

Parcial computacional sobre Test de Hipótesis: Iones fluorescentes

Métodos Estadísticos en Física Experimental

2023

1 Enunciado

Existen trampas para iones capaces de mantener confinado un sólo átomo. Una vez atrapado, se puede manipular al átomo con la energía que recibe de un haz láser. El átomo excitado puede emitir un fotón de una longitud de onda característica que, al ser detectado con un fotor multiplicador, permite estudiar sus transiciones. La estadística de la luz producto de este proceso es bien descrita por una distribución de Poisson. Sin embargo, aún si no se incide con luz al detector, la agitación térmica de los electrones en los dinodos internos del fotor multiplicador hace posible que se registren pulsos como si hubiera incidido un fotón. Este comportamiento es exclusivamente debido a la electrónica interna del dispositivo y no presenta relación con el comportamiento del sistema al ser iluminado. Existe bibliografía que sugiere que este regimen de oscuridad es mejor descrito por una distribución de Poisson Geométrica (también conocida como distribución de Polya-Aeppli) en lugar de Poisson.

2 Consignas

Se quiere hacer un test que permita discernir si dada una medición la distribución del conteo observado es compatible con una distribución de Polya-Aeppli (fondo) o bien con la suma de dos variables aleatorias, una de Polya-Aeppli mas otra de Poisson (señal).

1. **Generando el fondo:** Valiéndose de la técnica de Aceptación-rechazo, genere una medición de fondo F a partir de $m=100$ realizaciones de una variable aleatoria con distribución de Polya-Aeppli($n|\mu_f=10, p=0.20$) correspondiente al número de eventos observados en oscuridad debido a la física intrínseca del detector.

$$PA(n|\mu, p) = \begin{cases} e^{-\mu} \sum_{k=1}^n \frac{\mu^k}{k!} \binom{n-1}{k-1} (1-p)^{n-k} p^k, & \text{si } n > 0 \\ e^{-\mu}, & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

2. **Generando la señal:** Genere ahora la señal S a partir de $m=100$ realizaciones de una variable aleatoria n con distribución de Poisson($n|\mu_s=1$) correspondiente al número de fotones de fluorescencia que se espera registrar en una medición sin fondo.

3. **Generando las muestra:** Genere ahora la muestra (simulación de lo que se espera obtener experimentalmente) a partir de la suma, elemento a elemento, de la señal y el fondo, es decir $M = S + F$.
4. **El estadístico** Defina un estadístico que le parezca razonable para testear si una muestra de tamaño n obtenida experimentalmente proviene de la suma de fluorescencia mas fondo (H_1), o solo de fondo (H_0). Repita $N=1000$ veces la creación de la muestra M cuando H_0 es cierta, en cada realización calcule el estadístico y obtenga su distribución.
5. **El test:** Dada la distribución obtenida en el punto anterior y para una significancia $\alpha=0.05$, indique la zona de rechazo de H_0 .
6. **Errores:** Cuantifique el error Tipo I y el error Tipo II que se comete al usar el test del item anterior.
7. **Potencia:** Calcule la potencia del test utilizado para diferentes valores de p (con hacerlo para 10 valores diferentes basta), siempre para una significancia $\alpha=0.05$. Discuta como espera que cambie la curva para otros valores de α .
8. **Significancia** Utilice la primera de las N realizaciones como si fuera una muestra obtenida experimentalmente y calcule la máxima significancia que podría haber usado en el test sin que eso luego implique rechazar la hipótesis nula. ¿Que relación guarda esa significancia máxima con el p-valor?

Aceptación-rechazo Para generar números pseudoaleatorios con una distribución arbitraria $f(t)$, en un dominio $[a, b]$ en el que f está acotada (siendo f_m su valor máximo) se puede proceder de la siguiente manera:

1. Se generan dos números al azar y y z con distribución uniforme en $[0,1]$.
2. A partir de y y z se determinan $u = a + (b - a)y$ y $v = f_m z$.
3. Si $v \leq f(u)$, se incluye $x = u$ en la muestra de números generados, en otro caso se descarta.
4. Se repiten los pasos anteriores hasta obtener la cantidad deseada de números aceptados.

Aclaración Los valores de los parámetros indicados en el enunciado no corresponden a una situación real, una vez atrapado el ión μ_s suele ser significativamente mas grande que μ_f .

Referencia El Laboratorio de Iones y Átomos Fríos (LIAF) del Departamento de Física de la FCEyN de la UBA cuenta con la tecnología necesaria para atrapar iones y es capaz de llevar a cabo este tipo de experimentos.

3 Generalidades

1. Indicar nombre, apellido, libreta o DNI en el informe.
2. Dar una descripción clara y precisa de la metodología utilizada.
3. Incluir todos los gráficos como figuras con sus correspondientes leyendas.
4. Justifique las hipótesis en la que se sustenten sus resultados y discuta los resultados obtenidos.
5. La fecha límite para la entrega es el martes 11 de julio a las 11 hs.
6. Enviar por mail a dariorodriguesfm@gmail.com. Nombrar al archivo de la siguiente manera: TH-SuApellido.pdf y adjuntar en el mismo mail los códigos desarrollados. Utilizar como asunto del mail: "TH - Iones".
7. Por consultas sobre interpretación de los enunciados escribir al grupo: mefe-1c-2023@googlegroups.com, así todos tienen acceso a todas las respuestas.