocer la cota superior de un intervalo bayesiano con 90 % de CL para la probabilidad p de obtener cara. Encuentre la relación *prior-posterior* y escriba con detalle la expresión de la cual es posible extraer la cota buscada. Utilice como prior la distribución Beta(2,2).

Ayuda: Beta(θ; α, β)=$\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}/B(\alpha,\beta)$ E(θ)=$\alpha/(\alpha+\beta)$ y Var(θ)=$\alpha\beta/[(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2]$

Problema 2.3: Para la distribución normal $N(\mu, \sigma)$:

a) Muestre que la aplicación de la desigualdad de Cramer-Rao al parámetro σ establece que existe una única función de σ con estimador 100 % eficiente.

b) Encuentre un estimador para σ, su sesgo y su varianza.

c) Verifique sus conclusiones aplicando Cramer-Rao al parámetro σ^2.

d) Usando Darmois, encuentre un par de estadísticos suficientes para los parámetros de la distribución.