Parcial integrador diferido - MEFE - Verano 2019

Ponga nombre en todas las hojas. Entregue los problemas en hojas separadas.
Justifique todas sus respuestas.

Problema 2a: la función densidad de probabilidad dada por

$$f(x|\gamma) = (\gamma^2 + 3\gamma + 2)(x^\gamma - x^{\gamma+1}) \qquad \gamma > 0 \qquad x \in [0, 1)$$

es una muy buena descripción del puntaje obtenido en las encuestas docentes por quienes dictan clase en este departamento de física, siendo x el puntaje dividido 5.

a) Encuentre una expresión a partir de la cual sea posible despejar el estimador de máxima verosimilitud para γ.

b) Muestre que no hay un estimador 100% eficiente para γ, pero si para una función de γ.

c) Calcule la esperanza y la desviación estándar del estadístico $t(\bar{x}) = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} \ln(x_i)$ para γ=20 y n=356.

d) Se toman los resultados de 356 encuestas y se calcula el valor de $t(\bar{x})$, obteniéndose t=-0.093. Utilizando resultados del item (c), estime la esperanza de la variable aleatoria: *puntaje obtenido en las encuestas.*

Problema 2b: una fuente radiactiva emite λ partículas por unidad de tiempo y se encuentra dentro de un detector de eficiencia 0.5.

a) Escriba la función distribución de la variable aleatoria *número de partículas detectadas por unidad de tiempo.* Diga cual es su varianza y como cambia si la eficiencia del detector fuese 1.

b) Si se cuentan partículas durante diez segundos y se observan 20 eventos. Calcule una cota superior para un intervalo frecuentista con el 90% de nivel de confianza para la actividad de la fuente en términos de los cuantiles de la distribución χ^2_ν. Justifique gráficamente dibujando un cinturón de confianza a mano alzada.

Ayuda: Si $Y \sim$ Poisson(k, λ), entonces $P(Y \geq k) = P(X \leq 2\lambda)$, con $X \sim \chi^2_{(2k)}$.

Problema 2c: Abordemos ahora el problema anterior con un enfoque bayesiano.

a) Muestre que la distribución Gamma$(x|\alpha, \beta)$ es la conjugada de la distribución de Poisson$(k; \mu)$ y encuentre la relación de transformación.

b) Indique claramente como calcular la cota superior de un intervalo bayesiano para la actividad de la fuente con el 90% de nivel de confianza. Use como prior la Gamma$(x|\alpha = 1, \beta = 1)$.

c) Se repite el experimento y nuevamente se observan 20 eventos en diez segundos. Mida cuán sensible es la esperanza del posterior a esta nueva medición en términos de la dispersión del posterior. Use como prior el posterior del ítem anterior.

Datos útiles: Gamma$(x|\alpha, \beta)$=$\beta^\alpha x^{\alpha-1} \exp(-\beta x)/\Gamma(\alpha)$, E$(x)$=$\alpha/\beta$ y Var(x)=α/β^2.

Problema 1a: el daltonismo se manifiesta como la dificultad para distinguir colores y afecta al 8% de los hombres y al 0.5% de las mujeres.

a) Estime, con su error, el número de estudiantes daltónicos del curso de MEFE de este año sabiendo que 14 son mujeres y 40 hombres.

b) ¿Cual es la probabilidad de que en un partido de fútbol masculino no haya daltónicos en la cancha? ¿Y si se tratara de un partido de fútbol femenino? (22 jugadores y 1 referee del mismo sexo).

c) ¿Cuántos hombres espera tener que consultar para encontrar 5 que sean daltónicos?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 5 integrantes de un grupo de 1000 mujeres sean daltónicas?

Problema 1b: Muestre que la densidad de probabilidad de $Y{=}X^2$ se obtiene a partir de la de X como $f_Y(t) = [f_X(\sqrt{t}) + f_X(-\sqrt{t})]/2\sqrt{t}$. Halle $f_Y(t)$ si

a) X es uniforme en [0,1]

b) X es normal N(0,1)

Problema 1c: Usando nuevamente que el daltonismo afecta al 8% de los hombres y al 0.5% de las mujeres, calcule la probabilidad de que una persona tomada al azar de la población mundial sea hombre sabiendo que no distingue el rojo del verde.

Distribución	Fórmula	Esperanza	Varianza
Binomial	$B(X=k\|n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$P(X=k\|\mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$	μ	μ
Hipergeométrica	$H(X=k\|N,n,K) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\frac{nK}{N}$	$n\frac{K(N-K)}{N^2}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
Binomial negativa	$P(X=n\|k,p) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$	$\frac{k}{p}$	$\frac{k(1-p)}{p^2}$