Apuntes de
Mecánica de Estructuras Flexibles

Autor: Enrique Cerda

Introducción a la Elasticidad

Hooke y la ley de Hooke

El resultado por el que Robert Hooke es mas conocido es su “ley de Hooke”. Es interesante ver el origen de esta ley en el principio de acción y reacción, punto de vista planteado por J. Gordon en us libro “Structures or Why Things Don’t Fall Down” (o simplemente “Structures” de aqui en adelante). El principio de acción y reacción puede ser adjudicado a Hooke quizás mas que a Newton y su formulación está íntimamente ligada a la capacidad de los materiales para resistir una carga o fuerza. ¿Cómo podría resistir un objeto una fuerza si no es capaz de ejercer una fuerza igual y opuesta al objeto que la ejerce? Si nos colgamos de un árbol por medio de una cuerda esperamos que la cuerda nos tire hacia arriba para balancear nuestro peso.

Pero Hooke encontró mas implicaciones de esta capacidad de reacción de los materiales. Mientras es entendible que dos personas ejerzan fuerzas iguales y opuestas cuando están en equilibrio entre ellas, por ejemplo, los dos tirando de una cuerda, ¿cómo es posible que un objeto inanimado ejerza una fuerza igual y opuesta cuando se le aplica una fuerza?. Esta pregunta fascinó a Hooke y la conectó con la capacidad de un material de deformarse. Realizando experimentos Hooke concluyó alrededor de 1676[1] que

1. Todos los sólidos cambian su forma contrayéndose o expandiéndose cuando una fuerza se aplica sobre ellos. Es este cambio de forma el que permite que un objeto sólido pueda responder con una fuerza igual y contraria.

2. Los materiales son elásticos. Esto es, ellos recobran su forma original y dimensiones completamente cuando las cargas que le son aplicadas son removidas.

3. R. Hooke cuantificó el efecto de deformación de una fuerza sobre un material como

$$F = kx$$

Aqui F es la carga aplicada y x el desplazamiento observado. Esta deformación es fácil de ver en una banda elástica pero difícil de observar en una barra de hierro. La capacidad

[1] Los *Principia* de Newton fueron publicados en 1687.

de generalización de Hooke en base a los materiales utilizados en sus experimentos (cuero, madera, etc.) es sorprendente.

Siendo esta una ley tan general sólo tuvo un valor académico hasta el siglo XIX. Las razones son humanas según explica Gordon en su libro pero también técnicas. La ley de Hooke estudia la deformación de un objeto como un todo. El desplazamiento x es lo que se desplaza un punto del objeto y F es la carga aplicada. No hay mención a la geometría del objeto y lo que ocurre localmente cuando el objeto es deformado. Es obvio que la deformación en una barra por efecto de una carga será mayor si la barra es mas delgada Menos obvio pero igual fácil de verificar experimentalmente es que el desplazamiento x será mayor para la misma carga si la barra es mas larga. tratar de estirar una banda de goma hasta no poder mas tiene un efecto mas visible si la banda es mas larga. Estos aspectos geométricos no están incorporados en la fórmula y la convierten en una observación curiosa no útil en aplicaciones prácticas. Fue Thomas Young quien dió el siguiente paso, aunque ya en el siglo XIX, para reformular la ley de Hooke en términos que permiten hacerla predictiva.

Experiencias

1. Una persona tome una banda de goma de 20 cm y la estire lo máximo que pueda. Luego repita lo anterior con una del doble de largo.

2. La misma banda se puede doblar en dos para tener una del doble de sección. Esto disminuye también el desplazamiento observado.

Young, Stress y Strain

Estudiando la deformación de columnas que se deforman bajo su propio peso Thomas Young llegó a escribir la relación entre carga y deformación en la forma

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L}$$

Aqui A y L son el area de la sección y el largo de la barra respectivamente antes de la aplicación de la carga. La cantidad ΔL es el desplazamiento producto de la fuerza aplicada F. E es una constante del material que se denomina módulo de Young. Notar que la ley de Hooke es una consecuencia de esta relación dado que si $x = \Delta L$ tenemos que $F = kx$ con $k = EA/L$. En resumen

- $A =$ Area de la sección transversal de la barra antes de la deformación.

- $L =$ Largo natural de la barra antes de la deformación.

- $\Delta L =$ Desplazamiento de un extremo de la barra.

- E = Módulo de Young.

La relación de Young da cuenta de varias cantidades que se irán entendiendo con mayor profundidad en el transcurso del curso. La fuerza por unidad de area se define como F/A y tiene dimensiones de $\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$, la misma de una presión y puede ser medida en unidades como Pascal (kg/m s^2). Recibe el nombre de **esfuerzo** aplicado o **stress** en inglés. La distancia que se alargó la barra sobre el largo natural $\Delta L/L$ se conoce como **deformación** o **strain** en inglés.

La deformación es una cantidad adimensional por lo que concluimos que que la constante que relaciona el esfuerzo y la deformación, el módulo de Young, tiene las mismas dimensiones que una presión. Como veremos es generalmente un número muy grande. Siguiendo a Gordon E sería el esfuerzo necesario para estirar al doble la longitud de un material (si no se rompiera antes) por lo que se entiende que sea un valor muy grande.

Típicamente se utiliza para la fuerza por unidad de area el símbolo $\sigma = F/A$ y para la deformación los símbolos ϵ o γ. La relación de Young es entonces

$$\sigma = E\epsilon$$

La deformación es típicamente muy pequeña por requerimientos de diseño. Nadie desea que el piso sea blando al caminar sobre él. Generalmente se requiere una deformación en una estructura no mayores a 0.1%![2]. ¿Qué quiere decir esto? 100% corresponde a tener $\epsilon = 1$ o doblar el largo, luego 0.1% quiere decir que $\epsilon = 0.001$!.

Otras formas de medir la deformación

En la literatura se usan otras formas de medir el strain que menciono para que no haya confusión. Lo que conocemos como ϵ o deformación también se conoce como *engineering strain.* Otra forma de medir la deformación es el *stretch ratio* o *relación de estirado* definido por

$$\lambda = \frac{L + \Delta L}{L} = \frac{L_F}{L} \longrightarrow \lambda = 1 + \epsilon$$

donde L_F es la longitud final. Otro forma de medir la deformación es el *true strain* o *deformación verdadera* definido por la relación diferencial

$$d\epsilon_t = \frac{dL}{L}$$

que al integrar da

$$\epsilon_t = \int_{L_I}^{L} \frac{dL}{L} = \ln\left(\frac{L_F}{L}\right) \longrightarrow \epsilon_t = \ln(1 + \epsilon)$$

[2]Ver comentario en pág. 139 de "The Sciences of Structures and Materials". Típicamente es 0.1% y raramente 1%.

Módulo de Young: Valores Típicos

Gas

Podemos comprender cómo aparece la relación esfuerzo-deformación analizando lo que ocurre cuando cerramos con un dedo la salida de una jeringa y por el otro tiramos del pistón. Mas y mas fuerza es necesaria para desplazar el pistón por lo que uno puede pensar que el fenómeno es descrito por la ley de Hooke y tenemos en este caso un resorte "puramente entrópico"', es decir no hay enlaces entre las moléculas que explique su elasticidad.

Utilizando la relación cuasiestática $pV^\alpha = C$ para el caso de una extensión isentrópica[3], donde C es una constante, α es un parámetro que depende del tipo de gas ($\alpha \approx 1$) V es el volumen de aire y p es la presión aplicada tenemos que en equilibrio

$$p_0 V_0^\alpha = C$$

donde p_0 es la presión atmosférica y V_0 es el volumen inicial de la jeringa. Con lo anterior podemos encontrar la fuerza aplicada para tirar el pistón $F = A(p - p_0)$, es decir la fuerza necesaria para balancear la disminución de presión producida por aumentar el volumen de la jeringa. Podemos ver que

$$\begin{aligned} F &= A(p_0 - p) \\ &= A\left(\frac{C}{V_0^\alpha} - \frac{C}{V^\alpha}\right) \\ &= \frac{A\alpha C}{V_0^\alpha}\left(\frac{V - V_0}{V_0}\right) \end{aligned}$$

donde la última igualdad es producto de que estamos estudiando lo que pasa con el pistón cuando $V \approx V_0$. Finalmente como $V = AL$ en que L es el largo de la jeringa tenemos que

$$F = \alpha p_0 \frac{L - L_0}{L_0}$$

luego hemos encontrado la relación de Young con $E = \alpha p_0$. Dado que la presión atmosférica es de alrededor de 10^5 Pa y la constante α es cercana a 1 ya tenemos una primera idea del valor del módulo de Young.

Sólido

Para un sólido podemos interpretar la elasticidad como consecuencia de los enlaces entre átomos. La interacción entre dos átomos se puede describir como una red de átomos conectados por resortes como muestra la Fig. 1. Como la energía típica de un enlace es

[3] Esta es la relación cuando se realiza una compresión o expansión en un tiempo mas rápido que el tiempo en equilibrar la temperatura entre el exterior y el interior.

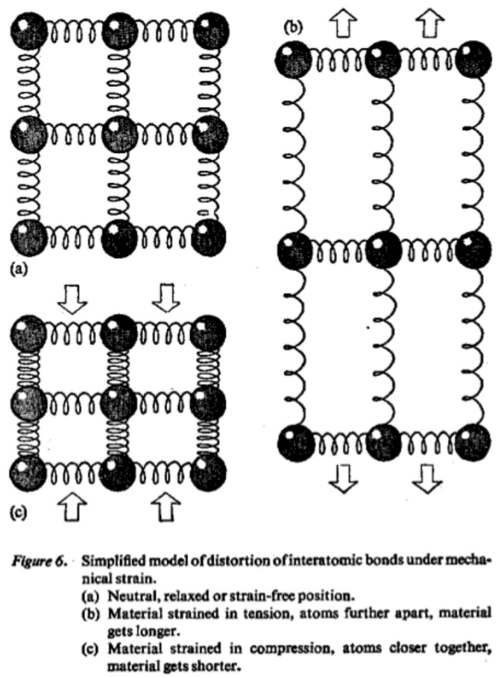

Figure 1: Modelo para un sólido con dos parámetros: la energía de interacción ϵ_0 y la distancia entre átomos a_0.

$\epsilon_0 \approx 1$ eV y la distancia entre átomos es $a_0 \approx 1$ Åla unica posibilidad dimensional que nos queda es que el modulo de Young que es tal que $[E] = ML^{-1}T^{-2}$ o las dimensiones de una presión es que

$$E \sim \frac{\epsilon_0}{a_0^3} = \frac{1.6 \times 10^{-19}\mathrm{J}}{(10^{-10}\mathrm{m})^3} = 1.6 \times 10^{11}\mathrm{Pa}$$

Notar que en este caso la elasticidad funciona a temperatura nula y agregar temperatura representa una perturbación al cálculo anterior.

Goma

El caso de un polímero como la goma corresponde a una elasticidad esencialmente entrópica. No lo vamos a calcular pero un resumen del cálculo puede ser encontrado en el libro *Mechanics of the Cell* de David Boal. El módulo de Young viene dado por la relación

$$E = 3\nu kT$$

donde ν es la densidad de volumen por cadena polimérica. Otra manera de escribirlo es que si cada cadena tiene N monómeros y cada monómero tiene un volumen v entonces una cadena ocupa un volumen Nv y entonces

$$\nu = \frac{1\text{Cadena}}{\text{Volumen Cadena}} = \frac{1}{Nv}$$

La elasticidad en este caso es completamente entrópica y debida al desorden de cada polímero cuyo estado mas probable es tener un tamaño $R = \sqrt{N}b$ donde $b \approx v^{1/3}$ es el largo del monómero.

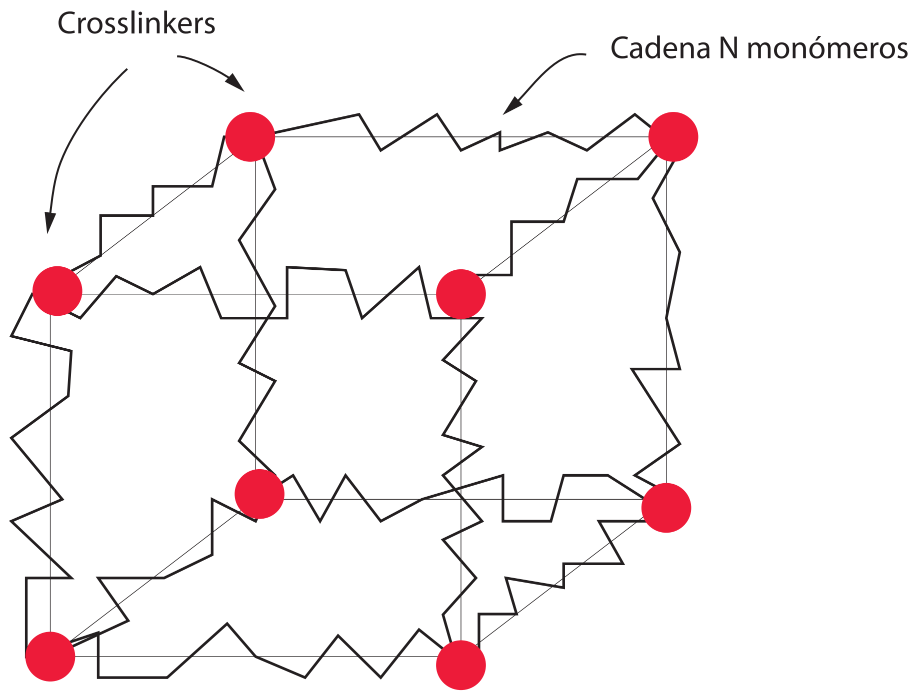

Figure 2: Modelo geométrico de un polímero con elasticidad entrópica. Se puede ver que por cada crosslinker o vértice hay 3 cadenas (6 cadenas apuntan a cada vértice pero cada cadena es compartida por 2 vértices).

¿Cómo estimar N?. Esto corresponde a estimar el largo de cada cadena lo cual tiene que ver con la mezcla entre polímeros y crosslinkers que se utilizan. Un modelo como el de la Fig. 2 muestra que el número de cadenas por crosslinker es 3, luego existen $3N$ monómeros por crosslinker y la concentración en un volumen dado de ambos será tal que

$$\frac{(\text{Nro. Monómeros})/V}{(\text{Nro. Crosslinkers})/V} = 3N \longrightarrow \frac{n_m}{n_c} = 3N$$

donde n_m es la concentración molar de monómeros y n_c la de crosslinkers. Luego encontramos

$$E = \frac{9}{v}\frac{n_c}{n_m}kT$$

Para el caso de la goma una concentración típica es $n_m = 1$ M y $n_c = 0.01$ M y el tamaño de un monómero es $v \approx 100$ Å^3, luego a temperatura ambiente

$$E = \frac{9}{v}\frac{n_c}{n_m}kT = \frac{9}{100 \times 10^{-30}\mathrm{m}^3} \times \frac{1}{100} \times (1.38 \times 10^{-23}\mathrm{J\ K}^{-1}300\mathrm{K}) = 3.7 \times 10^6$$

En resumen...

54 Structures

TABLE 1

Approximate Young's moduli of various solids

Material	Young's modulus (E) p.s.i.	Young's modulus (E) MN/m²
Soft cuticle of pregnant locust*	30	0.2
Rubber	1,000	7
Shell membrane of egg	1,100	8
Human cartilage	3,500	24
Human tendon	80,000	600
Wallboard	200,000	1,400
Unreinforced plastics, polythene, nylon	200,000	1,400
Plywood	1,000,000	7,000
Wood (along grain)	2,000,000	14,000
Fresh bone	3,000,000	21,000
Magnesium metal	6,000,000	42,000
Ordinary glasses	10,000,000	70,000
Aluminium alloys	10,000,000	70,000
Brasses and bronzes	17,000,000	120,000
Iron and steel	30,000,000	210,000
Aluminium oxide (sapphire)	60,000,000	420,000
Diamond	170,000,000	1,200,000

* By courtesy of Dr Julian Vincent, Department of Zoology, University of Reading.

Figure 3: Módulos de Young a partir de J. Gordon

La goma tiene un módulo de Young un orden de magnitud mayor $E_{Goma} = 7 \times 10^6$ Pa que se compara bastante bien con nuestra estimación. Para el caso de un sólido cristalino estimamos $E_{Cristal} = 1.6 \times 10^{11}$Pa o $E_{Cristal} = 160000$MPa lo cual se acerca al valor que encontramos para metales.

Según la tabla existe una variación en 10^6 en el valor del módulo de Young que se puede conseguir utilizando diferentes materiales. Es por ello que es conveniente usar los prefijos *Mega* y *Giga*, luego la goma tiene alrededor de 7 MPa y el polyester 2.4 GPa.

El calificativo de **blando** en inglés **soft** será apropiado para materiales como la goma y de **duro** o en inglés **stiff** para los metales, pero obviamente calificar blando o duro un material es en relación a otro y para una aplicación determinada.

La tabla muestra la rigidez de un listado de materiales biológicos. Se puede ver que existe un rango de 1000 en el caso de las proteínas. Hay que tener cuidado en estos casos del valor de la longitud de persistencia (que vermeos mas adelante) dado que estos filamentos se comportan entrópicamente para tamaños mayores a L_p.

Estimaciones

Compresión de un Árbol

Consideremos un árbol de largo L y radio R que por acción de su propio peso se comprime. El esfuerzo mayor estará en la base del árbol que tendrá que soportar un peso

$$P = \rho g (L \pi R^2)$$

el esfuerzo asociado será $P/(\pi R^2) = \rho g L$, es decir mientras mas largo mayor será la compresión. Esta compresión no es homogenea en el árbol dado que disminuye a medida que nos acercamos a la base pero una sobre estimación es suponer que el esfuerzo es $\rho g L$ en todo el árbol. La deformación producida será

$$\rho g L = E \frac{\Delta L}{L} \longrightarrow \Delta L = \frac{\rho g L^2}{E}$$

Tomado $g = 10$ m/s^2, $\rho = 10^3$ kg/m^3 y $E = 14$ GPa (ver tabla), encontramos que para un árbol de $L \approx 50$ m existe una compresión de

$$\Delta L \approx 2\text{mm}$$

Como es también comentado por S. Vogel (Life's Devices, pp. 199) la altura de una persona cambia después de dormir. Los efectos son mas dramáticos debido a que hay un efecto viscoelástico y pueden ser detectados a simple vista.

Experiencia

1. Hacer una marca en la pared antes y después de dormir. ¿Cuánto es la diferencia en milímetros?

Compresión del Piso

Otro ejemplo que muestra que los efectos de deformación son pequeños es estudiar la deformación que se produce por acción de nuestro peso sobre el piso. Una estimación puede ser obtenida con el modelo de la figura. Nuestro esfuerzo es obviamente P/a^2, pero

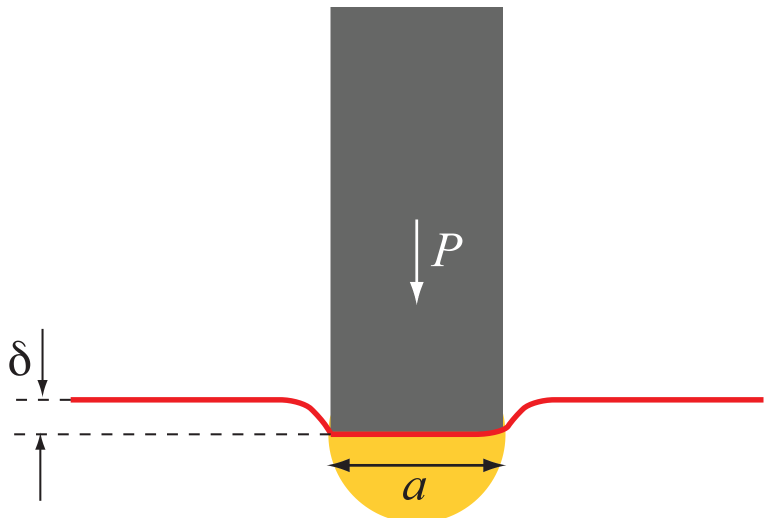

Figure 4: Deformación del piso por efecto de un peso P. El cuerpo se supone de forma tal que la base es un cuadrado de lado a y que deforma el piso en una región indicada en color naranjo.

la deformación es más difícil de calcular. La compresión será δ y la deformación es

$$\frac{\Delta L}{L} \sim \frac{\delta}{L}$$

¿Pero qué es L?. L es la longitud sobre la cual actúa la deformación. Obviamente no puede ser el radio terrestre. Tampoco puede ser δ porque la influencia de la deformación debe penetrar mucho más. Para encontrar L nos preguntamos cuánto penetra la deformación en el piso y la respuesta la podemos encontrar de manera dimensional: la única escala de longitud es a. Luego

$$\frac{P}{a^2} \sim E\frac{\delta}{a} \longrightarrow \delta = \frac{P}{aE}$$

Para concreto vemos de tablas que $E = 17$ GPa. Además $P \approx 80$ kg (o 800 N) y $a \approx 40$ cm, luego

$$\delta \approx 100\,\mathrm{nm}$$

Contacto de Hertz

Supongamos que tenemos una esfera blanda de radio R en contacto con un piso muy duro. Lo que veremos es una deformación como se muestra en la figura donde se forma un disco de radio a en el contacto y el perímetro de la esfera se desplaza una distancia δ. Ambas distancias son son desconocidas y para encontrarlas debemos utilizar la elasticidad del material. La primera consideración es geométrica. De la figura vemos que

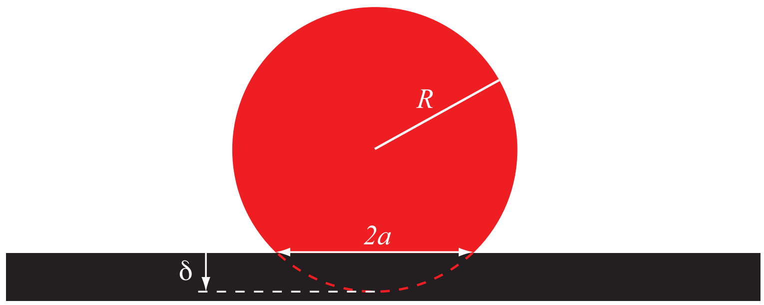

Figure 5: Contacto de Hertz

$$R - \delta = \sqrt{R^2 - a^2}$$

lo cual para $a \ll R$ da $\delta \approx a^2/2R$.

Al aplicar una fuerza P el esfuerzo generado es P/a^2, luego podemos utilizar la relación de Thomas Young y decir que $P/a^2 = E\Delta L/L$, en donde obviamente esperamos que $\Delta L = \delta$...¿pero que es L? La discusión es muy parecida al problema de la compresión de un piso, L debe ser mayor que δ pero menor que R. La longitud que nos queda es a y esperamos que la zona afectada por la deformación sea un volumen definido por esta longitud. En conclusión tendremos $P/a^2 = E\delta/a$.

La relación geométrica nos permite encontrar

$$P \approx E\delta\sqrt{2\delta R} \sim ER^{1/2}\delta^{3/2}$$

lo cual es sorpresivo ya que viola la ley de Hooke. Tenemos un caso en que la relación de Young se cumple localmente (de hecho la usamos) pero globalmente no se cumple dado que la fuerza no es proporcional al desplazamiento.

Estiramiento de una Cuerda

Otra estimación interesante de realizar es encontrar cuántas hay que estirar una cuerda en una guitarra para que de la frecuencia de oscilación que buscamos. Específicamente la mas alta frecuencia de una cuerda de guitarra clásica debe ser de alrededor de 300 Hz. ¿Cuántas vueltas hay que darle a la clavija para llegar a esta frecuencia?.

La velocidad del sonido en una cuerda es $c = \sqrt{T/\sigma}$ en donde T es la fuerza aplicada y σ la densidad por unidad de línea. Esta densidad se puede expresar simplemente como $\sigma = A\rho$ en donde ρ es la densidad del material y A es el area de la sección de la cuerda. Un modo típico de oscilación de frecuencia angular ω y vector de onda k se representa por

$$\begin{aligned}\xi(x,t) = B\sin\omega t\sin kx &= \frac{B}{2}[\cos(kx+\omega t) + \cos(kx-\omega t)] \\ &= \frac{B}{2}\{\cos[k(x+ct)] + \cos[k(x-ct)]\}\end{aligned}$$

donde $c = \omega/k$. Es decir, una onda estacionaria corresponde a una onda que viaja a la izquierda y otra que viaja hacia la derecha sumada. Tenemos que la frecuencia de la guitarra estara dada por $f = \omega/2\pi$ y que el vector de onda para el modo mas bajo será $k = \pi/L$ en donde L es el largo de la cuerda. Notar que esto permite que la onda sea nula en ambos bordes como es esperado.

La información anterior nos permite determinar el esfuerzo necesario para que se escuche una frecuencia dada. Tenemos que

$$c^2 = \frac{T}{A\rho} = \frac{\omega^2}{k^2} \longrightarrow \frac{T}{A} = \rho(2fL)^2$$

En el caso de una cuerda de nylon que produce la máxima frecuencia de oscilación de $f = 300$ Hz tenemos que $L \approx 0.7$ m y $\rho \approx 1.1 \times 10^3$ kg/m^3 cual entrega un esfuerzo de

$$\frac{T}{A} \approx 0.194\,\mathrm{GPa}$$

Como para el nylon $E_{\mathrm{Nylon}} \approx 3$ GPa tenemos que la deformación es

$$\frac{\Delta L}{L} \approx 0.06$$

lo que significa un estiramiento de $0.06 \times 70\,\mathrm{cm} \approx 4.5$ cm.

Diagrama de Ashby

Vamos a volver a la relación de Hooke donde $F = kx$ ($x = \Delta L$) y analizar la rigidez desde el punto de vista del diseño. Supongamos que deseamos utilizar un cable en tensión en una estructura el cual queremos que tenga un largo L y que debido a una fuerza F no se estire mas que una distancia dada ΔL de manera que nos queda libre determinar la sección apropiada de material y el tipo de material que usamos, es decir, las variables son A y las propiedades materiales.

Podemos intentar disminuir la sección para utilizar menos material y aligerar el peso del cable como también su costo pero sin sacrificar rigidez, por tanto debe permanecer

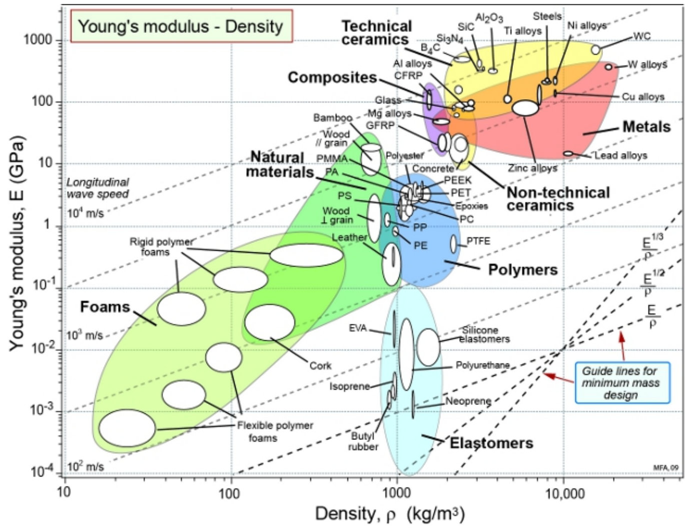

Figure 6: Diagrama de Ashby mostrando en un diagrama de rigidez-densidad los diferentes tipos de material. Al mover E/ρ

constante la cantidad $k = AE/L$. Como el objeto de nuestra minimización es la masa tenemos que evaluar

$$m = \rho V = \rho A L \longrightarrow m = kL^2 \times \frac{1}{E/\rho}$$

esto nos dice que podemos disminuir la masa decreciendo la densidad o incrementando el módulo de Young. Si nuestro sistema no puede soportar mas que una masa m_0 (producto de otros requerimientos) de forma que $m < m_0$ entonces tenemos que los materiales disponibles quedan por sobre la curva

$$E = \frac{kL^2}{m_0} \times \rho$$

notar que mientras mas se decrece la masa mas nos acercamos a los metales y cerámicas. ¿Podríamos hacerlo de vidrio? Obviamente hay mas consideraciones que incluir y que tienen relación con la resistencia del material y no sólo su deformación.

Relación Esfuerzo-Deformación: Universalidad

La relación de Thomas Young

$$\sigma = E\epsilon$$

muestra que la curva $\sigma = \sigma(\epsilon)$ caracteriza al material dado que E es una propiedad específica. Esta relación se cumple aún cuando la relación deje de ser lineal y la relación sea mucho mas compleja y define lo que se llama curva esfuerzo-deformación del material. La Fig. 7 muestra la curva en el caso del caso del acero (*mild steel*). Lo fundamental es que esta curva es la misma siempre para el mismo material y no depende del tamaño y geometría de la muestra por lo que caracteriza al material. En el caso de la Fig. 7 corresponde a un experimento controlado por desplazamiento (¿Por qué?).

En las siguientes secciones sacaremos mas conclusiones de esta curva.

FIGURE 7.33 Tensile stress–strain behavior for a plain carbon steel.

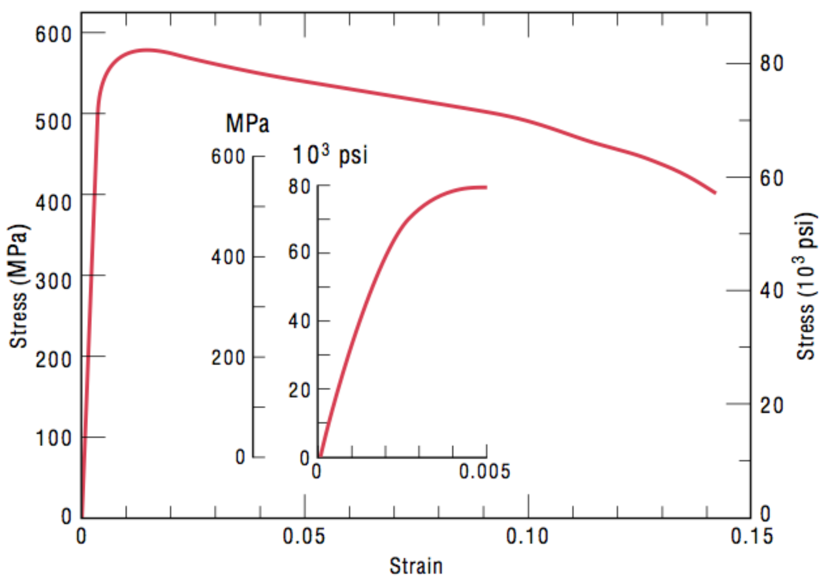

Figure 7: Curva esfuerzo deformación extraída del libro “Fundamentals of Materials Science and Engineering”. La figura pequeña inserta muestra la región lineal que está caracterizada por $\sigma = E\epsilon$ pero la relación $\sigma = \sigma(\epsilon)$ es mucho mas complicada.