

# Apuntes de Mecánica de Estructuras Flexibles

Autor: Enrique Cerda



# Introducción a la Elasticidad

## Hooke y la ley de Hooke

El resultado por el que Robert Hooke es más conocido es su “ley de Hooke”. Es interesante ver el origen de esta ley en el principio de acción y reacción, punto de vista planteado por J. Gordon en su libro “Structures or Why Things Don’t Fall Down” (o simplemente “Structures” de aquí en adelante). El principio de acción y reacción puede ser adjudicado a Hooke quizás más que a Newton y su formulación está íntimamente ligada a la capacidad de los materiales para resistir una carga o fuerza. ¿Cómo podría resistir un objeto una fuerza si no es capaz de ejercer una fuerza igual y opuesta al objeto que la ejerce? Si nos colgamos de un árbol por medio de una cuerda esperamos que la cuerda nos tire hacia arriba para balancear nuestro peso.

Pero Hooke encontró más implicaciones de esta capacidad de reacción de los materiales. Mientras es entendible que dos personas ejerzan fuerzas iguales y opuestas cuando están en equilibrio entre ellas, por ejemplo, los dos tirando de una cuerda, ¿cómo es posible que un objeto inanimado ejerza una fuerza igual y opuesta cuando se le aplica una fuerza?. Esta pregunta fascinó a Hooke y la conectó con la capacidad de un material de deformarse. Realizando experimentos Hooke concluyó alrededor de 1676<sup>1</sup> que

1. Todos los sólidos cambian su forma contrayéndose o expandiéndose cuando una fuerza se aplica sobre ellos. Es este cambio de forma el que permite que un objeto sólido pueda responder con una fuerza igual y contraria.
2. Los materiales son elásticos. Esto es, ellos recobran su forma original y dimensiones completamente cuando las cargas que se les aplicadas son removidas.
3. R. Hooke cuantificó el efecto de deformación de una fuerza sobre un material como

$$F = kx$$

Aquí  $F$  es la carga aplicada y  $x$  el desplazamiento observado. Esta deformación es fácil de ver en una banda elástica pero difícil de observar en una barra de hierro. La capacidad

---

<sup>1</sup>Los *Principia* de Newton fueron publicados en 1687.

de generalización de Hooke en base a los materiales utilizados en sus experimentos (cuero, madera, etc.) es sorprendente.

Siendo esta una ley tan general sólo tuvo un valor académico hasta el siglo XIX. Las razones son humanas según explica Gordon en su libro pero también técnicas. La ley de Hooke estudia la deformación de un objeto como un todo. El desplazamiento  $x$  es lo que se desplaza un punto del objeto y  $F$  es la carga aplicada. No hay mención a la geometría del objeto y lo que ocurre localmente cuando el objeto es deformado. Es obvio que la deformación en una barra por efecto de una carga será mayor si la barra es mas delgada. Menos obvio pero igual fácil de verificar experimentalmente es que el desplazamiento  $x$  será mayor para la misma carga si la barra es mas larga. tratar de estirar una banda de goma hasta no poder mas tiene un efecto mas visible si la banda es mas larga. Estos aspectos geométricos no están incorporados en la fórmula y la convierten en una observación curiosa no útil en aplicaciones prácticas. Fue Thomas Young quien dió el siguiente paso, aunque ya en el siglo XIX, para reformular la ley de Hooke en términos que permiten hacerla predictiva.

### *Experiencias*

1. Una persona tome una banda de goma de 20 cm y la estire lo máximo que pueda. Luego repita lo anterior con una del doble de largo.
2. La misma banda se puede doblar en dos para tener una del doble de sección. Esto disminuye también el desplazamiento observado.

## **Young, Stress y Strain**

Estudiando la deformación de columnas que se deforman bajo su propio peso Thomas Young llegó a escribir la relación entre carga y deformación en la forma

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}$$

Aquí  $A$  y  $L$  son el area de la sección y el largo de la barra respectivamente antes de la aplicación de la carga. La cantidad  $\Delta L$  es el desplazamiento producto de la fuerza aplicada  $F$ .  $E$  es una constante del material que se denomina módulo de Young. Notar que la ley de Hooke es una consecuencia de esta relación dado que si  $x = \Delta L$  tenemos que  $F = kx$  con  $k = EA/L$ . En resumen

- $A$  = Area de la sección transversal de la barra antes de la deformación.
- $L$  = Largo natural de la barra antes de la deformación.
- $\Delta L$  = Desplazamiento de un extremo de la barra.

- $E$  = Módulo de Young.

La relación de Young da cuenta de varias cantidades que se irán entendiendo con mayor profundidad en el transcurso del curso. La fuerza por unidad de área se define como  $F/A$  y tiene dimensiones de  $ML^{-1}T^{-2}$ , la misma de una presión y puede ser medida en unidades como Pascal ( $kg/m\ s^2$ ). Recibe el nombre de **esfuerzo** aplicado o **stress** en inglés. La distancia que se alargó la barra sobre el largo natural  $\Delta L/L$  se conoce como **deformación** o **strain** en inglés.

La deformación es una cantidad adimensional por lo que concluimos que que la constante que relaciona el esfuerzo y la deformación, el módulo de Young, tiene las mismas dimensiones que una presión. Como veremos es generalmente un número muy grande. Siguiendo a Gordon  $E$  sería el esfuerzo necesario para estirar al doble la longitud de un material (si no se rompiera antes) por lo que se entiende que sea un valor muy grande.

Típicamente se utiliza para la fuerza por unidad de área el símbolo  $\sigma = F/A$  y para la deformación los símbolos  $\epsilon$  o  $\gamma$ . La relación de Young es entonces

$$\sigma = E\epsilon$$

La deformación es típicamente muy pequeña por requerimientos de diseño. Nadie desea que el piso sea blando al caminar sobre él. Generalmente se requiere una deformación en una estructura no mayores a 0.1%!<sup>2</sup>. ¿Qué quiere decir esto? 100% corresponde a tener  $\epsilon = 1$  o doblar el largo, luego 0.1% quiere decir que  $\epsilon = 0.001!$ .

### Otras formas de medir la deformación

En la literatura se usan otras formas de medir el strain que menciono para que no haya confusión. Lo que conocemos como  $\epsilon$  o deformación también se conoce como *engineering strain*. Otra forma de medir la deformación es el *stretch ratio* o *relación de estirado* definido por

$$\lambda = \frac{L + \Delta L}{L} = \frac{L_F}{L} \longrightarrow \lambda = 1 + \epsilon$$

donde  $L_F$  es la longitud final. Otro forma de medir la deformación es el *true strain* o *deformación verdadera* definido por la relación diferencial

$$d\epsilon_t = \frac{dL}{L}$$

que al integrar da

$$\epsilon_t = \int_{L_I}^L \frac{dL}{L} = \ln\left(\frac{L_F}{L}\right) \longrightarrow \epsilon_t = \ln(1 + \epsilon)$$

---

<sup>2</sup>Ver comentario en pág. 139 de "The Sciences of Structures and Materials". Típicamente es 0.1% y raramente 1%.

## Módulo de Young: Valores Típicos

### Gas

Podemos comprender cómo aparece la relación esfuerzo-deformación analizando lo que ocurre cuando cerramos con un dedo la salida de una jeringa y por el otro tiramos del pistón. Mas y mas fuerza es necesaria para desplazar el pistón por lo que uno puede pensar que el fenómeno es descrito por la ley de Hooke y tenemos en este caso un resorte “puramente entrópico”, es decir no hay enlaces entre las moléculas que explique su elasticidad.

Utilizando la relación cuasiestática  $pV^\alpha = C$  para el caso de una extensión isentrópica<sup>3</sup>, donde  $C$  es una constante,  $\alpha$  es un parámetro que depende del tipo de gas ( $\alpha \approx 1$ )  $V$  es el volumen de aire y  $p$  es la presión aplicada tenemos que en equilibrio

$$p_0 V_0^\alpha = C$$

donde  $p_0$  es la presión atmosférica y  $V_0$  es el volumen inicial de la jeringa. Con lo anterior podemos encontrar la fuerza aplicada para tirar el pistón  $F = A(p - p_0)$ , es decir la fuerza necesaria para balancear la disminución de presión producida por aumentar el volumen de la jeringa. Podemos ver que

$$\begin{aligned} F &= A(p_0 - p) \\ &= A \left( \frac{C}{V_0^\alpha} - \frac{C}{V^\alpha} \right) \\ &= \frac{A\alpha C}{V_0^\alpha} \left( \frac{V - V_0}{V_0} \right) \end{aligned}$$

donde la última igualdad es producto de que estamos estudiando lo que pasa con el pistón cuando  $V \approx V_0$ . Finalmente como  $V = AL$  en que  $L$  es el largo de la jeringa tenemos que

$$F = \alpha p_0 \frac{L - L_0}{L_0}$$

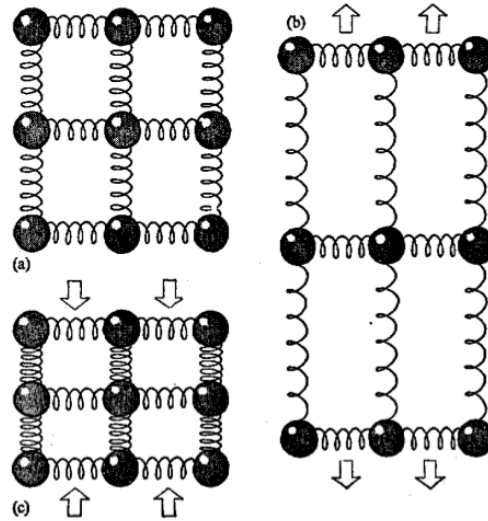
luego hemos encontrado la relación de Young con  $E = \alpha p_0$ . Dado que la presión atmosférica es de alrededor de  $10^5$  Pa y la constante  $\alpha$  es cercana a 1 ya tenemos una primera idea del valor del módulo de Young.

### Sólido

Para un sólido podemos interpretar la elasticidad como consecuencia de los enlaces entre átomos. La interacción entre dos átomos se puede describir como una red de átomos conectados por resortes como muestra la Fig. 1. Como la energía típica de un enlace es

---

<sup>3</sup>Esta es la relación cuando se realiza una compresión o expansión en un tiempo mas rápido que el tiempo en equilibrar la temperatura entre el exterior y el interior.



**Figure 6.** Simplified model of distortion of interatomic bonds under mechanical strain.  
 (a) Neutral, relaxed or strain-free position.  
 (b) Material strained in tension, atoms further apart, material gets longer.  
 (c) Material strained in compression, atoms closer together, material gets shorter.

Figure 1: Modelo para un sólido con dos parámetros: la energía de interacción  $\epsilon_0$  y la distancia entre átomos  $a_0$ .

$\epsilon_0 \approx 1$  eV y la distancia entre átomos es  $a_0 \approx 1$  Å. La única posibilidad dimensional que nos queda es que el módulo de Young que es tal que  $[E] = ML^{-1}T^{-2}$  o las dimensiones de una presión es que

$$E \sim \frac{\epsilon_0}{a_0^3} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \text{ J}}{(10^{-10} \text{ m})^3} = 1.6 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

Notar que en este caso la elasticidad funciona a temperatura nula y agregar temperatura representa una perturbación al cálculo anterior.

## Goma

El caso de un polímero como la goma corresponde a una elasticidad esencialmente entrópica. No lo vamos a calcular pero un resumen del cálculo puede ser encontrado en el libro *Mechanics of the Cell* de David Boal. El módulo de Young viene dado por la relación

$$E = 3\nu kT$$

donde  $\nu$  es la densidad de volumen por cadena polimérica. Otra manera de escribirlo es que si cada cadena tiene  $N$  monómeros y cada monómero tiene un volumen  $v$  entonces una

cadena ocupa un volumen  $Nv$  y entonces

$$\nu = \frac{1 \text{ Cadena}}{\text{Volumen Cadena}} = \frac{1}{Nv}$$

La elasticidad en este caso es completamente entrópica y debida al desorden de cada polímero cuyo estado mas probable es tener un tamaño  $R = \sqrt{N}b$  donde  $b \approx v^{1/3}$  es el largo del monómero.

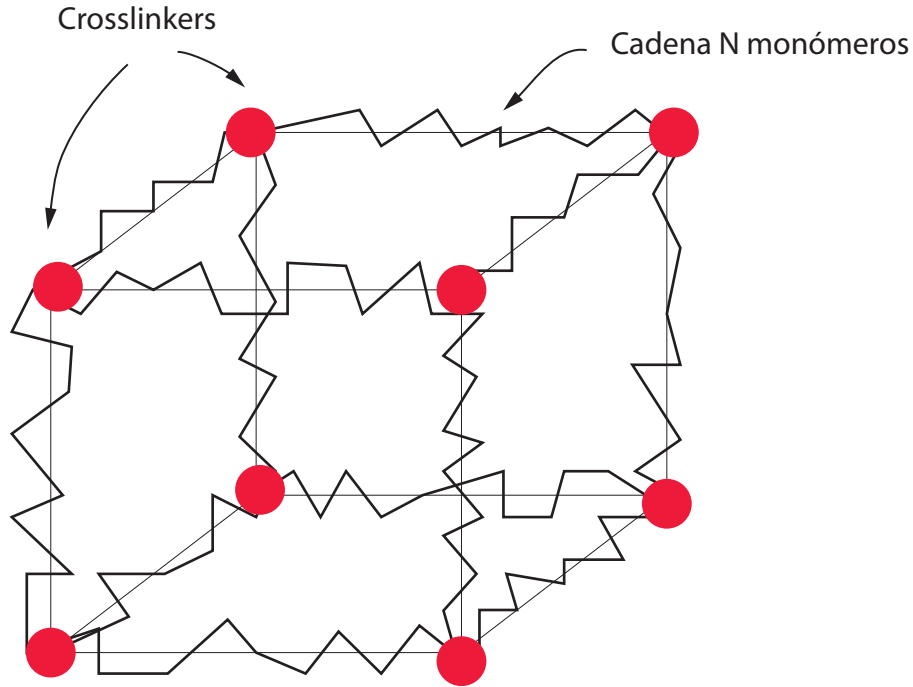


Figure 2: Modelo geométrico de un polímero con elasticidad entrópica. Se puede ver que por cada crosslinker o vértice hay 3 cadenas (6 cadenas apuntan a cada vértice pero cada cadena es compartida por 2 vértices).

¿Cómo estimar  $N$ ?. Esto corresponde a estimar el largo de cada cadena lo cual tiene que ver con la mezcla entre polímeros y crosslinkers que se utilizan. Un modelo como el de la Fig. 2 muestra que el número de cadenas por crosslinker es 3, luego existen  $3N$  monómeros por crosslinker y la concentración en un volumen dado de ambos será tal que

$$\frac{(\text{Nro. Monómeros})/V}{(\text{Nro. Crosslinkers})/V} = 3N \longrightarrow \frac{n_m}{n_c} = 3N$$

donde  $n_m$  es la concentración molar de monómeros y  $n_c$  la de crosslinkers. Luego encon-



tramos

$$E = \frac{9 n_c}{v n_m} kT$$

Para el caso de la goma una concentración típica es  $n_m = 1 \text{ M}$  y  $n_c = 0.01 \text{ M}$  y el tamaño de un monómero es  $v \approx 100 \text{ \AA}^3$ , luego a temperatura ambiente

$$E = \frac{9 n_c}{v n_m} kT = \frac{9}{100 \times 10^{-30} \text{m}^3} \times \frac{1}{100} \times (1.38 \times 10^{-23} \text{J K}^{-1} 300 \text{K}) = 3.7 \times 10^6$$

En resumen...

**54 Structures**

**TABLE 1**

Approximate Young's moduli of various solids

Material	Young's modulus ( $E$ )	
	p.s.i.	MN/m <sup>2</sup>
Soft cuticle of pregnant locust*	30	0.2
Rubber	1,000	7
Shell membrane of egg	1,100	8
Human cartilage	3,500	24
Human tendon	80,000	600
Wallboard	200,000	1,400
Unreinforced plastics, polythene, nylon	200,000	1,400
Plywood	1,000,000	7,000
Wood (along grain)	2,000,000	14,000
Fresh bone	3,000,000	21,000
Magnesium metal	6,000,000	42,000
Ordinary glasses	10,000,000	70,000
Aluminium alloys	10,000,000	70,000
Brasses and bronzes	17,000,000	120,000
Iron and steel	30,000,000	210,000
Aluminium oxide (sapphire)	60,000,000	420,000
Diamond	170,000,000	1,200,000

\* By courtesy of Dr Julian Vincent, Department of Zoology, University of Reading.

Figure 3: Módulos de Young a partir de J. Gordon

La goma tiene un módulo de Young un orden de magnitud mayor  $E_{Goma} = 7 \times 10^6 \text{ Pa}$  que se compara bastante bien con nuestra estimación. Para el caso de un sólido cristalino

estimamos  $E_{Cristal} = 1.6 \times 10^{11} \text{Pa}$  o  $E_{Cristal} = 160000 \text{MPa}$  lo cual se acerca al valor que encontramos para metales.

Según la tabla existe una variación en  $10^6$  en el valor del módulo de Young que se puede conseguir utilizando diferentes materiales. Es por ello que es conveniente usar los prefijos *Mega* y *Giga*, luego la goma tiene alrededor de 7 MPa y el polyester 2.4 GPa.

El calificativo de **blando** en inglés **soft** será apropiado para materiales como la goma y de **duro** o en inglés **stiff** para los metales, pero obviamente calificar blando o duro un material es en relación a otro y para una aplicación determinada.

La tabla muestra la rigidez de un listado de materiales biológicos. Se puede ver que existe un rango de 1000 en el caso de las proteínas. Hay que tener cuidado en estos casos del valor de la longitud de persistencia (que vermeos mas adelante) dado que estos filamentos se comportan entrópicamente para tamaños mayores a  $L_p$ .

## Estimaciones

### Compresión de un Árbol

Consideremos un árbol de largo  $L$  y radio  $R$  que por acción de su propio peso se comprime. El esfuerzo mayor estará en la base del árbol que tendrá que soportar un peso

$$P = \rho g(L\pi R^2)$$

el esfuerzo asociado será  $P/(\pi R^2) = \rho gL$ , es decir mientras mas largo mayor será la compresión. Esta compresión no es homogénea en el árbol dado que disminuye a medida que nos acercamos a la base pero una sobre estimación es suponer que el esfuerzo es  $\rho gL$  en todo el árbol. La deformación producida será

$$\rho gL = E \frac{\Delta L}{L} \longrightarrow \Delta L = \frac{\rho gL^2}{E}$$

Tomado  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$  y  $E = 14 \text{ GPa}$  (ver tabla), encontramos que para un árbol de  $L \approx 50 \text{ m}$  existe una compresión de

$$\Delta L \approx 2 \text{mm}$$

Como es también comentado por S. Vogel (*Life's Devices*, pp. 199) la altura de una persona cambia después de dormir. Los efectos son mas dramáticos debido a que hay un efecto viscoelástico y pueden ser detectados a simple vista.

### *Experiencia*

1. Hacer una marca en la pared antes y después de dormir. ¿Cuánto es la diferencia en milímetros?

## Compresión del Piso

Otro ejemplo que muestra que los efectos de deformación son pequeños es estudiar la deformación que se produce por acción de nuestro peso sobre el piso. Una estimación puede ser obtenida con el modelo de la figura. Nuestro esfuerzo es obviamente  $P/a^2$ , pero

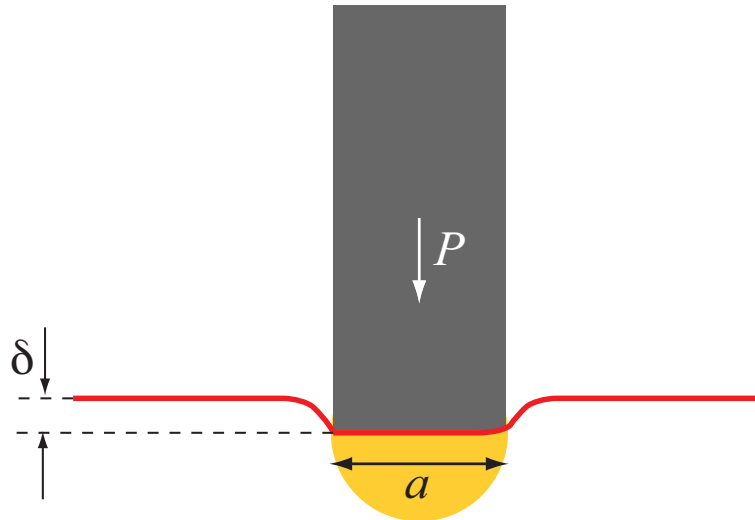


Figure 4: Deformación del piso por efecto de un peso  $P$ . El cuerpo se supone de forma tal que la base es un cuadrado de lado  $a$  y que deforma el piso en una región indicada en color naranja.

la deformación es más difícil de calcular. La compresión será  $\delta$  y la deformación es

$$\frac{\Delta L}{L} \sim \frac{\delta}{L}$$

¿Pero qué es  $L$ ?  $L$  es la longitud sobre la cual actúa la deformación. Obviamente no puede ser el radio terrestre. Tampoco puede ser  $\delta$  porque la influencia de la deformación debe penetrar mucho más. Para encontrar  $L$  nos preguntamos cuánto penetra la deformación en el piso y la respuesta la podemos encontrar de manera dimensional: la única escala de longitud es  $a$ . Luego

$$\frac{P}{a^2} \sim E \frac{\delta}{a} \rightarrow \delta = \frac{P}{aE}$$

Para concreto vemos de tablas que  $E = 17$  GPa. Además  $P \approx 80$  kg (o 800 N) y  $a \approx 40$  cm, luego

$$\delta \approx 100 \text{ nm}$$

## Contacto de Hertz

Supongamos que tenemos una esfera blanda de radio  $R$  en contacto con un piso muy duro. Lo que veremos es una deformación como se muestra en la figura donde se forma un disco de radio  $a$  en el contacto y el perímetro de la esfera se desplaza una distancia  $\delta$ . Ambas distancias son desconocidas y para encontrarlas debemos utilizar la elasticidad del material. La primera consideración es geométrica. De la figura vemos que

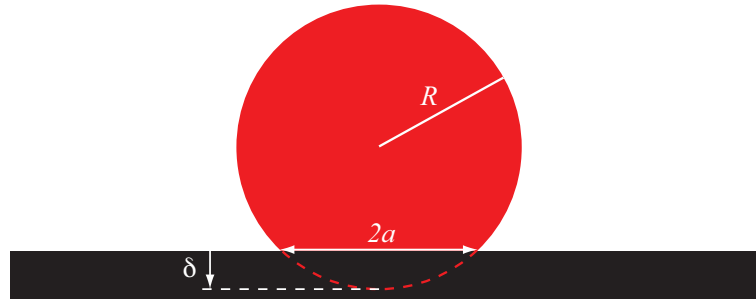


Figure 5: Contacto de Hertz

$$R - \delta = \sqrt{R^2 - a^2}$$

lo cual para  $a \ll R$  da  $\delta \approx a^2/2R$ .

Al aplicar una fuerza  $P$  el esfuerzo generado es  $P/a^2$ , luego podemos utilizar la relación de Thomas Young y decir que  $P/a^2 = E\Delta L/L$ , en donde obviamente esperamos que  $\Delta L = \delta$ ...¿pero que es  $L$ ? La discusión es muy parecida al problema de la compresión de un piso,  $L$  debe ser mayor que  $\delta$  pero menor que  $R$ . La longitud que nos queda es  $a$  y esperamos que la zona afectada por la deformación sea un volumen definido por esta longitud. En conclusión tendremos  $P/a^2 = E\delta/a$ .

La relación geométrica nos permite encontrar

$$P \approx E\delta\sqrt{2\delta R} \sim ER^{1/2}\delta^{3/2}$$

lo cual es sorprendente ya que viola la ley de Hooke. Tenemos un caso en que la relación de Young se cumple localmente (de hecho la usamos) pero globalmente no se cumple dado que la fuerza no es proporcional al desplazamiento.

## Estiramiento de una Cuerda

Otra estimación interesante de realizar es encontrar cuántas hay que estirar una cuerda en una guitarra para que de la frecuencia de oscilación que buscamos. Específicamente la mas alta frecuencia de una cuerda de guitarra clásica debe ser de alrededor de 300 Hz. ¿Cuántas vueltas hay que darle a la clavija para llegar a esta frecuencia?.

La velocidad del sonido en una cuerda es  $c = \sqrt{T/\sigma}$  en donde  $T$  es la fuerza aplicada y  $\sigma$  la densidad por unidad de línea. Esta densidad se puede expresar simplemente como  $\sigma = A\rho$  en donde  $\rho$  es la densidad del material y  $A$  es el área de la sección de la cuerda. Un modo típico de oscilación de frecuencia angular  $\omega$  y vector de onda  $k$  se representa por

$$\begin{aligned}\xi(x, t) = B \sin \omega t \sin kx &= \frac{B}{2} [\cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t)] \\ &= \frac{B}{2} \{ \cos[k(x + ct)] + \cos[k(x - ct)] \}\end{aligned}$$

donde  $c = \omega/k$ . Es decir, una onda estacionaria corresponde a una onda que viaja a la izquierda y otra que viaja hacia la derecha sumada. Tenemos que la frecuencia de la guitarra estara dada por  $f = \omega/2\pi$  y que el vector de onda para el modo mas bajo será  $k = \pi/L$  en donde  $L$  es el largo de la cuerda. Notar que esto permite que la onda sea nula en ambos bordes como es esperado.

La información anterior nos permite determinar el esfuerzo necesario para que se escuche una frecuencia dada. Tenemos que

$$c^2 = \frac{T}{A\rho} = \frac{\omega^2}{k^2} \longrightarrow \frac{T}{A} = \rho(2fL)^2$$

En el caso de una cuerda de nylon que produce la máxima frecuencia de oscilación de  $f = 300$  Hz tenemos que  $L \approx 0.7$  m y  $\rho \approx 1.1 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup> cual entrega un esfuerzo de

$$\frac{T}{A} \approx 0.194 \text{ GPa}$$

Como para el nylon  $E_{\text{Nylon}} \approx 3$  GPa tenemos que la deformación es

$$\frac{\Delta L}{L} \approx 0.06$$

lo que significa un estiramiento de  $0.06 \times 70$  cm  $\approx 4.5$  cm.

## Deformación en una lata de bebida

En este ejemplo vemos el primer ejemplo de diseño estructural. Una lata de bebida tiene que resistir dos esfuerzos: la presión del fluido debido a la gravedad y la presión de la bebida. Un sencillo cálculo muestra que la presión gravitacional es  $\Delta p_g = \rho g H$ . Para  $\rho = 10^3$  kg/m<sup>3</sup>,  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> y  $H = 10$  cm encontramos

$$\Delta p \approx 10^3 \text{ Pa}$$

Sin embargo la diferencia de presión debido a la inyección de gas carbonatado (CO<sub>2</sub>) es para una lata de coca-cola<sup>4</sup> de  $\Delta p \approx 380$  kPa o  $\Delta p \approx 3.8 \times 10^5$  Pa o 3 veces la presión atmosférica.

<sup>4</sup>Ver <http://hypertextbook.com/facts/2000/SeemaMeraaj.shtml>

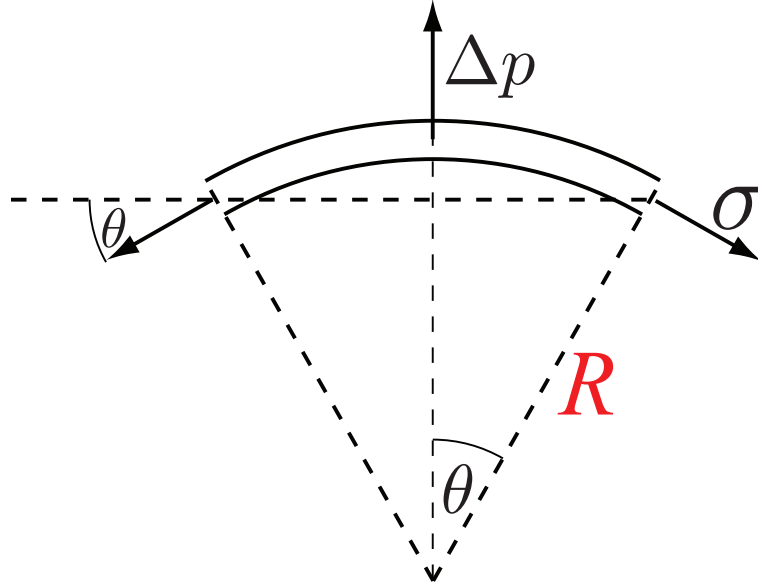


Figure 6: La geometría muestra que se cumple la relación de equilibrio en la dirección vertical  $2(\sigma h) \sin \theta W = \Delta p W (R2\theta)$  donde  $W$  es la longitud en la dirección perpendicular al plano.

Ahora analicemos las condiciones de equilibrio en la lata. La figura muestra que en equilibrio debe ocurrir que

$$\Delta P = \frac{\sigma h}{R}$$

que es la ecuación de Laplace. Esto muestra que el esfuerzo será menor cuando sea mayor el espesor o menor el radio. Para una lata de espesor  $h = 200 \mu\text{m}$  y  $R = 2.5 \text{ cm}$  tenemos que

$$\sigma = \frac{R\Delta P}{h} \approx \frac{2.5 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot 3.8 \times 10^5 \text{ Pa}}{200 \times 10^{-6} \text{ m}} \approx 4.8 \times 10^7 \text{ Pa}$$

La lata es esencialmente acero recubierto de estaño (para evitar oxidación) por lo tanto utilizamos  $E = 210 \text{ GPa}$ . Luego la relación  $\sigma = E\epsilon$  entrega

$$\epsilon \approx \frac{4.8 \times 10^7 \text{ Pa}}{210 \times 10^9 \text{ Pa}} = 2 \times 10^{-4} = 0.02\%$$

lo que muestra que en una estructura se busca deformaciones muy pequeñas. ¿Cuál es el radio de la lata después de la deformación?

La ecuación de Laplace merece comentarios especiales. Es una de las ecuaciones más bellas en física por su simplicidad y la cantidad de información que conlleva:

- Muestra que para una presión dada los esfuerzos serán menores a medida que la curvatura es mayor. Es decir la curvatura da rigidez al material. Esto explica que una de las geometrías mas utilizadas para guardas sistemas a altas presiones sea la cilíndrica.
- Cuando la curvatura es nula o pequeña la ecuación muestra que los esfuerzos son infinitos: ¿cómo se produce el balance de fuerzas?. El sistema crea su propia curvatura para reducir las tensiones en los límites que permite la flexibilidad de un material. Ejemplos: las velas de un barco por acción del viento, el envase de una caja de leche, etc.
- La relación anterior es una primera indicación que estructuras que no tiene curvatura son un caso especial y “difícil” porque necesitan buscar su curvatura.

## Diagrama de Ashby

Vamos a volver a la relación de Hooke donde  $F = kx$  ( $x = \Delta L$ ) y analizar la rigidez desde el punto de vista del diseño. Supongamos que deseamos utilizar un cable en tensión en una estructura el cual queremos que tenga un largo  $L$  y que debido a una fuerza  $F$  no se estire mas que una distancia dada  $\Delta L$  de manera que nos queda libre determinar la sección apropiada de material y el tipo de material que usamos, es decir, las variables son  $A$  y las propiedades materiales.

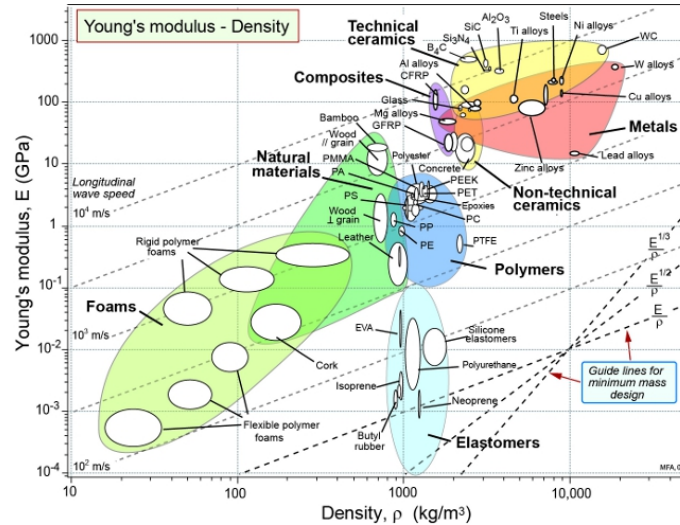


Figure 7: Diagrama de Ashby mostrando en un diagrama de rigidez-densidad los diferentes tipos de material. Al mover  $E/\rho$

Podemos intentar disminuir la sección para utilizar menos material y aligerar el peso del cable como también su costo pero sin sacrificar rigidez, por tanto debe permanecer constante la cantidad  $k = AE/L$ . Como el objeto de nuestra minimización es la masa tenemos que evaluar

$$m = \rho V = \rho AL \rightarrow m = kL^2 \times \frac{1}{E/\rho}$$

esto nos dice que podemos disminuir la masa decreciendo la densidad o incrementando el módulo de Young. Si nuestro sistema no puede soportar mas que una masa  $m_0$  (producto de otros requerimientos) de forma que  $m < m_0$  entonces tenemos que los materiales disponibles quedan por sobre la curva

$$E = \frac{kL^2}{m_0} \times \rho$$



notar que mientras mas se decrece la masa mas nos acercamos a los metales y cerámicas. ¿Podríamos hacerlo de vidrio? Obviamente hay mas consideraciones que incluir y que tienen relación con la resistencia del material y no sólo su deformación.

## Relación Esfuerzo-Deformación: Universalidad

La relación de Thomas Young

$$\sigma = E\epsilon$$

muestra que la curva  $\sigma = \sigma(\epsilon)$  caracteriza al material dado que  $E$  es una propiedad específica. Esta relación se cumple aún cuando la relación deje de ser lineal y la relación sea mucho mas compleja y define lo que se llama curva esfuerzo-deformación del material. La Fig. 8 muestra la curva en el caso del caso del acero (*mild steel*). Lo fundamental es que esta curva es la misma siempre para el mismo material y no depende del tamaño y geometría de la muestra por lo que caracteriza al material. En el caso de la Fig. 8 corresponde a un experimento controlado por desplazamiento (¿Por qué?).

En las siguientes secciones sacaremos mas conclusiones de esta curva.

**FIGURE 7.33** Tensile stress–strain behavior for a plain carbon steel.

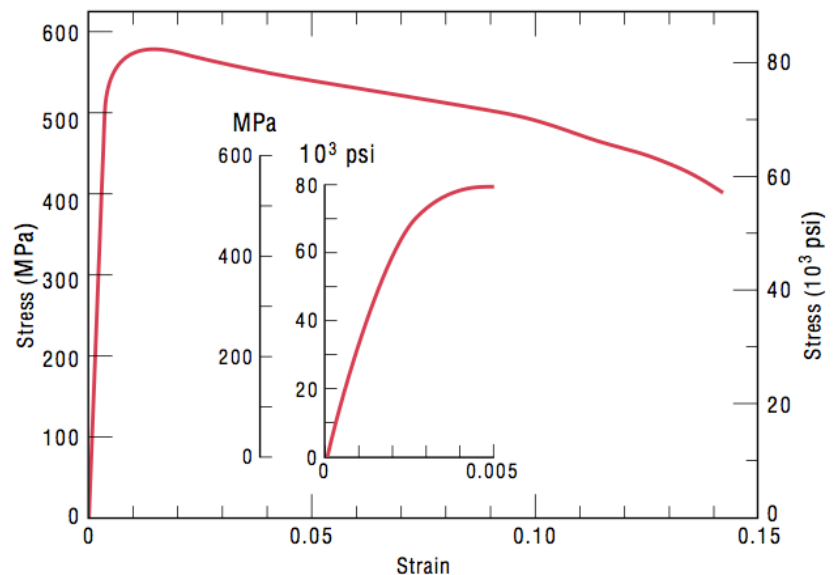


Figure 8: Curva esfuerzo deformación extraída del libro “Fundamentals of Materials Science and Engineering”. La figura pequeña inserta muestra la región lineal que está caracterizada por  $\sigma = E\epsilon$  pero la relación  $\sigma = \sigma(\epsilon)$  es mucho mas complicada.

# Resistencia Final (Strength)

La resistencia de un material fue la primera propiedad en ser estudiada y nada menos que por Galileo quien deseaba saber bajo que condiciones podía ceder una viga en las dos condiciones que se observan en la Fig. ??

La conclusión de Galileo es que en tracción la resistencia de la barra aumenta con la sección  $A$  de la barra y que entonces existe un valor específico de la fuerza dado por  $F/A$  que caracteriza al material. En esta conclusión de paso Galileo define el concepto de esfuerzo en un sólido.

No podemos esperar que al aumentar la carga sobre un material este se siga deformando y respondiendo con una fuerza igual y opuesta, en algún punto el sistema cederá y se romperá. veamos el ejemplo de nuestra jeringa donde la fuerza se puede escribir de manera exacta como

$$\begin{aligned} F &= A(p_0 - p) \\ &= A \left( \frac{C}{V_0^\alpha} - \frac{C}{V^\alpha} \right) \\ &= Ap_0 \left( 1 - \frac{V_0^\alpha}{V^\alpha} \right) \end{aligned}$$

luego

$$\frac{F}{A} = p_0 \left[ 1 - \frac{1}{(1 + \Delta L/L_0)^\alpha} \right]$$

El dibujo nos muestra que la relación entre esfuerzo y deformación es sólo lineal al comienzo y luego comienza a decaer, el módulo de Young efectivo, entendido como la derivada en cada punto es cada vez menor. El sistema es cada vez mas blando y fácil de deformar.

Como podemos ver de la relación anterior existe un esfuerzo para el cual la jeringa no ofrecerá mas resistencia. Esto corresponde al valor  $\sigma_M = p_0$  (esfuerzo final). Esperamos que un comportamiento similar sea observable en cualquier material y llamaremos **resistencia** o en inglés **strength** al valor del esfuerzo para el cual el sistema se rompe.

El valor de la resistencia para varios materiales se puede ver en la tabla adjunta 10. Podemos hacer los siguientes comentarios:

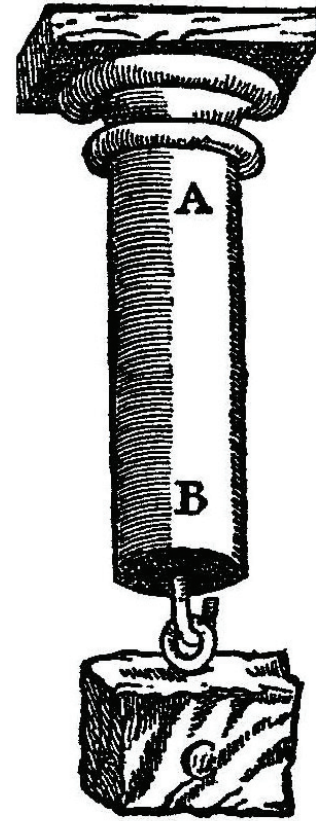


Fig. 1

Figure 9: Esquemas del libro *Diálogo de dos nuevas ciencias* en que se definen los dos experimentos clásicos de Galileo.

### 1.- $E/\sigma_M \sim 10^3$

Existe una diferencia enorme entre la resistencia de un material y su módulo de Young. Por ejemplo para la madera  $E_{\text{Madera}} = 14 \times 10^9$  Pa pero  $\sigma_{\text{Madera}} = 103 \times 10^6$  Pa es decir dos ordenes de magnitud. La diferencia es mas extrema en metales. para el aluminio  $E_{\text{Aluminio}} = 70 \times 10^9$  pero  $\sigma_{\text{Aluminio}} = 70 \times 10^6$  (cast), es decir un factor 1000. Sólo la goma no sigue este comportamiento ya que  $E_{\text{Goma}} = 7 \times 10^6$  Pa y  $\sigma_{\text{Goma}} = 15 \times 10^6$  Pa según *Wikipedia*. Uno puede argumentar (no lo haremos aqui) que la resistencia teórica de un material debe ser del orden de su módulo de Young, luego algo ocurre que nos impide lograr esto en un material<sup>5</sup>

<sup>5</sup>La respuesta es la presencia de cracks en el caso de ruptura frágil y de dislocaciones en el caso de ruptura dúctil. Esto será analizado con mas cuidado mas adelante.

56 Structures		The invention of stress and strain 57	
<p>The strength of a <i>material</i> is the <i>stress</i> (in p.s.i. or MN/m<sup>2</sup> or kgf/cm<sup>2</sup>) required to break a piece of the material itself. It will generally be the same for all specimens of any given solid. We are most often concerned with the tensile strength of materials, which is sometimes called the 'ultimate tensile stress' or U.T.S. This is usually determined by breaking small test-pieces in a testing machine. Naturally, the object of many strength calculations is to</p>			
TABLE 2			
Approximate tensile strengths of various solids			
Material	Tensile strength		
	p.s.i.	MN/m <sup>2</sup>	
<i>Non-metals</i>			
Muscle tissue (fresh but dead)	15	0.1	
Bladder wall ( " " " )	34	0.2	
Stomach wall ( " " " )	62	0.4	
Intestine ( " " " )	70	0.5	
Artery wall ( " " " )	240	1.7	
Cartilage ( " " " )	430	3.0	
Cement and concrete	600	4.1	
Ordinary brick	800	5.5	
Fresh skin	1,500	10.3	
Tanned leather	6,000	41.1	
Fresh tendon	12,000	82	
Hemp rope	12,000	82	
Wood (air dry): along grain	15,000	103	
across grain	500	3.5	
Fresh bone	16,000	110	
Ordinary glass	5,000-25,000	35-175	
Human hair	28,000	192	
Spider's web	35,000	240	
Good ceramics	5,000-50,000	35-350	
Silk	50,000	350	
Cotton fibre	50,000	350	
Catgut	50,000	350	
Flax	100,000	700	
Fibreglass plastics	50,000-150,000	350-1,050	
Carbon-fibre plastics	50,000-150,000	350-1,050	
Nylon thread	150,000	1,050	
<i>Metals</i>			
STEELS			
Steel piano wire (very brittle)	450,000	3,100	
High tensile engineering steel	225,000	1,550	
Commercial mild steel	60,000	400	
WROUGHT IRON			
Traditional	15,000-40,000	100-300	
CAST IRON			
Traditional (very brittle)	10,000-20,000	70-140	
Modern	20,000-40,000	140-300	
OTHER METALS			
Aluminium: cast	10,000	70	
wrought alloys	20,000-80,000	140-600	
Copper	20,000	140	
Brasses	18,000-60,000	120-400	
Bronzes	15,000-80,000	100-600	
Magnesium alloys	30,000-40,000	200-300	
Titanium alloys	100,000-200,000	700-1,400	
<p>predict the strength of a structure from the known strength of its material.</p> <p>The tensile strengths of a good many materials are given in Table 2. As with stiffness, it will be seen that the range of strengths in both biological and engineering solids is very wide indeed. For instance, the contrast between the weakness of muscle and the strength of tendon is striking, and this accounts for the very different cross-sections of muscles and their equivalent tendons. Thus the thick and sometimes bulging muscle in our calves transmits its tension to the bone of our heel, so that we can walk and jump, by means of the Achilles or calcaneal tendon, which, although it is pencil-thin, is generally quite adequate for the job. Again, we can see why engineers are unwise to put tensile forces on concrete unless that weak material is sufficiently reinforced with strong steel rods.</p>			

Figure 10: Resistencia de algunos materiales a partir de J. Gordon.

La gran variabilidad en los valores de resistencia de diversos materiales que abarca un factor 1000 permite calificar un material como **débil** o en inglés **weak** y a otros como **fuerte** o **strong**. El concreto es débil y la madera es mas fuerte que el concreto. La madera es sin embargo débil en su dirección transversal  $\sigma_{\text{Madera}\perp} = 4 \times 10^6$  que se compara a la del concreto<sup>6</sup>.

## 2.- Resistencia en tracción puede ser distinta a resistencia en compresión.

Los valores en las tablas son dados en tracción pero no en compresión. ¿Se romperá el material cuando se aplica el mismo esfuerzo en compresión? NO. La razón de ello está en el mecanismo por el cual un material se rompe en tracción es muy diferente de cuando se rompe en compresión. El caso mas patente es el de una piedra, ladrillo o concreto en

<sup>6</sup>Life's devices

Material	Módulo de Young ( MPa)	Resistencia (MPa)
Madera	14000	103
Vidrio	70000	35-175
Aluminio	70000	70-600
Hierro y Acero	210000	70-3100

Table 1: Comparación entre tablas 3 y 10. En la columna de resistencia se pone el rango posible que se mide en diferentes tipos del mismo material.

que la resistencia es muy baja, del orden de  $\sigma_{\text{Concreto}} = 5 \times 10^6$  Pa. Todo material con una resistencia mayor a 100 MPa debe ser considerado un buen material en tracción según Steven Vogel<sup>7</sup>. El concreto no lo es. No es extraño que en ingeniería la resistencia de un material en tracción sea aproximada como cero. Sin embargo, piedras, ladrillos y concretos son usados para construir nuestras casas y edificios!. La razón es que ellos son utilizados en compresión.

**TABLE 5**  
Some materials with unequal tensile and compression strengths. (These figures are approximate.)

Material	Tensile strength		Compressive strength	
	p.s.i.	MN/m <sup>2</sup>	p.s.i.	MN/m <sup>2</sup>
Wood	15,000	100	4,000	27
Cast iron	6,000	40	50,000	340
Cast aluminium	6,000	40	40,000	270
Zinc die castings	5,000	35	40,000	270
Bakelite, polystyrene and other brittle plastics	2,000	15	8,000	55
Concrete	600	4	6,000	40

Figure 11: Valores de resistencia en tracción y compresión en materiales en que estos valores difieren. Notar que el concreto es 10 veces mas resistente en compresión que en tracción.

### 3.- Buckling

Aún siendo similares los valores de falla por compresión (“crushing force”) a los de tracción en algunos materiales la falla por compresión es producto del efecto de pandeo (“buckling”) mucho antes que por falla en el material. El efecto de pandeo depende de la geometría

<sup>7</sup>Life’s devices

del sistema como fue calculado primero por Euler quien encontró que la compresión crítica está dada por

$$P = k\pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

donde  $k$  depende del tipo de condición en los bordes (ver Fig. 12),  $L$  es el largo de la barra, e  $I$  es el segundo momento de area. Esta fórmula será calculada en la segunda parte de este curso.

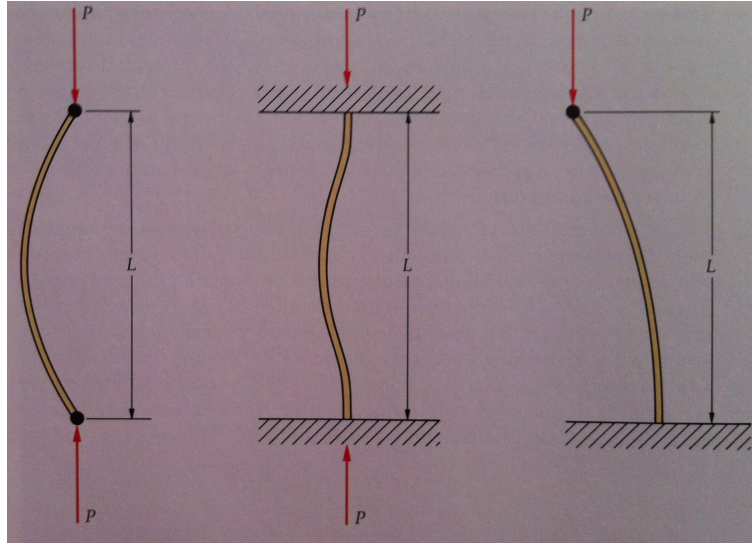


Figure 12: Diferentes condiciones de borde para una barra que se comprime. Simplemente soportada en ambos bordes (hay pivotes en ambos bordes):  $k = 1$ . Empotrada en ambos bordes:  $k = 4$ . Un borde empotrado y el otro simplemente soportado:  $k = 1/4$ .

### Experiencias

1. Tomar un pelo de una persona y medir su seccion luego someterlo a distintos pesos hasta que se rompa. Si la figura 192 MPa está correcta y  $A \approx \pi D^2/4 \approx 3 \times 10^{-9} \text{ m}^2$  ( $D = 60 \mu\text{m}$ ) entonces bastarán 60 grs!.

## 4.- Ruptura Frágil & Ruptura Dúctil

El mecanismo de ruptura de un material está fuera de nuestro alcance todavía. Existen varios mecanismos posibles los cuales se clasifican en dos grandes grupos:

1. Fractura frágil: Está limitada a una región que está cerca de la superficie de ruptura, es decir sólo se modifica la superficie de contacto de las dos partes que resultan de

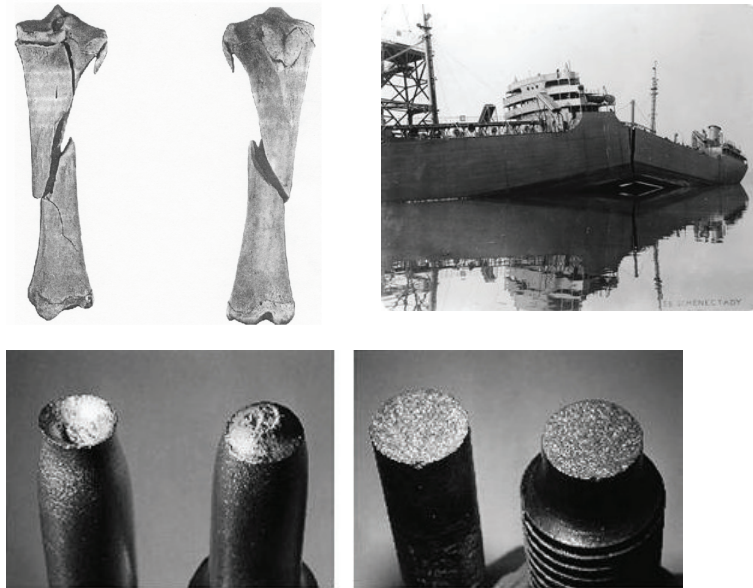


Figure 13: La figura muestra la ruptura frágil de un hueso y de un barco (los famosos “Liberty Ships”). En la segunda fila se ve un metal con los dos tipos de ruptura posible: A la izquierda la ruptura deforma gran parte del material mientras que a la derecha las dos partes se parecen a la muestra antes de la fractura

la fractura. Típicamente se produce en la línea que enfrenta la mayor tracción. El sistema resiste (mas deformación...mas esfuerzo) hasta que se produce la ruptura pero en la región de la curva esfuerzo-deformación en que el sistema es todavía reversible<sup>8</sup> por lo que una vez liberado el sistema las partes vuelven a su estado inicial.

2. Fractura dúctil: Produce una deformación permanente en regiones alejadas a la región de separación. Ejemplo de ello es la deformación plástica o cuello previa a la ruptura o las líneas de banda que son observadas en un metal como el aluminio cuando este es traccionado. Típicamente se produce en la línea que produce el mayor cizalle. El sistema resiste (mas deformación...mas esfuerzo) hasta que comienza a fluir a una cierta fuerza produciendo el cuello u otro tipo de defecto extensivo en el material.

Intimamente ligado a estas formas de ruptura está la forma de la curva esfuerzo deformación. En la siguiente sección analizamos diferentes tipos de curva.

---

<sup>8</sup>Esto no implica que sea en la parte lineal. Pensar en un globo por ejemplo, funciona reversiblemente y la ruptura puede ser frágil cuando se pincha.



## Experiencias

1. Estudiar la fractura en un cable de soldar. Al romper se observa un cuello.

## Estimaciones

### Diagrama de Ashby.

Se propone diseñar una barra que funciona en tracción de paro  $L = 2$  m que sea capaz de soportar una carga no mayor a  $F_0 = 100$  kg. Se desea además que no se estire mas de  $\Delta L_0 = 2$  mm y que no tenga una masa mayor a  $m_0 = 2$  kg.

En este problema las variables a encontrar son las propiedades materiales  $\rho$ ,  $E$  y  $\sigma_M$  junto con la sección de la barra  $A$ . Para comenzar veamos la rigidez, deseamos que para una carga dada  $F$  el desplazamiento sea menor a  $\Delta L$ , esto es

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L} \longrightarrow \Delta L = \frac{FL}{EA} < \Delta L_0$$

como el peor caso es para  $F = F_0$  entonces

$$\frac{F_0 L}{EA} < \Delta L_0$$

o en términos de diseño el requerimiento es  $F_0 L / \Delta L_0 < EA$ , es decir debe ser lo suficientemente gruesa o rígida.

Analizemos ahora la resistencia. No debe romperse para una fuerza menor a  $F_0$ , por tanto en el peor caso

$$\frac{F_0}{A} < \sigma_M$$

esto indica que la condición de diseño es  $F_0 < \sigma_M A$ . Hay que buscar una sección suficientemente grande o de gran resistencia.

Veamos ahora el peso y/o masa del elemento. La masa del elemento es dada por

$$m = \rho AL$$

luego si se requiere que  $m < m_0$  entonces  $m_0 / L > \rho A$  lo que se obtiene bajando la densidad y la sección, lo que se opone a las condiciones de rigidez y resistencia. Las condiciones a satisfacerse son dos

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{\rho L} > A > \frac{F_0 L}{E \Delta L_0} &\longrightarrow \frac{E}{\rho} > \frac{F_0 L^2}{\Delta L_0 m_0} \approx 2 \times 10^6 \text{Pa m}^3/\text{kg} = 2 \text{MNm}/\text{kg} \\ \frac{m_0}{\rho L} > A > \frac{F_0}{\sigma_M} &\longrightarrow \frac{\sigma_M}{\rho} > \frac{F_0 L}{m_0} \approx 2 \times 10^3 \text{Pa m}^3/\text{kg} = 2 \times \text{kNm}/\text{kg} \end{aligned}$$

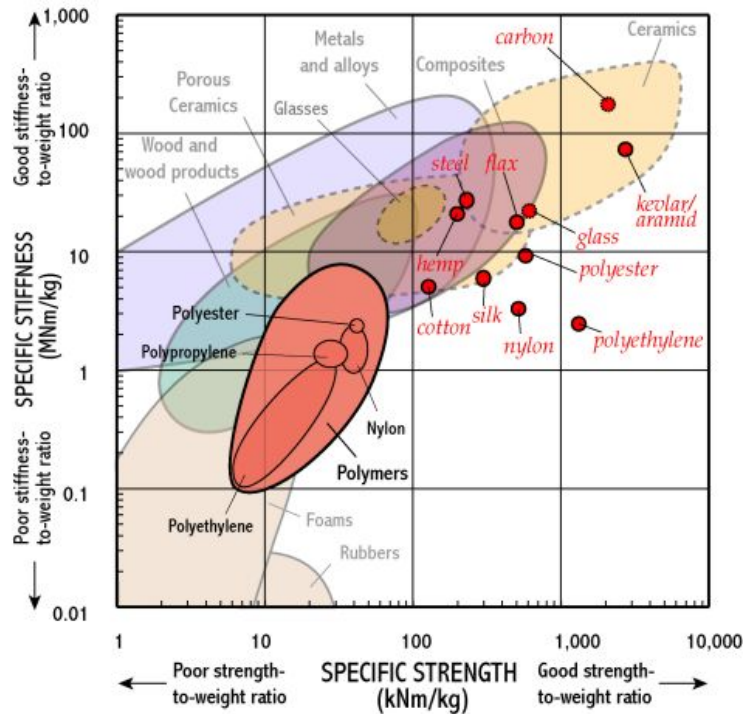


Figure 14: Rigidez específica & Resistencia específica para diferentes tipos de materiales.

La Fig. 14 resume las propiedades de resistencia final y rigidez en una tabla que tiene como variables la rigidez específica  $E/\rho$  y la resistencia específica  $\sigma_M/\rho$ . Es posible observar la gran variabilidad de propiedades y comparar diversos materiales. Podemos ver que una gran cantidad de materiales satisfacen nuestros requerimientos pero el número es menor si disminuimos la masa, aumentamos la carga, o disminuimos el desplazamiento permitido. Una observación interesante es que materiales orgánicos como la madera se entrecruzan con los metales: son menos fuertes pero al dividir por su densidad son comparables. Esto explica que muchas estructuras sean hechas de madera, fibras como el algodón, lino, etc.

### La ruptura de una lata de bebida.

Como vimos anteriormente la ecuación de Laplace determina el equilibrio en el interior de una lata de bebida

$$\Delta P = \frac{h\sigma}{R}$$

¿Cuál es la presión máxima que puede soportar una lata de bebida? Para responder esto utilizamos  $\sigma = \sigma_M \approx 400 \text{ MPa}$  y encontramos para  $2R = 5 \text{ cm}$  y  $h = 200 \mu\text{m}$  el valor

$$\Delta P = \frac{200 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot 400 \times 10^6 \text{ Pa}}{2.5 \times 10^{-2} \text{ m}} = 3.2 \times 10^6 \text{ Pa} \approx 32 \text{ atm}$$

lo que es un factor 10 superior a lo que se pide en su uso.

### Cuadro...basado en una historia real

Se desea colgar un cuadro de dimensiones bastante grandes  $L = 2 \text{ m}$  y ancho  $a = 1 \text{ m}$ , con un peso  $P = 10 \text{ kg}$  para lo cual el marco cuenta en su línea media ( $a/2$ ) con dos puntos de enganche. En dicha línea se debe pasar un alambre de acero comercial que sostenga el cuadro a un clavo puesto en la pared. Necesitamos determinar el largo del alambre y su grosor.

Por simple geometría podemos ver (ver figura) que la tensión de la cuerda para sostener el clavo es  $2T \sin \theta = P$ . Por otra parte el largo del alambre está dado por  $\ell = L / \cos \theta$  luego la tensión es

$$T = \frac{P}{2 \sin \theta} = \frac{P}{2 \sqrt{1 - L^2/\ell^2}}$$

de lo cual es obvio que nos conviene un cable lo mas largo posible para disminuir la tensión. Hay un problema estético: no queremos que se vea el cable ni el clavo cuando colguemos el cuadro luego el mayor valor de  $\theta$  posible es tal que  $\tan \theta = W/L$ . Lo anterior fija el largo a

$$\ell = L \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{L^2 + W^2}$$

y la tensión a

$$T = \frac{P \sqrt{1 + \tan^2 \theta}}{2 \tan \theta} = \frac{P \sqrt{L^2 + W^2}}{2W} = 5\sqrt{5} \text{ kg}$$

Veamos ahora el grosor del cable. Para acero comercial  $\sigma A = T$  donde  $\sigma = 400 \text{ MPa}$ , luego  $A = T/\sigma$  lo que para una sección circular da

$$\pi D^2/4 = \frac{5\sqrt{5} \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2}{400 \times 10^6 \text{ Pa}} \rightarrow D \approx 0.6 \text{ mm}$$



# Elasticidad Lineal

## 0.1 Ecuaciones de Equilibrio

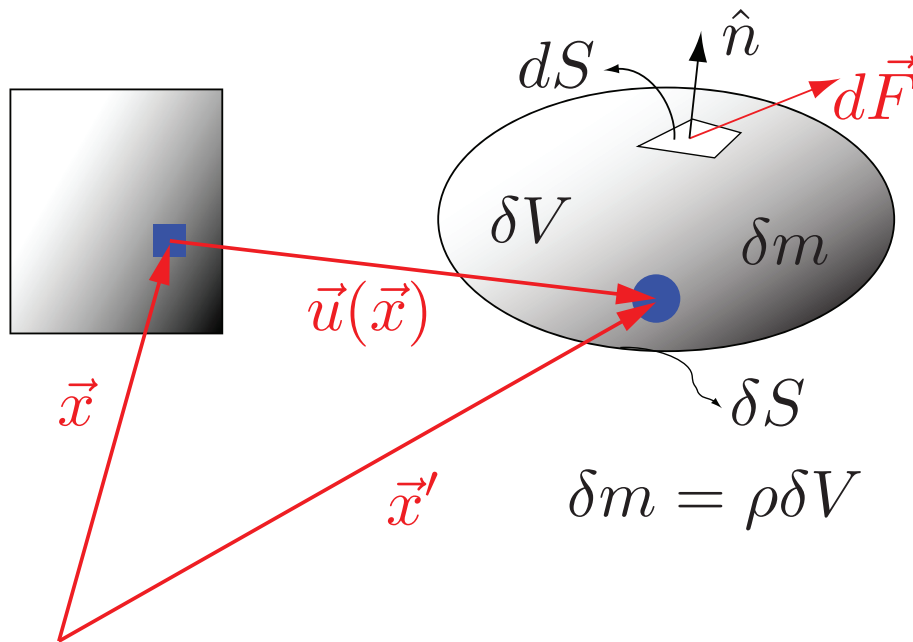


Figure 15: Fuerza sobre un elemento de superficie de un *punto material*.

Como todo sistema en el continuo uno espera que la fuerza sobre un elemento de superficie  $\delta S$  pueda escribirse como (ver Fig. 15)

$$d\vec{F} = \vec{T}(\hat{n})dS$$

es decir es proporcional al tamaño de la superficie. En este caso  $\vec{T}$  es la *fuerza por unidad de area aplicada sobre la superficie*. Se puede demostrar que sólo 9 elementos determinan la función  $\vec{T}(\hat{n})$  los cuales definen el tensor de esfuerzos  $\sigma_{ij}$

$$T_i(\hat{n}) = \sigma_{ij}\hat{n}_j$$

La demostración en standard y se debe conocer de cursos previos.

Por ejemplo, para un objeto cuya cara lateral tiene la normal apuntando según  $\hat{n} = \hat{x}$ , tenemos que lo anterior es

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x = 1 \\ n_y = 0 \\ n_z = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix}$$

esto es la función  $\vec{t}(\hat{n})$  es

$$\vec{T}(\hat{x}) = \sigma_{xx}\hat{x} + \sigma_{xy}\hat{y} + \sigma_{xz}\hat{z} \longrightarrow T_i(\hat{x}) = \sigma_{xi}$$

Es importante notar que

- La fuerza en la dirección normal a la superficie con  $\hat{n} = \hat{x}$  es  $\sigma_{xx}$  y que

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} > 0 &\longrightarrow \text{Tracción} \\ \sigma_{xx} < 0 &\longrightarrow \text{Compresión} \end{aligned}$$

- Las fuerzas  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_{yz}$  son fuerzas tangenciales y se llaman cizalles.
- El tensor de esfuerzos es una matriz simétrica  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Esta es una propiedad general de los medios continuos y surge de eliminar la aparición de torques aplicados sobre un punto material.

## Balance de Fuerzas

Si consideramos el balance de fuerzas en un elemento muy pequeño de masa  $\delta m$  o *punto material*<sup>9</sup> podemos escribir su ecuación de movimiento usando la 2da ley de Newton como

$$\delta m \vec{a} = \oint_{\delta S} d\vec{F} + \delta V \vec{f}$$

donde  $\vec{f}$  es la fuerza por unidad de volumen. El término integral se puede escribir como

$$\oint_{\delta S} d\vec{F}_i = \oint_{\delta S} \sigma_{ij} n_j dS = \oint_{\delta V} \nabla_j \sigma_{ij} dV \approx \nabla'_j \sigma_{ij} \delta V$$

donde  $\nabla'_j = \partial/\partial x'_j$  con lo que finalmente la ecuación de movimiento es

$$\delta m a_i = \nabla'_j \sigma_{ij} \delta V + \delta V f_i \longrightarrow \rho a_i = \nabla'_j \sigma_{ij} + f_i \quad (1)$$

En equilibrio y sin fuerzas de cuerpo tenemos la ecuación

$$\nabla'_j \sigma_{ij} = 0$$

Las siguientes observaciones son importantes respecto de lo anterior

<sup>9</sup>Esto es equivalente al concepto de *partícula de fluido* en Mecánica de Fluidos.

- La deducción anterior es completamente general. El punto crítico es poder suponer que las hipótesis del continuo son una buena aproximación.
- En la deducción se supone que

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\vec{r}', t)$$

en que  $\vec{r}'$  corresponde a las coordenadas eulerianas del punto, es decir las coordenadas actuales del objeto.

## 0.2 Relaciones Esfuerzo-Deformación

### Elasticidad

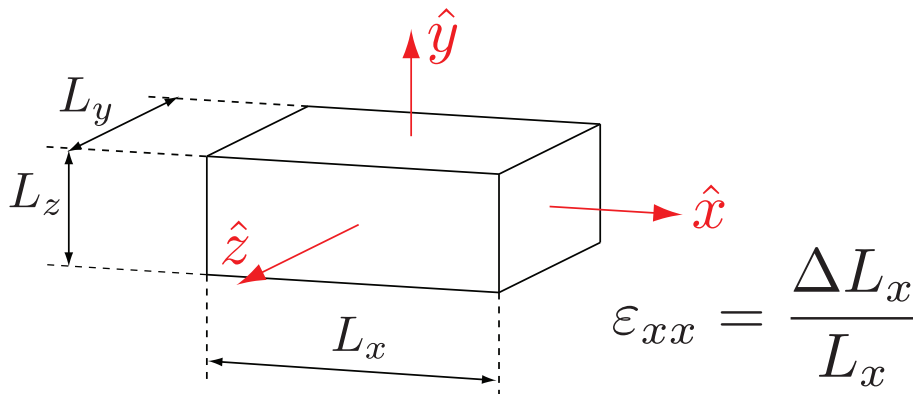


Figure 16: El experimento de Young en nueva notación.

Utilizando nuestra definición de esfuerzos podemos escribir el experimento de Young de otra manera como se muestra en Fig. 16

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx}$$

donde  $\epsilon_{xx} \equiv \Delta L_x / L_x$

### Coefficiente de Poisson

Cuando estiramos la barra esta se contrae en la dirección  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$ . Este efecto fue cuantificado por Poisson mediante las siguientes relaciones

$$\frac{\Delta L_y}{L_y} = \frac{\Delta L_z}{L_z} = -\nu \frac{\Delta L_x}{L_x}$$

donde  $\nu$  es el **coeficiente de Poisson**. Lo que también puede ser escrito como

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu\varepsilon_{xx}$$

### *Experiencia*

1. Realizar un experimento con una banda elástica.

Fue Thomas Young quien primero se interesó en este efecto. Se preguntó cómo se producía cambio focal en el ojo y su explicación fue que la contracción y relajación de los músculos que rodean el cristalino<sup>10</sup> hacen que haya una contracción lateral si se hace una tracción y una expansión si el músculo se relaja. Obviamente la longitud focal es  $f \sim \text{Radio de Curvatura}$  por lo que la tracción aumenta el radio y permite ver a mayor distancia.

Los valores del coeficiente para algunos materiales típicos se ven en las tablas de las Figs. 17 y 18 es interesante resaltar el valor del corcho que es muy cercano a  $\nu \approx 0$ . Esto explica su uso, es fácil de introducir en una botella dado que al comprimir el corcho contra la boca de la botella este no se expande lateralmente.

Aunque se puede demostrar que la estabilidad de un sistema requiere que  $\nu < 1/2$  existen materiales biológicos que están arriba de ese valor. Al contraer la musculatura se produce una gran expansión de la musculatura que refleja un coeficiente de Poisson cercano a  $\nu \approx 1$ .

Otro ejemplo interesante es el de un material textil cuando se tracciona en dirección del corte en bias o en dirección de las fibras. En el primer caso el coeficiente es  $\nu \approx 1$  mientras que en el segundo caso  $\nu \approx 0$  dado que no hay transmisión lateral de la deformación.

Podemos ver que es te coeficiente tiene un efecto directo en el cambio de volumen con la deformación. Tenemos que

$$\begin{aligned} V' &= (L_x + \Delta L_x)(L_y + \Delta L_y)(L_z + \Delta L_z) \\ &= L_x L_y L_z + L_x L_y L_z \left( \frac{\Delta L_x}{L_x} + \frac{\Delta L_y}{L_y} + \frac{\Delta L_z}{L_z} \right) \\ &= V(1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \end{aligned}$$

donde  $V'$ =Volumen después de la deformación y  $V$ =Volumen antes de la deformación. Para el experimento de Young tenemos que

$$V' = V(1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = V(1 + \varepsilon_{xx} - \nu\varepsilon_{xx} - \nu\varepsilon_{xx}) = V[1 + (1 - 2\nu)\varepsilon_{xx}]$$

Luego

- Si  $\nu = 0$  no hay efecto lateral y en extensión se aumenta el volumen. En contracción el volumen en cambio disminuye.

---

<sup>10</sup>Estos músculos son concéntricos al cristalino



## Poisson's ratio values for different materials

material ↕	poisson's ratio ↕
rubber	~ 0.50
gold	0.42
saturated clay	0.40–0.50
magnesium	0.35
titanium	0.34
copper	0.33
aluminium-alloy	0.33
clay	0.30–0.45
stainless steel	0.30–0.31
steel	0.27–0.30
cast iron	0.21–0.26
sand	0.20–0.45
concrete	0.20
glass	0.18–0.3
foam	0.10–0.40
cork	~ 0.00
auxetics	negative

Figure 17: Valores típicos obtenidos de Wikipedia [http://en.wikipedia.org/wiki/Poisson's\\_ratio](http://en.wikipedia.org/wiki/Poisson's_ratio) :

- Si  $\nu = 1/2$  no hay cambio de volumen y el sistema es incompresible.
- Si  $\nu > 1/2$  el sistema disminuye su volumen en extensión. Este valor sin embargo sólo se ve en sistemas no isotrópicos. En contracción el volumen en cambio aumenta.

### Deformación Triaxial

Supongamos que aplicamos un esfuerzo según  $\hat{x}$ , por lo visto anteriormente la deformación será

$$\Delta L_x = L_x \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

Si luego hacemos lo mismo sobre la dirección  $\hat{y}$  y suponemos que las deformaciones son aditivas el efecto de poisson hará cambiar el largo  $L_x$ . El nuevo largo es

$$\Delta L_x = L_x \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu L_x \varepsilon_{yy}$$

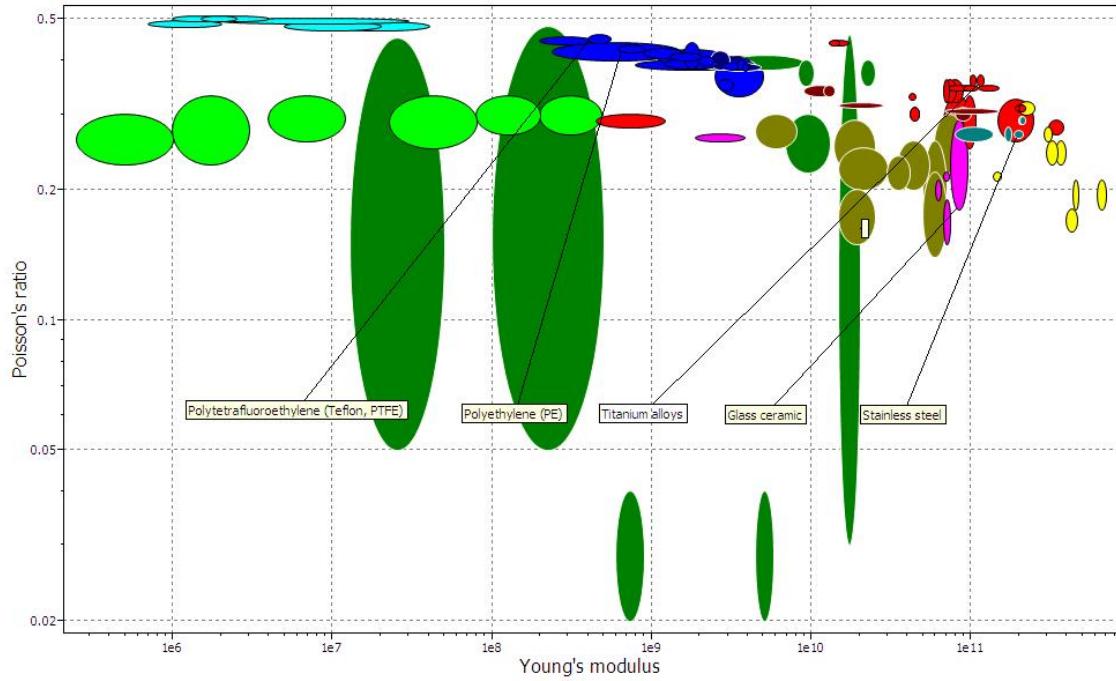


Figure 18: Coeficiente de Poisson versus rigidez en diferentes materiales

$$= L_x \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu L_x \frac{\sigma_{yy}}{E}$$

Notar que en el último paso se podría argumentar que no es cierto que  $\sigma_{yy} = E\varepsilon_{yy}$  dado que existe un esfuerzo aplicado  $\sigma_{xx}$  y la relación de Young es sólo aplicable cuando las caras laterales están libres. Pero suponemos que las deformaciones se pueden superponer y luego sumar el resultado final.

Si repetimos lo mismo para una tracción aplicada según  $\hat{z}$  vemos que

$$\begin{aligned} \Delta L_x &= L_x \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu L_x \frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu L_x \frac{\sigma_{zz}}{E} \\ \rightarrow \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \end{aligned} \quad (2)$$

Notar que

- Hemos supuesto que el sistema no cambia sus propiedades cuando actuamos en diferentes direcciones, es decir el sistema es *isótropo*.
- El principio de superposición es fundamental. Este se aplica porque las relaciones esfuerzo-deformación son lineales.

Al repetir los argumentos sobre el lado de longitud  $L_y$  y  $L_z$  obtenemos relaciones similares a (2). El resultado final es

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]\end{aligned}\quad (3)$$

Que también se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})] \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})]\end{aligned}\quad (4)$$

y que revela la conveniencia de utilizar las relaciones strain-stress en vez de las relaciones stress-strain para construir las relaciones constitutivas.

## Módulo de Compresibilidad

Si aplicamos una presión constante sobre un sólido en forma de paralelepípedo como en la Fig 16 tendremos que en la cara que apunta según  $\hat{x}$  el esfuerzo será

$$\sigma_{xx}\hat{x} + \sigma_{yx}\hat{y} + \sigma_{zx}\hat{z} = -p\hat{x}$$

luego debe ocurrir que los cizalles son nulos en esa cara y que  $\sigma_{xx} = -p$  en la cara. Si repetimos el argumento en las otras caras tendremos que  $\sigma_{yy} = -p$  en la cara que apunta según  $\hat{y}$  y  $\sigma_{zz} = -p$  en la cara que apunta según  $\hat{z}$ . Podemos preguntarnos si la solución  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$  es una solución en todas partes del cuerpo y comprobar que es cierto dado que una presión constante es solución automática de  $\nabla_j \sigma_{ij} = 0$ .

En general no importa la forma del objeto, si en las caras tenemos la condición

$$\sigma_{ij}\hat{n}_j|_{\text{Superficie}} = -p\hat{n}_i$$

vemos que esto se satisface si en todas partes  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$  donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. En conclusión una presión hidrostática genera un tensor de esfuerzos homogéneo en el cuerpo. ¿Qué ocurre con la deformación?

Si evaluamos este esfuerzo en nuestras relaciones esfuerzo deformación (3) encontramos que

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{1-2\nu}{E}p$$

**Table 3 Isothermal bulk moduli and compressibilities at room temperature**

After K. Gschneidner, Jr., *Solid State Physics* 16, 275–426 (1964); several data are from F. Birch, in *Handbook of physical constants*, Geological Society of America Memoir 97, 107–173 (1966). Original references should be consulted when values are needed for research purposes. Values in parentheses are estimates. Letters in parentheses refer to the crystal form. Letters in brackets refer to the temperature:

[a] = 77 K; [b] = 273 K; [c] = 1 K; [d] = 4 K; [e] = 81 K.

Bulk modulus in units  $10^{12}$  dyn/cm<sup>2</sup> or  $10^{11}$  N/m<sup>2</sup>  
Compressibility in units  $10^{-12}$  cm<sup>2</sup>/dyn or  $10^{-11}$  m<sup>2</sup>/N

H (a)																	He (d)				
0.002																	0.00				
500																	1168				
Li	Be															B	C (d)	N (a)	O	F	Ne (d)
0.116	1.003															1.78	4.43	0.012			0.010
8.62	0.997															0.562	0.226	80			100
Na	Mg															Al	Si	P (b)	S (c)	Cl	Ar (a)
0.068	0.354															0.722	0.988	0.304	0.178		0.013
14.7	2.82															1.385	1.012	3.29	5.62		79
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga (b)	Ge	As	Se	Br	Kr (a)				
0.032	0.152	0.435	1.051	1.619	1.901	0.596	1.683	1.914	1.86	1.37	0.598	0.569	0.772	0.394	0.091		0.018				
31	6.58	2.30	0.951	0.618	0.526	1.68	0.594	0.522	0.538	0.73	1.67	1.76	1.29	2.54	11.0		56				
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn (c)	Sb	Te	I	Xe				
0.031	0.116	0.366	0.833	1.702	2.725	(2.97)	3.208	2.704	1.808	1.007	0.467	0.411	1.11	0.383	0.230						
32	8.62	2.73	1.20	0.587	0.366	(0.34)	0.311	0.369	0.553	0.993	2.14	2.43	0.901	2.61	4.35						
Cs	Ba	La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg (e)	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn				
0.020	0.103	0.243	1.09	2.00	3.232	3.72	(4.18)	3.55	2.783	1.732	0.382	0.359	0.430	0.315	(0.26)						
50	9.97	4.12	0.92	0.50	0.309	0.269	(0.24)	0.282	0.359	0.577	2.60	2.79	2.33	3.17							
Fr	Ra	Ac	Ce (c)	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu					
(0.020)	(0.132)	(0.25)	4.18	0.239	0.306	0.327	(0.35)	0.294	0.147	0.383	0.399	0.384	0.397	0.411	0.397	0.133	0.411				
(50)	(7.6)	(4.)	4.18	4.18	3.27	3.06	(2.85)	3.40	6.80	2.61	2.51	2.60	2.52	2.43	2.52	7.52	2.43				
			Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr					
			0.543	(0.76)	0.987	(0.68)	0.54														
			1.84	(1.3)	1.01	(1.5)	1.9														

Figure 19: Módulo de compresibilidad  $K$  y coeficiente de compresibilidad  $1/K$  de materiales sólidos puros extraídos del libro de Kittel “Solid State Physics”.

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{1-2\nu}{E}p$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{1-2\nu}{E}p$$

luego el cambio de volumen será

$$V' = V(1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = V\left(1 - 3(1-2\nu)\frac{p}{E}\right)$$

es decir encontramos como varía el volumen con la presión. Esto nos permite encontrar el módulo de compresibilidad o **bulk modulus** a temperatura constante definido en termodinámica como

$$K = -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$$

Tenemos que

$$\Delta V = -3V(1-2\nu)\frac{\Delta p}{E}$$

donde  $\Delta V = V' - V$  y  $\Delta p = p - 0$  por lo que

$$\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{E}{3V(1-2\nu)} \longrightarrow K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (5)$$

Vemos que la relación entre el módulo de Young y la incompresibilidad depende críticamente del coeficiente de Poisson. Si  $3(1-2\nu) < 1$  o  $\nu > 1/3$  tenemos que  $K > E$  y para el caso  $\nu = 1/2$  el módulo será muy grande: el sistema es incompresible. Para el caso  $\nu < 1/3$  tenemos que  $K < E$ , por ejemplo  $\nu = 0$  da  $K = E/3$ . Finalmente para  $\nu \approx 1/3$  tendremos que  $K \approx E$  por lo que materiales con ese coeficiente de Poisson permite no distinción entre  $K$  y  $E$ . Por ejemplo, para el aluminio tenemos  $\nu \approx 0.33$  por lo que ambos valores deben coincidir. Para el módulo de Young tenemos en tabla de Fig. 3 que  $E = 70$  GPa por lo que no debemos esperar que  $K$  sea muy diferente: la tabla en Fig. 19 muestra que el aluminio tiene un módulo de compresibilidad  $K = 0.722 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup> o 72.2 GPa.

La mayor parte de los metales tienen  $\nu \approx 1/3$  por lo que su módulo de Young son parecidos. El oro es mas interesante  $\nu \approx 0.42$  y  $E = 77$  GPa en tablas pero con este valor de  $\nu$  encontramos

$$K \approx 2E$$

lo que comprobamos en la tabla periódica donde  $K \approx 173$  GPa.

(The formula  $\beta=3\alpha$  is usually used for solids.)<sup>[7]</sup>

Material	Linear coefficient, $\alpha$ , at 20 °C ( $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ )	Volumetric coefficient, $\beta$ , at 20 °C ( $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ )	Notes
Aluminium	23	69	
Benzocyclobutene	42	126	
Brass	19	57	
Carbon steel	10.8	32.4	
Concrete	12	36	
Copper	17	51	
Diamond	1	3	
Ethanol	250	750 <sup>[8]</sup>	
Gallium(III) arsenide	5.8	17.4	
Gasoline	317	950 <sup>[7]</sup>	
Glass	8.5	25.5	
Glass, borosilicate	3.3	9.9	
Gold	14	42	
Indium phosphide	4.6	13.8	
Invar	1.2	3.6	
Iron	11.8	33.3	
Kapton	20 <sup>[9]</sup>	60	DuPont Kapton 200EN
Lead	29	87	
MACOR	9.3 <sup>[10]</sup>		
Magnesium	26	78	
Mercury	61	182 <sup>[11]</sup>	
Molybdenum	4.8	14.4	
Nickel	13	39	
Oak	54 <sup>[12]</sup>		Perpendicular to the grain
Douglas-fir	27 <sup>[13]</sup>	75	radial
Douglas-fir	45 <sup>[13]</sup>	75	tangential
Douglas-fir	3.5 <sup>[13]</sup>	75	parallel to grain
Platinum	9	27	
PVC	52	156	
Quartz (fused)	0.59	1.77	
Quartz	0.33	1	
Rubber	77	231	
Sapphire	5.3 <sup>[14]</sup>		Parallel to C axis, or [001]
Silicon Carbide	2.77 <sup>[15]</sup>	8.31	
Silicon	3	9	
Silver	18 <sup>[16]</sup>	54	
Sital	0.15 <sup>[17]</sup>	0.45	
Stainless steel	17.3	51.9	
Steel	11.0 ~ 13.0	33.0 ~ 39.0	Depends on composition
Titanium	8.6		
Tungsten	4.5	13.5	
Water	69	207 <sup>[11]</sup>	
YbGaGe	$\approx 0$	$\approx 0$ <sup>[18]</sup>	

Figure 20: Valores del coeficiente de expansión lineal y volumétrico.

### Coefficiente de Expansión Térmica

Al calentar un sólido a una temperatura  $T$  mayor que la temperatura ambiente  $T_0$  se expande de forma tal que podemos escribir

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \alpha_l(T - T_0) \\ \varepsilon_{yy} &= \alpha_l(T - T_0) \\ \varepsilon_{zz} &= \alpha_l(T - T_0)\end{aligned}$$

donde  $\alpha_l$  es el coeficiente de expansión térmica lineal y como se ve tiene dimensiones de  $\Theta^{-1}$ . La expansión se supone igual en todas las direcciones cuando el material es isótropo pero estos valores pudieran ser diferentes en cada dirección. Notar que esta deformación debemos agregarla a la producida por esfuerzos por lo que las ecuaciones (3) son ahora

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \alpha_l \Delta T + \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{yy} &= \alpha_l \Delta T + \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{zz} &= \alpha_l \Delta T + \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]\end{aligned}\tag{6}$$

donde  $\Delta T = T - T_0$ . El coeficiente de expansión térmica volumétrico se define en termodinámica por

$$\alpha_v = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

luego veamos como se relaciona con el coeficiente de expansión lineal. Para un objeto sometido a una presión constante en sus bordes los esfuerzos  $\sigma_{ij} = -p\delta_j$  solucionan las ecuaciones de equilibrio luego queda

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \alpha_l \Delta T - \frac{1 - 2\nu}{E} p \\ \varepsilon_{yy} &= \alpha_l \Delta T - \frac{1 - 2\nu}{E} p \\ \varepsilon_{zz} &= \alpha_l \Delta T - \frac{1 - 2\nu}{E} p\end{aligned}$$

y luego el cambio de volumen es

$$\begin{aligned}V' &= V(1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = V \left( 1 + 3\alpha_l \Delta T - 3(1 - 2\nu) \frac{p}{E} \right) \\ &\rightarrow \Delta V = V 3\alpha_l \Delta T - 3(1 - 2\nu) \frac{\Delta p}{E}\end{aligned}$$

donde  $\Delta V = V' - V$ ,  $\Delta p = p$ . Esto implica que

$$\alpha_v = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = 3\alpha_l$$

Los valores de  $\alpha_l$  para diversos materiales se pueden ver en tabla de Fig. 20 donde se ve que hay variaciones en 3 ordenes de magnitud. Dentro de los sólidos los valores mas grandes lo tienen los polímeros (goma, PVC, etc) y los mas bajos las cerámicas (quartz, sitall, etc.). Otra cosa que llama la atención es lo bajo de los valores ya que todos están multiplicados por la potencia  $10^{-6}$ , pero eso es engañoso como se puede ver del siguiente ejemplo: si una barra de acero se confina dentro de un material con un pequeño coeficiente de expansión térmica tenemos que se pueden producir esfuerzos importantes en el material. Para analizar este caso conviene expresar las relaciones (6) de manera inversa

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{E}{3(1-2\nu)}\alpha_v\Delta T + \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})] \\ \sigma_{yy} &= -\frac{E}{3(1-2\nu)}\alpha_v\Delta T + \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})] \\ \sigma_{zz} &= -\frac{E}{3(1-2\nu)}\alpha_v\Delta T + \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})] \end{aligned} \quad (7)$$

Como la barra está constreñida dentro de un sistema que no se deforma entonces  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0$  luego los esfuerzos son

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -K\alpha_v\Delta T$$

es decir son compresivos y sensibles a los cambios de temperatura. Para un metal  $K \approx E$  y  $\Delta T \approx 30^\circ$  en un cambio día noche, por tanto las deformaciones que se observan son del orden de

$$\alpha_v\Delta T \approx 30 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \times 30 \text{ }^\circ\text{C} \approx 1 \times 10^{-3} \approx 0.1\%$$

es decir corresponde a las deformaciones permitidas en aplicaciones de ingeniería por lo cual deben ser tomadas en cuenta.

---



## 0.3 Cizalle

### Introducción

En su libro “Why things don’t fall down” J.E. Gordon pone muy en claro la situación del cizalle dentro de lo ya aprendido en el capítulo “The mysteries of shear and torsion”. ¿Por qué es necesario el concepto de cizalle si con los de compresión y tracción ya tenemos suficiente? Un argumento mas refinado es el siguiente: al ser el esfuerzo una matriz simétrica sabemos que puede ser diagonalizable. Esto es, existe una rotación tal que la matriz

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

luego los elementos no diagonales pueden siempre entenderse como una combinación de elementos diagonales que actúan en lo que se conoce como **direcciones principales**. Podríamos siempre trabajar en ejes principales para poder así utilizar nuestros resultados esfuerzo deformación encontrados en secciones anteriores y entonces discutir en términos de tracciones y compresiones. Luego de nuevo, ¿Por qué es necesario el concepto de cizalle si con los de compresión y tracción ya tenemos suficiente?

La típica representación de un cizalle es dada por desplazar por dos fuerzas opuestas a un elemento, que uno espera que lo deforme como se indica<sup>11</sup>. Usando los argumentos de Hooke se espera que la fuerza tangencial aplicada  $\sigma_{xy}$  produzca una deformación angular  $\phi$  que se puede escribir

$$\sigma_{xy} = \mu\phi$$

donde  $\mu$  es el módulo de cizalle. De aquí podemos hacer varias observaciones

- Al deformar el punto A está mas cerca del punto D y el punto B mas alejado del punto D. Luego a 45° una diagonal está en compresión y la otra en compresión. El cizalle en estas *direcciones principales* es la combinación de una compresión y una tracción. Esto explica que un cizalle aplicado a una superficie delgada genera un patrón de arrugas o *wrinkling* (ver Fig. 21); en una dirección el sistema se patea producto de la compresión y en el otro no porque está en tracción. Obviamente esto no se ve cuando el espesor es mas grueso de la misma forma que no se ve el patea de una barra si se aumenta el espesor.
- Al traccionar un material los átomos se separan y en el caso de un material frágil esta separación produce ruptura cuando el esfuerzo local es del orden del esfuerzo teórico de ruptura (Griffiths!!). El cizalle produce un mecanismo distinto de deformación,

---

<sup>11</sup>Mas adelante analizaremos con mas cuidado esta distribución de esfuerzos porque obviamente mas fuerzas se requieren para que el elemento esté en equilibrio

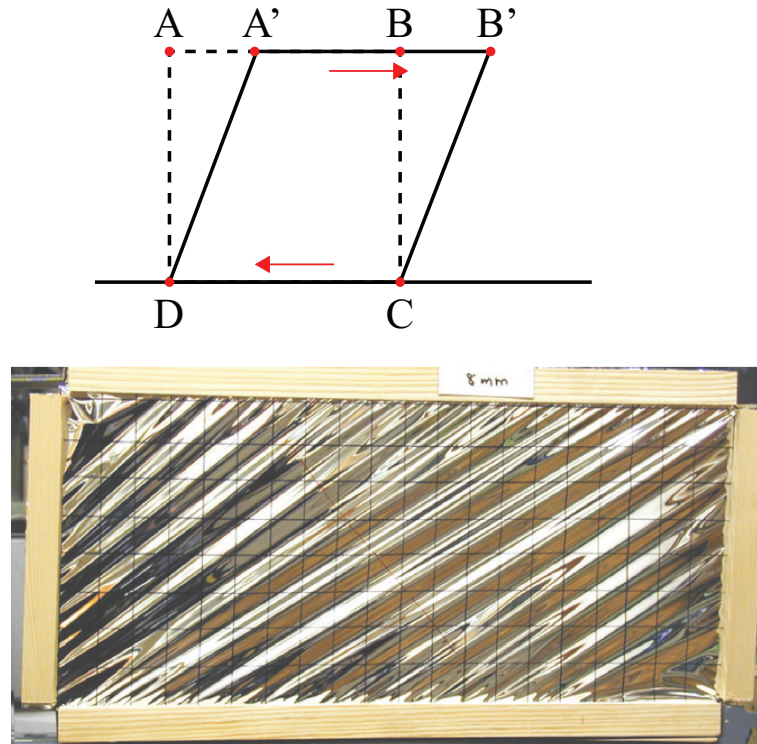


Figure 21: Arriba: Deformación en cizalle para un elemento de forma cuadrada en donde debido a la aplicación de una fuerza tangencial la distancia AC se acorta y la distancia BD se alarga. Abajo: en una película delgada el cizalle produce plegamiento con una dirección preferencial.

como se ve de la figura los átomos tienden a deslizar: en un comienzo un plano de átomos se desplaza sobre otro de forma reversible (región de respuesta elástica) pero a partir de una deformación crítica se produce un *deslizamiento* de un plano sobre otro tal como ocurre al desplazar un mazo de cartas. Un material dúctil se ruptura de esta manera pero el mecanismo preciso es algo mas intrincado<sup>12</sup>

### *Experiencia*

1. Doblar un pedazo de tiza para mostrar que se rompe perpendicular al eje. Luego torcer un pedazo de tiza para mostrar la ruptura helicoidal.
2. Tomar un filamento de metal y romperla en tracción para ver la forma de la ruptura.

<sup>12</sup>Asi como la ruptura en tracción requiere de defectos o *cracks*, la *ruptura dúctil* requiere también de la ayuda de defectos...pero distintos.

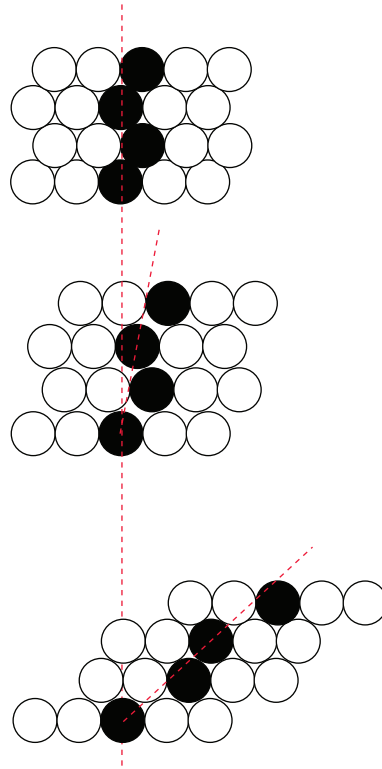


Figure 22: La figura muestra el mecanismo de ruptura por deslizamiento (sin mediación de defectos). A partir de una deformación crítica se rompe la conexión entre dos átomos y un plano cristalino desliza sobre otro.

Al torcer un material se produce un campo de esfuerzos complicado que requiere conocer en qué dirección se produjo la máxima tracción. La dirección de corte nos muestra que esta se produce aproximadamente a  $45^\circ$  del eje de la tiza.

Mientras nuestra comprensión de la fractura frágil es bastante acabada, no ocurre lo mismo con la fractura dúctil. Como discutimos anteriormente un material dúctil al romperse muestra un efecto mucho más extendido de la deformación. En un metal esto se entiende porque tiende a deformarse por la línea de máximo cizalle. Cualquiera de estas líneas cruzan diagonalmente el material lo que indica una alteración global de este y la disipación de una gran cantidad de energía. Esta forma de ruptura permite explicar el cuello que se observa en metales cuando estos se rupturan.

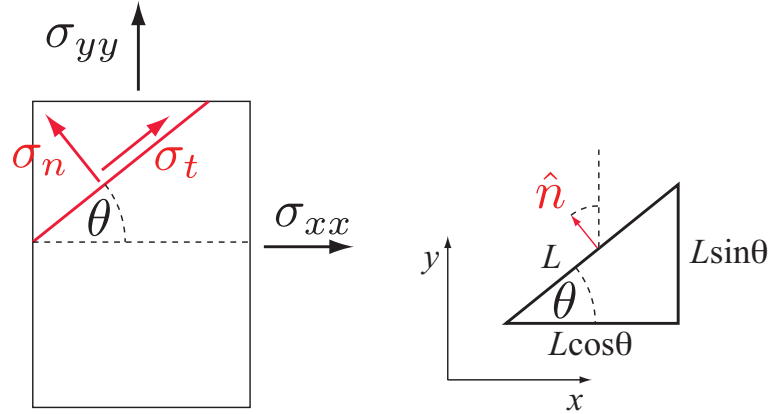


Figure 23: Diagonalización de la matriz de esfuerzos en 2 dimensiones.

### Diagrama de Mohr

En vez de seguir el procedimiento normal de diagonalización vamos a reducirnos a estudiar el problema en el plano (suponemos nulos  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xz}$ , y  $\sigma_{yz}$ ) y estudiamos el equilibrio del sistema en la figura. Si aplicamos esfuerzos normales en las caras con orientación  $\hat{x}$  ( $\sigma_{xx}$ ) e  $\hat{y}$  ( $\sigma_{yy}$ ) y nos preguntamos por la fuerza normal y tangencial para otra superficie cualquiera del sistema con normal  $\hat{n}$ , esto puede ser obtenido siguiendo los pasos dados en la figura. En equilibrio tendremos que

$$\sigma_{xx}L \sin \theta \hat{x} - \sigma_{yy}L \cos \theta \hat{y} + \sigma_n \hat{n} + \sigma_t \hat{t}$$

Notar que  $\sigma_t$  es positivo si apunta en la dirección  $\hat{n} \times \hat{z}$ . Esto coincide con nuestra definición de  $\sigma_{xy}$  pero no con nuestra definición de  $\sigma_{yx}$ . La misma figura muestra que

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \cos \theta \hat{t} - \sin \theta \hat{n} \\ \hat{y} &= \sin \theta \hat{t} + \cos \theta \hat{n}\end{aligned}$$

Obtenemos que

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{2}(\sigma_{yy} + \sigma_{xx}) + \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \cos 2\theta \\ \sigma_t &= 0 + \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin 2\theta\end{aligned}$$

Lo cual se representa en lo que se conoce como diagrama de Mohr en Fig. 24: es un círculo de radio  $(\sigma_{yy} - \sigma_{xx})/2$  centrado en el punto  $[(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2, 0]$ . Una cosa notable que se obtiene visualmente del círculo de Mohr es que siempre los máximos esfuerzos de tracción y compresión están en las líneas principales y a  $90^\circ$  uno de otros. Esto indica que en Fig. 21

la máxima compresión coincide con la dirección transversal de los pliegues (ya que ella es la causante de la deformación) y la máxima tracción debe estar a  $90^\circ$  en dirección de los pliegues, es decir los pliegues muestran las direcciones principales del esfuerzo.

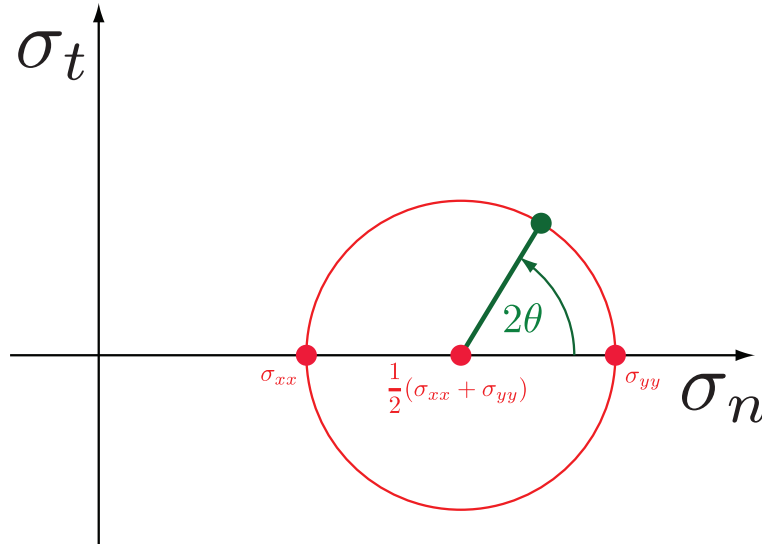


Figure 24: Representación de los esfuerzos en un diagrama de Mohr.

¿Qué ocurre si  $\sigma_{yy} < \sigma_{xx}$ ? Ese no es problema porque lo que nos interesa es encontrar las direcciones  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$  luego está construido para encontrar esas direcciones. Por tanto podemos siempre definir  $\hat{y}$  en la dirección de máxima tracción y  $\sigma_{yy} > \sigma_{xx}$ . Esto se verá mas claramente en los ejemplos.

### Tracción

En este caso podemos reconstruir los pasos que llevan a la Fig. 25:

1. La cara A  $\sigma_n = \sigma$  y  $\sigma_t = 0$  y esto constituye el punto A  $[\sigma, 0]$  en la figura.
2. La cara B  $\sigma_n = 0$  y  $\sigma_t = 0$  y esto constituye el punto B  $[0, 0]$  en la figura.
3. Sólo existe un círculo que pase por estos 2 puntos, A y B, y que además tenga su centro en el eje horizontal. Construimos entonces el diagrama de Mohr.

Podemos ver lo que ocurre en otras direcciones. Según el diagrama a un ángulo  $2\theta = \pi/2$  o  $\theta = \pi/4$  en contra de los punteros del reloj se llegará a la cara 1 la cual tendrá el máximo cizalle y será positivo. Igualmente a  $2\theta = \pi$  respecto de 1 se verá otra cara con máximo cizalle y será negativo. Esto permite reconstruir el diagrama de fuerzas para un elemento rectangular que está  $45^\circ$  rotado del original (ver Fig. 25 en color verde).

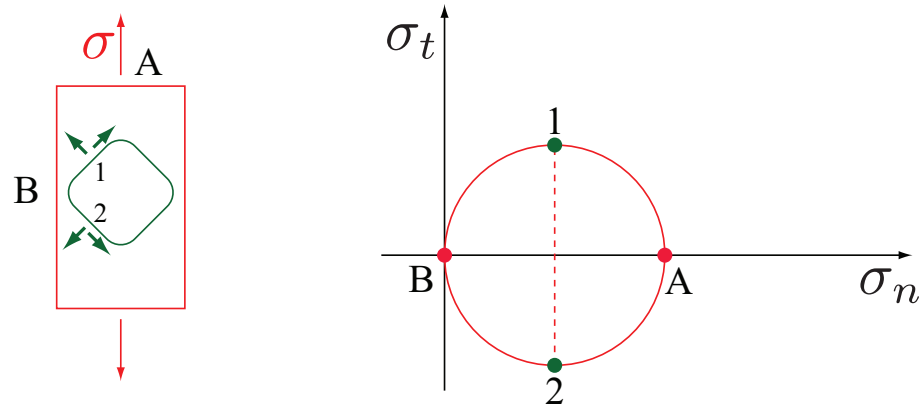


Figure 25: Diagrama de Mohr para tracción uniaxial.

Notar lo fácil que es obtener valores del diagrama: si el radio del círculo es  $\sigma/2$  entonces el máximo cizalle es  $\sigma/2$ . En conclusión:

- Una tracción uniaxial produce un cizalle y su valor máximo es de  $\sigma/2$ .
- Una tracción puede generar una ruptura por cizalle.

### Tracción Pura

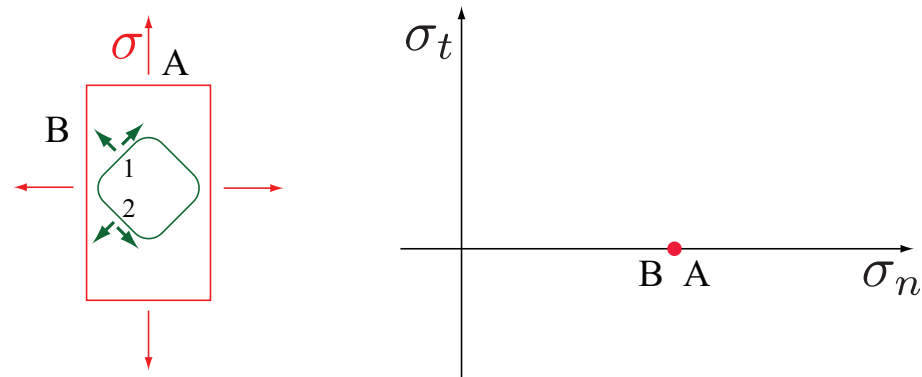


Figure 26: Diagrama de Mohr para tracción pura.

En este caso vemos que

1. La cara A  $\sigma_n = \sigma$  y  $\sigma_t = 0$  y esto constituye el punto A  $[\sigma, 0]$  en la figura.
2. La cara B  $\sigma_n = \sigma$  y  $\sigma_t = 0$  y esto constituye el punto B  $[\sigma, 0]$  en la figura.

- Sólo existe un círculo que pase por estos 2 puntos, A y B, y que además tenga su centro en el eje horizontal. En este caso es un punto.

En conclusión:

- No hay ninguna dirección en que haya cizalle.
- En todas direcciones se siente la misma tracción.
- La ruptura sólo se puede producir por ruptura frágil.

### Cizalle Puro

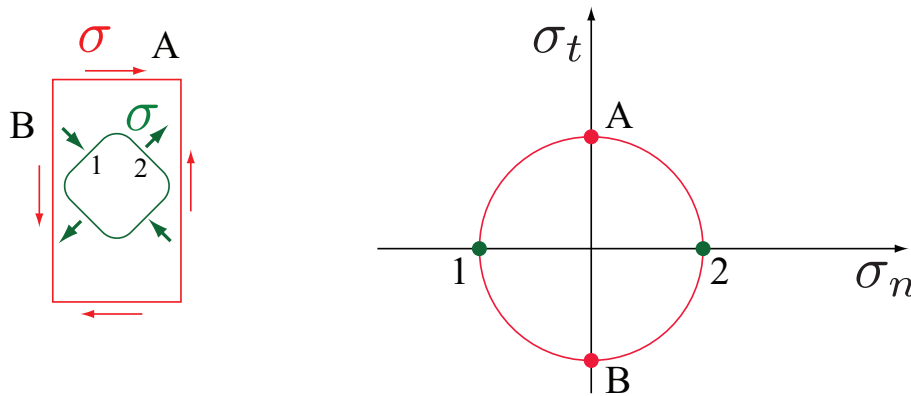


Figure 27: Diagrama de Mohr para un cizalle puro.

Este caso es el mas interesante, vemos que

- La cara A  $\sigma_n = 0$  y  $\sigma_t = \sigma$  y esto constituye el punto A  $[0, \sigma]$  en la figura.
- La cara B  $\sigma_n = 0$  y  $\sigma_t = -\sigma$  y esto constituye el punto B  $[0, -\sigma]$  en la figura.
- Sólo existe un círculo que pase por estos 2 puntos, A y B, y que además tenga su centro en el eje horizontal. En este caso es un círculo que pasa por el origen.

Al examinar el diagrama concluimos que

- Hay una dirección a  $2\theta = \pi/2$  o  $\theta = \pi/4$  de la cara A en que sólo hay compresión (de valor  $\sigma$ ) y otra a  $2\theta = -\pi/2$  o  $\theta = -\pi/4$  donde sólo hay tracción (de valor  $\sigma$ )<sup>13</sup>.

<sup>13</sup>Para evitar ángulos negativos se puede utilizar la cara B: hay una dirección a un ángulo  $\theta = \pi/4$  de la cara B donde sólo hay tracción.

- Existe un elemento rectangular que corresponde a una rotación de  $45^\circ$  del original en que no hay cizalle.
- La ruptura se puede producir por ruptura frágil o dúctil.

### Cizalle-Deformación

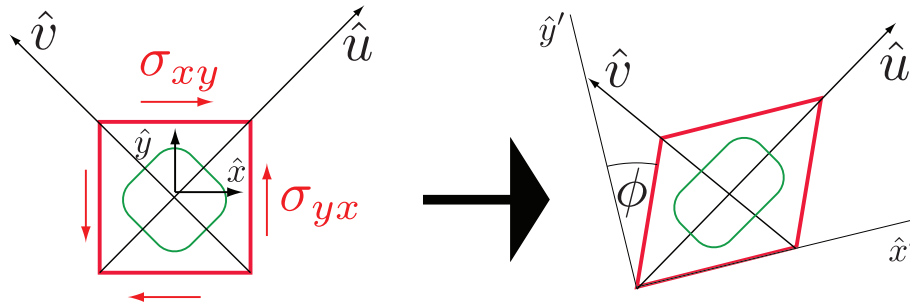


Figure 28: Definición del ángulo de cizalle.

Cuando se aplica un cizalle a un elemento rectangular como el de la Fig. 28 vemos que el eje de las  $y$  se acerca al eje de las  $x$ . Uno puede definir el ángulo de cizalle indistintamente como

$$\phi = \text{Ángulo que el eje } \hat{y} \text{ se acerca al eje } \hat{x} = \text{Ángulo que el eje } \hat{x} \text{ se acerca al eje } \hat{y}$$

y esperamos que para pequeña deformación se cumpla una relación lineal entre el cizalle aplicado y el ángulo de cizalle

$$\sigma_{xy} = \mu \phi$$

donde  $\mu$  es el **módulo de cizalle**. Como explicamos en un comienzo este no es un efecto distinto del estudiado en secciones anteriores debido a que cualquier deformación se puede llevar a ejes principales donde hay tracciones y/o compresiones puras. Es decir  $\mu$  debiera poder ser expresado en función de las constantes elásticas definidas anteriormente.

En la Fig. 28 vemos que mientras los ejes  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$  rotan y se acercan los ejes  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$  que están a  $45^\circ$  no cambian debido a que en esas direcciones sólo se tracciona y comprime. En esas direcciones podemos escribir las relaciones (3) como

$$\begin{aligned}\varepsilon_{uu} &= \frac{1}{E}[\sigma_{uu} - \nu(\sigma_{vv} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{vv} &= \frac{1}{E}[\sigma_{vv} - \nu(\sigma_{uu} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{uu} + \sigma_{vv})]\end{aligned}$$



Como suponemos que  $\sigma_{zz} = 0$  en nuestro análisis vemos que la deformación  $\varepsilon_{zz}$  es completamente esclava de lo que ocurre en el plano  $u - v$ . Además conocemos los esfuerzos en direcciones  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$  dado nuestro diagrama de Mohr donde encontramos

$$\begin{aligned}\sigma_{uu} &= \sigma_{xy} \\ \sigma_{vv} &= -\sigma_{xy}\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\varepsilon_{uu} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xy} \equiv \gamma \\ \varepsilon_{vv} &= -\frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xy} = -\gamma\end{aligned}$$

es decir la diagonal en la dirección  $\hat{u}$  de la figura se estira en  $\gamma \times$  largo inicial y la diagonal en dirección  $\hat{v}$  de la figura se comprime en  $-\gamma \times$  largo inicial. Tenemos todos los ingredientes geométricos para calcular el ángulo de cizalle  $\phi$ .

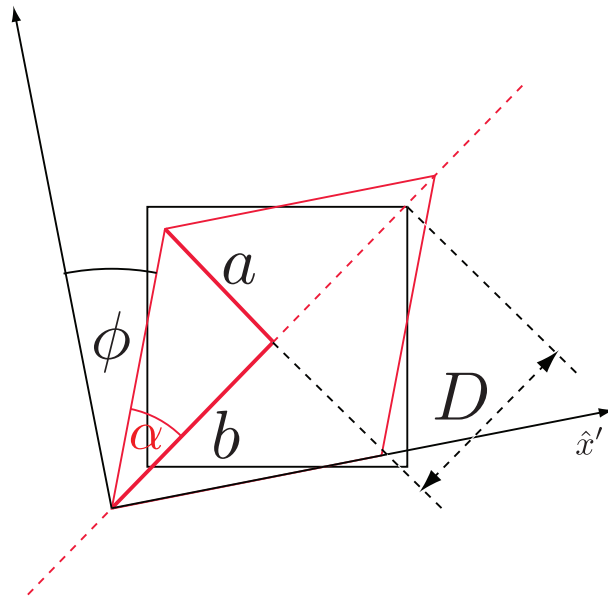


Figure 29: Geometría para capturar el ángulo de cizalle.

En efecto, la Fig. 29 muestra lo recién planteado para un cuadrado de diagonal de largo  $2D$ . de la figura vemos que

$$\frac{a}{b} = \tan \alpha$$

pero  $2\alpha + \phi = \pi/2$  luego

$$\frac{a}{b} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$$

Ahora aplicamos nuestro resultado anterior sobre el valor después de la deformación de las diagonales  $a$  y  $b$

$$\begin{aligned} a &= D - \gamma \times D \\ b &= D + \gamma \times D \longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \end{aligned}$$

La identidad trigonométrica  $\tan(\theta_1 + \theta_2) = (\tan \theta_1 + \tan \theta_2)/(1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2)$  permite escribir

$$\begin{aligned} \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} &= \frac{1 - \tan \frac{\phi}{2}}{1 + \tan \frac{\phi}{2}} \longrightarrow \gamma = \tan \frac{\phi}{2} \\ &\longrightarrow \gamma \approx \frac{\phi}{2} \end{aligned}$$

donde como estamos bajo el supuesto que la deformación es pequeña, es decir  $\gamma \ll 1$  entonces la última igualdad es directa. Para completar recordamos la definición de  $\gamma$  y encontramos

$$\frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xy} = \frac{\phi}{2} \longrightarrow \sigma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \phi$$

luego encontramos lo que buscábamos: el modulo de cizalle es

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \phi \longrightarrow \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (8)$$

### Deformación de cizalle

Vamos a definir

$$\varepsilon_{xy} \equiv \frac{\phi}{2} \longrightarrow \sigma_{xy} = \frac{E}{(1 + \nu)} \varepsilon_{xy}$$

es decir  $2\varepsilon_{xy}$  es el ángulo que rota  $\hat{x}$  hacia  $\hat{y}$  o viceversa. Notar lo simétrico de la relación lo que hace que evidentemente  $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$  y que permite escribir consistentemente

$$\sigma_{yx} = \frac{E}{(1 + \nu)} \varepsilon_{yx}$$

Igualmente podemos encontrar en otras direcciones

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{(1 + \nu)} \varepsilon_{yz}$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E}{(1 + \nu)} \varepsilon_{xz}$$

donde

$\varepsilon_{yz}$  = Angulo que el eje  $\hat{y}$  rota sobre el eje  $\hat{z}$ .

$\varepsilon_{xz}$  = Angulo que el eje  $\hat{x}$  rota sobre el eje  $\hat{z}$ .

y similarmente para  $\sigma_{zy}$ ,  $\sigma_{zx}$ , etc.

### Relaciones Generales Esfuerzo-Deformación

Finalmente hemos completado nuestras relaciones esfuerzo-deformación. Estas son incluyendo expansión térmica

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left[ \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{ll} \delta_{ij} \right] + K \alpha_v \Delta T \delta_{ij} \quad (9)$$

y

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{ll} \delta_{ij}] + \frac{\alpha_v}{3} \Delta T \delta_{ij} \quad (10)$$

donde  $K = E/3(1 - 2\nu)$ . Las relaciones esfuerzo deformación automáticamente se trasladan a otros sistemas de coordenadas ortogonales dado que el único requerimiento es ese: nuestro elemento inicial debe ser un "paralelógramo"<sup>14</sup>

**Coordenadas Cilíndricas:** Si utilizamos coordenadas cilíndricas primero definimos el tensor de esfuerzos colocando todas las fuerzas que actúan sobre un elemento como se muestra en Fig. 30. Igualmente podemos definir las 6 deformaciones  $\{\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{\theta z}\}$  y podemos definir por simetría  $\{\varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{\theta z}\}$  para definir la matriz de esfuerzos y deformaciones las cuales satisfacen (9) y (10). Explícitamente

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})] + \frac{\alpha_v}{3} \Delta T \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})] + \frac{\alpha_v}{3} \Delta T \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})] + \frac{\alpha_v}{3} \Delta T \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{r\theta}; \quad \varepsilon_{rz} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{rz}; \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{\theta z} \end{aligned} \quad (11)$$

y expresiones análogas para  $\{\varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{\theta z}\}$ .

<sup>14</sup>El efecto de Poisson está definido transversalmente a la dirección de tracción, es decir en la dirección ortogonal. Igualmente eso ocurre con los esfuerzos que producen esas deformaciones.

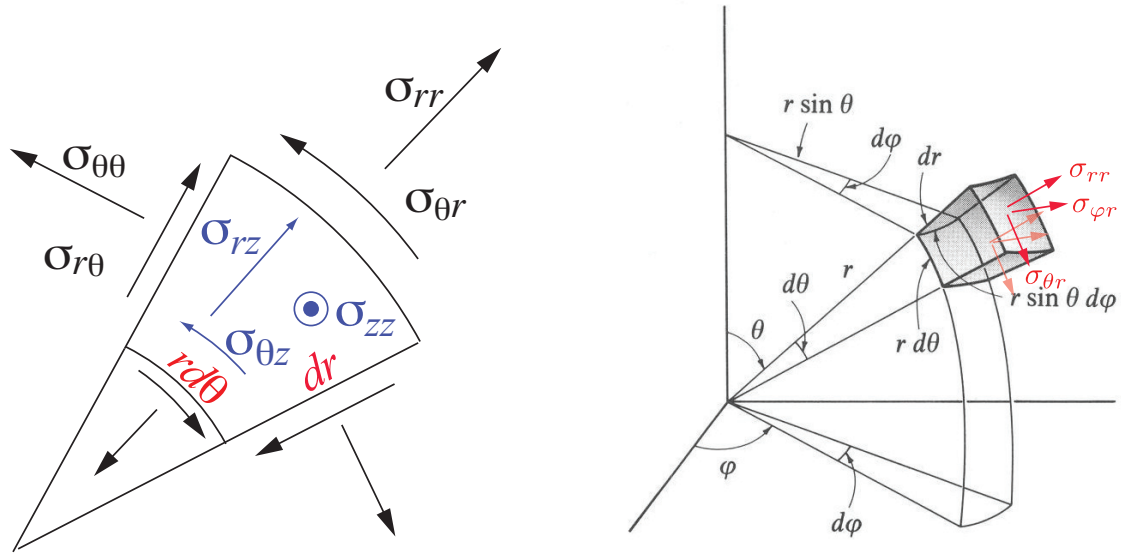


Figure 30: Esfuerzo en coordenadas cilíndricas (izquierda) y esféricas (derecha).

**Coordenadas Esféricas:** El análisis es similar. De la Fig.. 30 concluimos que las relaciones deformación esfuerzo son

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi})] + \frac{\alpha_v}{3} \Delta T \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi})] + \frac{\alpha_v}{3} \Delta T \\
 \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\varphi\varphi} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})] + \frac{\alpha_v}{3} \Delta T \\
 \varepsilon_{r\theta} &= \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{r\theta}; \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{r\varphi}; \quad \varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{\theta\varphi}
 \end{aligned} \tag{12}$$

## 0.4 Relaciones Deformación-Desplazamiento

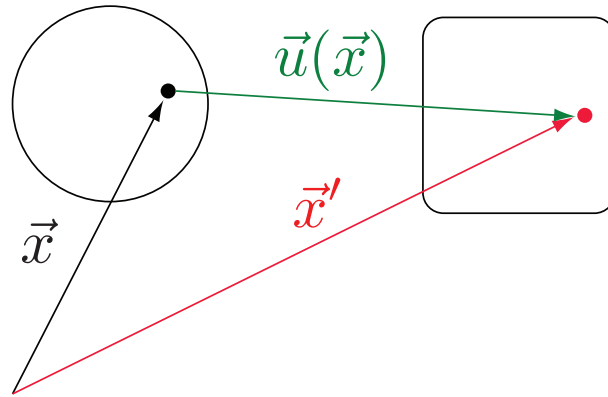


Figure 31: Hipótesis fundamental en medios continuos: a cada punto en el objeto inicial le corresponde sólo un punto en el objeto deformado.

La hipótesis fundamental en medios continuos es que el cambio de un punto  $\vec{x}$  en un objeto se puede escribir como una transformación biyectiva

$$\vec{x}' = \vec{x}'(\vec{x}, t) = \vec{x} + \vec{u}(\vec{x}, t)$$

donde  $\vec{u}$  se conoce como función desplazamiento. Si la deformación no depende del tiempo y el sistema queda en equilibrio por las fuerzas aplicadas tendremos la transformación

$$\vec{x}' = \vec{x}'(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{u}(\vec{x})$$

Vamos a utilizar la función desplazamiento para expresar matemáticamente las cantidades en el plano:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{L'_x - L_x}{L_x} = \text{Deformación en la dirección } \hat{x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{L'_y - L_y}{L_y} = \text{Deformación en la dirección } \hat{y}$$

$$2\varepsilon_{xy} = \text{Angulo que el eje } \hat{x} \text{ se acerca al eje } \hat{y}$$

para después construir estas cantidades geométricas en cualquier otra dirección.

Veamos el caso uniaxial que hemos estudiado desde los comienzos del curso. Tenemos que a cada punto  $x$  de la barra se le da un punto  $x' = x + u_x(x)$  cuando se aplica una fuerza  $\vec{F}$  como se indica en la Fig. 32. De aquí vemos que un elemento longitudinal  $\Delta x = x_2 - x_1$  se estira una distancia

$$x'(x_2) - x'(x_1) = [x_2 + u_x(x_2)] - [x_1 + u_x(x_1)]$$

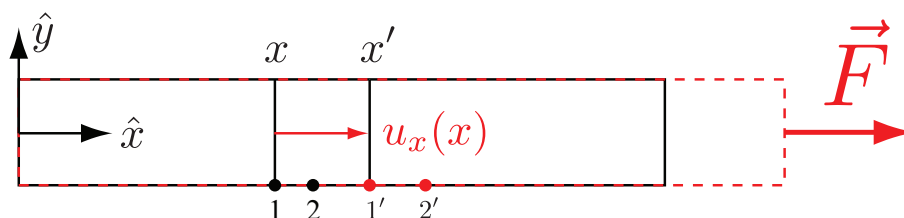


Figure 32: Deformación para el caso uniaxial. Se supone que el borde de la izquierda se mantiene fijo en  $x = 0$  y el sistema se deforma sólo en dirección del eje horizontal.

$$\begin{aligned} x'(x_2) - x'(x_1) &= [\Delta x + u_x(x_1 + \Delta x) - u_x(x_1)] \\ \Delta x' &\approx [\Delta x + \nabla_x u_x(x) \Delta x] \end{aligned}$$

donde  $\Delta x' = x'(x_2) - x'(x_1)$ . Luego la deformación de ese pedacito será

$$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{[\Delta x + \nabla_x u_x(x) \Delta x] - \Delta x}{\Delta x} = \nabla_x u_x$$

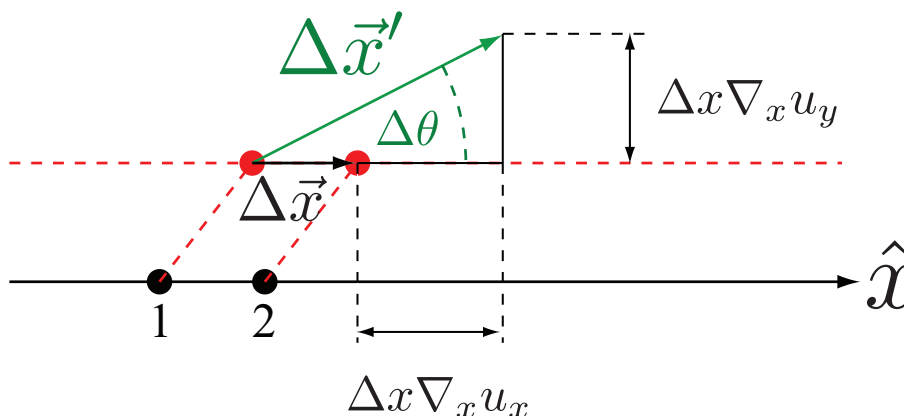


Figure 33: Deformación de un elemento horizontal  $\Delta \vec{x} = \Delta x \hat{x}$ . El nuevo elemento es  $\Delta \vec{x}'$  el cual corresponde a un estiramiento según  $\hat{x}$  y una rotación hacia  $\hat{y}$

### Elemento horizontal

Ahora vamos a estudiar lo mismo pero de forma mas general. Supongamos que un elemento  $\Delta \vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$  se transforma. Entonces el nuevo vector conectando a ambos será

$$\vec{x}'(\vec{x}_2) - \vec{x}'(\vec{x}_1) = [\vec{x}_2 + \vec{u}(\vec{x}_2)] - [\vec{x}_1 + \vec{u}(\vec{x}_1)]$$

$$\begin{aligned}\vec{x}'(\vec{x}_2) - \vec{x}'(\vec{x}_1) &= [\Delta\vec{x} + \vec{u}(\vec{x}_1 + \Delta\vec{x}) - \vec{u}(\vec{x}_1)] \\ \longrightarrow \Delta\vec{x}' &\approx [\Delta\vec{x} + (\Delta\vec{x} \cdot \nabla)\vec{u}(\vec{x}_1)]\end{aligned}$$

Para el caso en que los puntos 1 y 2 están sobre el eje horizontal, es decir  $\Delta\vec{x} = \Delta x \hat{x}$  vemos que la deformación del elemento se reduce a

$$\Delta\vec{x}'[\Delta x \hat{x}] = [\Delta x \hat{x} + \Delta x \nabla_x (u_x \hat{x} + u_y \hat{y})] = \Delta x (1 + \nabla_x u_x) \hat{x} + \Delta x \nabla_x u_y \hat{y}$$

donde suponemos que no hay desplazamiento fuera del plano. La deformación del elemento  $\Delta\vec{x}$  se muestra en la Fig. 33 donde se ve que este sufre una elongación  $\Delta x \nabla_x u_x$  y una rotación hacia  $\hat{y}$  debido al desplazamiento  $\Delta x \nabla_x u_y$ .

El estiramiento del elemento se puede cuantificar como<sup>15</sup>

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{|\Delta\vec{x}'| - \Delta x}{\Delta x} = \sqrt{(1 + \nabla_x u_x)^2 + (\nabla_x u_y)^2} - 1 \\ &= \sqrt{1 + 2\gamma_{xx}} - 1\end{aligned}$$

donde  $\gamma_{xx} = \nabla_x u_x + [(\nabla_x u_x)^2 + (\nabla_x u_y)^2]/2$ . Si  $\varepsilon_{xx} \ll 1$  entonces  $\gamma_{xx} \ll 1$  y entonces esto es equivalente a

$$\varepsilon_{xx} \approx \gamma_{xx}$$

Para entender la importancia de los elementos no lineales veamos que en el caso de una rotación pura como se muestra en Fig. 34, en donde la deformación es nula

$$\begin{aligned}x' &= -y \longrightarrow u_x = -(y + x) \longrightarrow \nabla_x u_x = -1 \\ y' &= x \longrightarrow u_y = (x - y) \longrightarrow \nabla_x u_y = -1\end{aligned}$$

en tal caso  $\gamma_{xx} = 0$  sólo cuando conservamos los elementos no lineales.

### Aproximación de pequeñas rotaciones

Para estimar el efecto de rotación notamos que el ángulo de rotación se puede estimar como

$$\Delta\theta \approx \frac{\Delta x \nabla_x u_y}{|\Delta\vec{x}'|} \approx \frac{\Delta x \nabla_x u_y}{\Delta x} = \nabla_x u_y \quad (13)$$

luego si esta rotación es pequeña y de orden  $\nabla_x u_y \sim \nabla_x u_x$  podemos despreciar en  $\gamma_{xx}$  los términos no lineales y quedar con

$$\varepsilon_{xx} \approx \gamma_{xx} \approx \nabla_x u_x$$

que es el resultado que habíamos obtenido antes.

<sup>15</sup>El estiramiento en principio debe seguir al elemento original, luego sería incorrecto utilizar, por ejemplo,  $\varepsilon_{xx} = (|\hat{x} \cdot \Delta\vec{x}'| - \Delta x)/\Delta x$

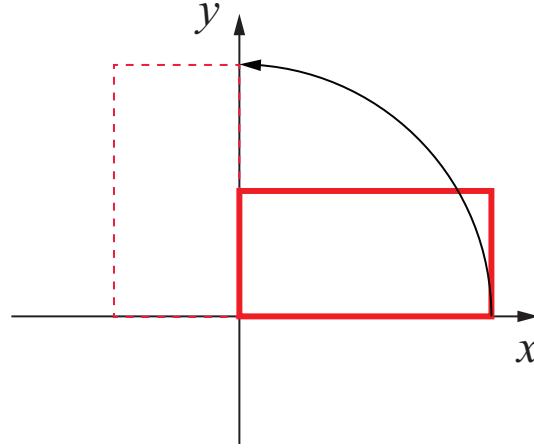


Figure 34: La figura muestra la rotación en  $90^\circ$  de un objeto, lo que se describe por los desplazamientos  $u_x = -(y + x)$  y  $u_y = (x - y)$ .

### Elemento vertical

La relación (13) muestra que el eje  $\hat{x}$  rota hacia el eje vertical  $\hat{y}$  un ángulo  $\Delta\theta$ . Notar que no es suficiente lo anterior para decir que existe un cizalle porque si el eje  $\hat{y}$  también rota puede que lo que se observe no es una deformación sino una rotación. Para ver esto necesitamos también analizar un elemento que está inicialmente en el eje vertical.

Procediendo de manera similar al caso anterior tomamos  $\Delta\vec{x} = \Delta y \hat{y}$ , en tal caso

$$\Delta\vec{x}'[\Delta y \hat{y}] = [\Delta y \hat{y} + \Delta y \nabla_y (u_x \hat{x} + u_y \hat{y})] = \Delta y \nabla_y u_x \hat{x} + \Delta y (1 + \nabla_y u_y) \hat{y}$$

lo cual está dibujado en Fig. 35. De aquí vemos que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yy} &= \frac{|\Delta\vec{x}'| - \Delta y}{\Delta y} = \sqrt{(1 + \nabla_y u_y)^2 + (\nabla_y u_x)^2} - 1 \\ &= \sqrt{1 + 2\gamma_{yy}} - 1 \end{aligned}$$

donde  $\gamma_{yy} = \nabla_y u_y + [(\nabla_y u_x)^2 + (\nabla_y u_y)^2]/2$ . El ángulo de rotación es dado por

$$\Delta\theta \approx \frac{\Delta y \nabla_y u_x}{|\Delta\vec{x}'|} \approx \frac{\Delta y \nabla_y u_x}{\Delta y} = \nabla_y u_x$$

donde debemos poner cuidado en que la dirección de rotación es a favor de los punteros del reloj por tanto cuando es positivo el eje  $\hat{y}$  se acerca al eje  $\hat{x}$ . Notar que si este ángulo es pequeño podemos desprestigiar términos cuadráticos y quedarnos con las expresiones lineales

$$\varepsilon_{yy} \approx \gamma_{yy} \approx \nabla_y u_y$$



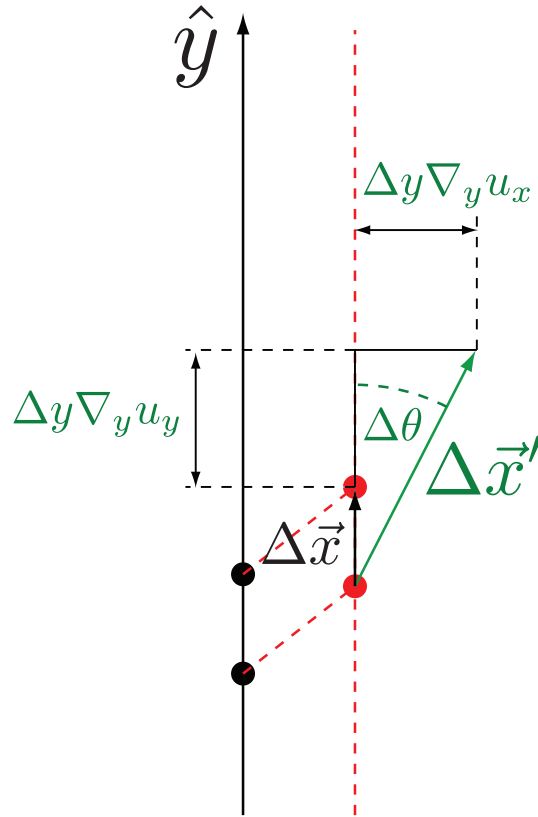


Figure 35: Deformación de un elemento horizontal  $\Delta \vec{x} = \Delta y \hat{y}$ . El nuevo elemento es  $\Delta \vec{x}'$  el cual corresponde a un estiramiento según  $\hat{y}$  y una rotación hacia  $\hat{x}$

### Cizalles

De nuestra definición de cizalle tenemos que

$$\begin{aligned}
 \cos(\pi/2 - \phi) &= \frac{\Delta \vec{x}'[\Delta x \hat{x}] \cdot \Delta \vec{x}'[\Delta y \hat{y}]}{\Delta x \Delta y} \\
 &= [(1 + \nabla_x u_x) \hat{x} + \nabla_x u_y \hat{y}] \cdot [\nabla_y u_x \hat{x} + (1 + \nabla_y u_y) \hat{y}] \\
 &= (\nabla_y u_x + \nabla_x u_y) + (\nabla_x u_x \nabla_y u_x + \nabla_x u_y \nabla_y u_y) \\
 \rightarrow \cos(\pi/2 - \phi) &= 2\gamma_{xy}
 \end{aligned}$$

donde  $\gamma_{xy} = (\nabla_y u_x + \nabla_x u_y)/2 + (\nabla_x u_x \nabla_y u_x + \nabla_x u_y \nabla_y u_y)/2$ . Para pequeños ángulos de cizalle vemos que

$$\cos(\pi/2 - \phi) = \sin \phi \approx \phi = 2\gamma_{xy}$$

luego como  $\varepsilon_{xy} = \phi/2$  concluimos que

$$\varepsilon_{xy} \approx \gamma_{xy}$$

Para pequeñas rotaciones vemos que la expresión anterior se reduce a la parte lineal

$$\varepsilon_{xy} \approx \frac{1}{2}(\nabla_y u_x + \nabla_x u_y)$$

pero podemos encontrar este mismo resultado a partir de nuestras expresiones (13) y (14). El ángulo total que el eje  $\hat{x}$  se acerca al eje  $\hat{y}$  es dado por

$$\phi = \nabla_x u_y + \nabla_y u_x$$

Este ángulo no debe confundirse con el de rotación total del elemento que tiene por valor

$$\varphi = \frac{1}{2}(\nabla_x u_y - \nabla_y u_x)$$

donde el signo menos indica que la rotación del elemento vertical es positiva si  $-\nabla_y u_x > 0$ . También, debemos colocar un factor 2 ya que al rotar el elemento horizontal y el vertical en la misma dirección la rotación neta no se suma y lo que se debe hacer es sacar un promedio. De nuestra definición de deformación de cizalle concluimos que para pequeños desplazamientos

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\phi}{2} = \frac{1}{2}(\nabla_y u_x + \nabla_x u_y)$$

### Ejemplo

Vamos a testear nuestras relaciones para el caso en que sólo realizamos una traslación y rotación pura en el plano, es decir no deformamos el objeto. La función desplazamiento la podemos extraer de primero hacer una rotación angular  $\delta\theta$  respecto a un punto O usando el vector  $\delta\vec{\theta} = \delta\theta\hat{z}$  lo cual da la nueva posición como<sup>16</sup>

$$\vec{x}' = \vec{x} + \delta\vec{\theta} \times \vec{x}$$

Si ahora aplicamos un traslación del sistema a una distancia  $\vec{x}_0$  encontramos la expresión

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{x}_0 + \delta\vec{\theta} \times \vec{x}$$

luego la función desplazamiento será

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{x}_0 + \delta\vec{\theta} \times \vec{x}$$

---

<sup>16</sup>Esta expresión sólo tiene validez para ángulos pequeños, para ángulos finitos hay que hacer algo mas sofisticado

o en coordenadas

$$\begin{aligned}u_x &= x_0 - d\theta y \\ u_y &= y_0 + d\theta x\end{aligned}$$

luego podemos ver que

$$\begin{aligned}\phi &= \nabla_x u_y + \nabla_y u_x = 0 \\ \varphi &= \frac{1}{2}(\nabla_x u_y - \nabla_y u_x) = d\theta\end{aligned}$$

---

## 0.5 Geometría Diferencial: Métrica (V2)

### Definición

Es el momento de introducir una herramienta muy útil para cuantificar la deformación. En general si representamos una línea, superficie o volumen podemos escribir  $\vec{r} = \vec{r}(u)$ ,  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  y  $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$  respectivamente, o en general  $\vec{r} = \vec{r}(u_i)$ . Luego, un elemento de longitud dentro de esa superficie está representado por

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} du_i$$

luego el largo de este elemento está dado por

$$\begin{aligned} d\vec{r}^2 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} du_i du_j = g_{ij} du_i du_j \\ &= g_{uu} du^2 + 2g_{uv} du dv + g_{vv} dv^2 \quad (2D) \end{aligned} \quad (14)$$

$$= g_{uu} du^2 + g_{vv} dv^2 + g_{ww} dw^2 + 2g_{uv} du dv + 2g_{uw} du dw + 2g_{vw} dv dw \quad (3D) \quad (15)$$

donde  $g_{ij}$  es una matriz que se conoce como métrica. La relación anterior se denomina en geometría diferencial *primera forma fundamental* y la invocaremos repetidamente a lo largo de este curso. Por ahora nos interesa la forma 3D de la métrica.

La primera forma fundamental del espacio  $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ , descrito en coordenadas cartesianas, es

$$d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z} \longrightarrow d\vec{r}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Comparando con (15) deducimos que la métrica es  $g_{ij} = \delta_{ij}$ . También podemos expresar un vector en coordenadas cilíndricas  $\vec{r} = \vec{r}(r, \theta, z) = r\hat{r}(\theta) + z\hat{z}$  expresarlo en coordenadas cilíndricas y en tal caso

$$d\vec{r} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + dz\hat{z} \longrightarrow d\vec{r}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

luego  $g_{ij} = \ell_i^2 \delta_{ij}$  donde  $\ell_r = 1$ ,  $\ell_\theta = r$  y  $\ell_z = 1$ . Mas conveniente es que usemos longitudes ortogonales  $s_r$ ,  $s_\theta$  y  $s_z = z$ , que son longitudes a lo largo de los vectores ortogonales y por tanto  $ds_r = dr$ ,  $ds_\theta = r d\theta$ , y  $ds_z = dz$  con lo cual

$$d\vec{r} = ds_r \hat{r} + ds_\theta \hat{\theta} + ds_z \hat{z} \longrightarrow d\vec{r}^2 = ds_r^2 + ds_\theta^2 + ds_z^2$$

y la métrica es  $g_{ij} = \delta_{ij}$ .

Ahora podemos retornar a la elasticidad. La deformación se representa por  $\vec{x}' = \vec{x}'(x, y, z) = \vec{x} + \vec{u}(\vec{x})$  donde  $\vec{x} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ . La primera forma fundamental después de deformar es

$$d\vec{x}' = d\vec{x} + d\vec{u} \longrightarrow d\vec{x}'^2 = d\vec{x}^2 + 2d\vec{x} \cdot d\vec{u} + d\vec{u}^2$$

por otra parte los diferenciales de desplazamiento y  $d\vec{x}$  son

$$\begin{aligned} d\vec{u} &= \nabla_x \vec{u} dx + \nabla_y \vec{u} dy + \nabla_z \vec{u} dz \\ d\vec{x} &= dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z} \\ \longrightarrow d\vec{x}'^2 &= d\vec{x}^2 + 2(dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}) \cdot (\nabla_x \vec{u} dx + \nabla_y \vec{u} dy + \nabla_z \vec{u} dz) + (\nabla_x \vec{u} dx + \nabla_y \vec{u} dy + \nabla_z \vec{u} dz)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

La relación anterior muestra cómo se relacionan la primera forma fundamental antes y después de deformar y se puede escribir introduciendo la matriz simétrica  $\gamma_{ij}$  tal que

$$\begin{aligned} d\vec{x}'^2 &= d\vec{x}^2 + 2\gamma_{ij} dx_i dx_j \\ &= d\vec{x}^2 + 2\gamma_{xx} dx^2 + 2\gamma_{yy} dy^2 + 2\gamma_{zz} dz^2 + 4\gamma_{xy} dx dy + 4\gamma_{yz} dx dy + 4\gamma_{xz} dx dz \end{aligned}$$

Notar que esta última expresión contiene todos los diferenciales que se observan más arriba en (16). Comparando podemos ver que

$$\gamma_{xx} = \nabla_x u_x + \frac{1}{2} \nabla_x \vec{u} \cdot \nabla_x \vec{u}$$

Similarmente identificamos

$$4\gamma_{xy} dx dy = 2(\nabla_x u_y + \nabla_y u_x) dx dy + 2\nabla_x \vec{u} \cdot \nabla_y \vec{u} dx dy \longrightarrow \gamma_{xy} = \frac{1}{2}(\nabla_x u_y + \nabla_y u_x) + \frac{1}{2} \nabla_x \vec{u} \cdot \nabla_y \vec{u}$$

Un análisis para las diferentes componentes da

$$\gamma_{ij} \equiv \frac{1}{2}(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j) + \frac{1}{2} \nabla_i \vec{u} \cdot \nabla_j \vec{u} \quad (17)$$

Con la matriz  $\gamma_{ij}$  podemos relacionar la nueva métrica con la antigua métrica  $g'_{ij} = \delta_{ij} + 2\gamma_{ij}$ . La relación  $d\vec{x}'^2 = d\vec{x}^2 + 2\gamma_{ij} dx_i dx_j$  muestra que la matriz  $\gamma_{ij}$  refleja una deformación pura ya que traslaciones o rotaciones deben hacer  $d\vec{x}'^2 = d\vec{x}^2$ . En otras palabras cualquier descripción de una deformación debe ser función del tensor  $\gamma_{ij}$ . En especial demostramos mas abajo que el tensor de deformaciones  $\varepsilon_{ij}$  corresponde al tensor  $\gamma_{ij}$  para pequeñas deformaciones.

La identidad para la métrica del objeto deformado nos permite en general encontrar una manera de calcular el tensor  $\gamma_{ij}$  el cual es

$$g'_{ij} = g_{ij} + 2\gamma_{ij} \longrightarrow 2\gamma_{ij} = g'_{ij} - g_{ij}$$

donde  $g_{ij}$  da cuenta del tensor antes de la deformación. De forma mas explícita

$$2\gamma_{ij} dx_i dx_j = (g'_{ij} - g_{ij}) dx_i dx_j = 2d\vec{x} \cdot d\vec{u} + d\vec{u}^2$$

**Demostración**  $\varepsilon_{ij} \approx \gamma_{ij}$ 

Aunque ya bosquejamos esta demostración en secciones anteriores, podemos repetir la demostración ahora de manera mas general. Si  $d\vec{x} = dx\hat{x}$  entonces la deformación de este elemento es dada por

$$\varepsilon_{xx} = \frac{|d\vec{x}'| - dx}{dx} = \frac{\sqrt{d\vec{x}'^2} - dx}{dx}$$

pero  $d\vec{x}'^2 = g'_{ij}dx_idx_j$  con  $dy = dz = 0$ , luego  $d\vec{x}'^2 = g'_{xx}dx^2 = (1 + 2\gamma_{xx})dx^2$  y entonces

$$\varepsilon_{xx} = \sqrt{1 + 2\gamma_{xx}} - 1$$

Para pequeña deformación o  $\varepsilon_{xx} \ll 1$  vemos que lo anterior equivale a  $\gamma_{xx} \ll 1$  y luego

$$\varepsilon_{xx} \approx \gamma_{xx}$$

De la misma forma podemos obtener expresiones para el cizalle. El ángulo  $\phi$  en que se acercan los vectores  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$  viene dado por

$$\cos(\pi/2 - \phi) = \hat{x}' \cdot \hat{y}'$$

donde los vectores unitarios  $\hat{x}'$  y  $\hat{y}'$  están definidos como la transformación de los vectores unitarios  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$ , esto es

$$\begin{aligned} \hat{x}' &= \frac{d\vec{x}'}{|d\vec{x}'|} = \frac{dx\hat{x} + dx\nabla_x\vec{u}}{|dx\hat{x} + dx\nabla_x\vec{u}|} = \frac{\hat{x} + \nabla_x\vec{u}}{\sqrt{1 + 2\gamma_{xx}}} \\ \hat{y}' &= \frac{\hat{y} + \nabla_y\vec{u}}{\sqrt{1 + 2\gamma_{yy}}} \end{aligned} \quad (18)$$

utilizando las expresiones anteriores vemos que

$$\cos(\pi/2 - \phi) = \frac{\nabla_y u_x + \nabla_x u_y + \nabla_x \vec{u} \cdot \nabla_y \vec{u}}{\sqrt{1 + 2\gamma_{xx}}\sqrt{1 + 2\gamma_{yy}}} = 2 \frac{\gamma_{xy}}{\sqrt{1 + 2\gamma_{xx}}\sqrt{1 + 2\gamma_{yy}}}$$

Para pequeñas deformaciones  $\phi \ll 1$  y esto es equivalente a  $\gamma_{xy} \ll 1$  (por supuesto que  $\gamma_{xx}, \gamma_{yy} \ll 1$  por lo que hicimos mas arriba), luego

$$\phi \approx 2\gamma_{xy} \longrightarrow \varepsilon_{xy} = \frac{\phi}{2} \approx \gamma_{xy}$$

### Otras coordenadas

Una ventaja del formalismo recién definido es poder encontrar la matriz de deformación en otras coordenadas. Por ejemplo, en coordenadas cilíndricas el elemento de longitud es  $d\vec{x} = ds_r \hat{r} + ds_\theta \hat{\theta} + ds_z \hat{z}$  de manera que  $g_{ij} = \delta_{ij}$ . Al deformar el objeto la métrica va a cambiar a

$$g'_{ij} = g_{ij} + 2\gamma_{ij}$$

luego, el cambio del elemento  $ds_\theta \hat{\theta}$  será

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{d\vec{x}'^2} - ds_\theta}{ds_\theta}$$

y  $d\vec{x}'^2 = g'_{ij} dx_i dx_j$  con  $ds_r = ds_z = 0$ , luego  $d\vec{x}'^2 = g'_{\theta\theta} ds_\theta^2$  y

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{\sqrt{g'_{\theta\theta} ds_\theta^2} - ds_\theta}{ds_\theta} = \frac{\sqrt{g_{\theta\theta} ds_\theta^2 + 2\gamma_{\theta\theta} ds_\theta^2} - ds_\theta}{ds_\theta} \\ &= \sqrt{1 + 2\gamma_{\theta\theta}} - 1 \approx \gamma_{\theta\theta} \end{aligned}$$

Podemos repetir este análisis para los casos de cizalle pero el resultado se puede anticipar sin problemas. Si la métrica inicial es ortogonal  $g_{ij} = \delta_{ij}$  entonces el tensor de deformaciones será:

$$\varepsilon_{ij} \approx \gamma_{ij}$$

Hagamos el cálculo del tensor  $\gamma_{ij}$  en coordenadas cilíndricas. Tenemos que la primera forma fundamental antes y después está dada por

$$\begin{aligned} d\vec{x}'^2 &= d\vec{x}^2 + 2\gamma_{ij} dx_i dx_j \\ &= d\vec{x}^2 + 2\gamma_{rr} ds_r^2 + 2\gamma_{\theta\theta} ds_\theta^2 + 2\gamma_{zz} ds_z^2 + 4\gamma_{r\theta} ds_r ds_\theta + 4\gamma_{\theta z} ds_\theta ds_z + 4\gamma_{rz} ds_r ds_z \\ &= d\vec{x}^2 + 2\gamma_{rr} dr^2 + 2\gamma_{\theta\theta} r^2 d\theta^2 + 2\gamma_{zz} dz^2 + 4\gamma_{r\theta} r dr d\theta + 4\gamma_{\theta z} r d\theta dz + 4\gamma_{rz} dr dz \end{aligned} \tag{19}$$

Por otra parte lo anterior es igual a

$$d\vec{x}'^2 = d\vec{x}^2 + 2d\vec{x} \cdot d\vec{u} + d\vec{u}^2$$

donde por comparación podemos identificar los diversos términos calculando directamente los diferenciales. Por ahora nos interesa la parte lineal (despreciamos rotaciones) y por tanto aproximamos

$$d\vec{x}'^2 \approx d\vec{x}^2 + 2d\vec{x} \cdot d\vec{u}$$

Para calcular la matriz de deformación utilizamos que

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + dz\hat{z} \\ d\vec{u} &= du_r\hat{r} + du_\theta\hat{\theta} + du_z\hat{z} + u_r d\hat{r} + u_\theta d\hat{\theta} + u_z d\hat{z} \end{aligned}$$

donde  $d\phi = \nabla_r\phi dr + \nabla_\theta\phi d\theta + \nabla_z\phi dz$  y las identidades

$$d\hat{r} = \hat{\theta}d\theta; \quad d\hat{\theta} = -\hat{r}d\theta; \quad d\hat{z} = 0$$

encontramos

$$d\vec{u} = (du_r - u_\theta d\theta)\hat{r} + (du_\theta + u_r d\theta)\hat{\theta} + du_z\hat{z}$$

luego la primera forma fundamental es

$$d\vec{x}^2 \approx d\vec{x}^2 + 2(dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + dz\hat{z}) \cdot [(du_r - u_\theta d\theta)\hat{r} + (du_\theta + u_r d\theta)\hat{\theta} + du_z\hat{z}] \quad (20)$$

Ahora podemos comparar (19) con (20) para encontrar el tensor  $\gamma_{ij}$ . Por inspección vemos que

$$\begin{aligned} 2\gamma_{rr}dr^2 &= 2\nabla_r u_r dr^2 \longrightarrow \gamma_{rr} = \nabla_r u_r \\ 2\gamma_{\theta\theta}r^2 d\theta^2 &= 2[\nabla_\theta u_\theta + u_r]rd\theta^2 \longrightarrow \gamma_{\theta\theta} = (\nabla_\theta u_\theta + u_r)/r \\ 4\gamma_{r\theta}r dr d\theta &= [\nabla_\theta u_r - u_\theta + r\nabla_r u_\theta]dr d\theta \longrightarrow 2\gamma_{r\theta} = (\nabla_\theta u_r - u_\theta + r\nabla_r u_\theta)/r \end{aligned}$$

y utilizando los valores de  $l_i$  y repitiendo lo mismo para otras componentes encontramos que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \gamma_{rr} = \nabla_r u_r; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \gamma_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\nabla_\theta u_\theta; \quad \varepsilon_{zz} = \gamma_{zz} = \nabla_z u_z \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= 2\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\nabla_\theta u_r + \nabla_r u_\theta - \frac{u_\theta}{r}; \quad 2\varepsilon_{rz} = 2\gamma_{rz} = \nabla_z u_r + \nabla_r u_z; \quad 2\varepsilon_{\theta z} = 2\gamma_{\theta z} = \nabla_z u_\theta + \frac{1}{r}\nabla_\theta u_z \end{aligned} \quad (21)$$



## 0.6 Ecuaciones de Elasticidad

### Coordenadas Lagrangianas & Coordenadas Eulerianas

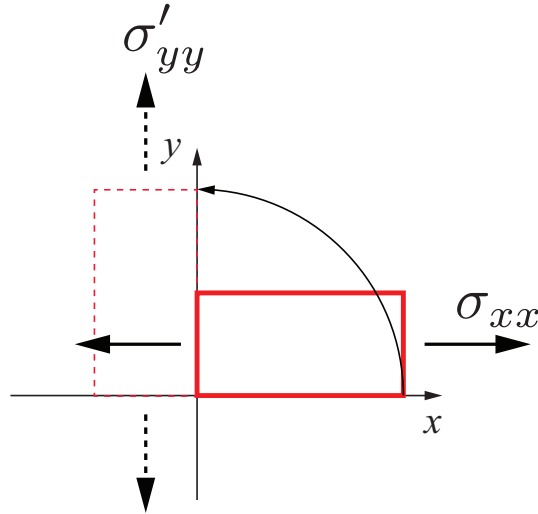


Figure 36: Tracción uniaxial de una barra y posterior rotación lo cual cambia el nombre del esfuerzo aplicado de  $\sigma_{xx}$  a  $\sigma'_{yy}$

Nuestras relaciones deformación-desplazamiento están escritas en coordenadas lagrangianas pero nuestras ecuaciones de equilibrio están escritas en coordenadas eulerianas. Peor aún, nuestros esfuerzos están indicados para el sistema ya transformado por lo que tenemos una dificultad al utilizar nuestras relaciones esfuerzo deformación (9) cuando existen rotaciones. Para ejemplificar el problema, si tenemos una tracción uniaxial a lo largo del eje  $\hat{x}$  tenemos que  $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$  y todo estaría bien si no rotamos el objeto, pero al rotar el objeto como se muestra en Fig. 36 tenemos que el esfuerzo cambia de nombre.

Luego tenemos dos fuentes de problemas técnicos en la ecuación de equilibrio:

1. En el término de fuerza debido a tracciones en la superficie

$$\rho a_i = \nabla'_j \sigma_{ij} + f_i$$

utilizamos el esfuerzo en la posición del objeto deformado que es distinto al esfuerzo en la posición del objeto antes de deformarse y de la cual conocemos las relaciones constitutivas (9). En otras palabras, las relaciones (9) son sólo correctas en el sistema de referencia original. Por tanto lo correcto sería escribir la ecuación de equilibrio como

$$\rho' a_i = \nabla'_j \sigma'_{ij} + f_i$$

para diferenciar entre los esfuerzos en coordenadas antes de haber rotado que llamaremos  $\sigma_{ij}$  y dados por (9) y los esfuerzos en la posición actual del objeto  $\sigma'_{ij}$ . Igualmente la densidad puede cambiar si cambia el volumen por lo que podemos escribir el elemento de masa de dos maneras,  $\delta m = \rho' \delta V' = \rho \delta V$ , dependiendo si utilizamos el volumen antes o después de deformar.

- Utilizamos derivadas respecto a las coordenadas actuales. Sin embargo nuestras relaciones esfuerzo deformación (36) están en coordenadas del objeto antes de ser deformado por lo que debemos corregir la ecuación de movimiento para utilizar coordenadas lagrangianas.

Para enfrentar estas dos dificultades técnicas vamos a revisar el término de tracción en la ecuación de movimiento

$$\oint_{\delta S} d\vec{F}_i = \oint_{\delta S} \sigma'_{ij} n_j dS$$

para un elemento rectangular como el de la Fig. 36 vemos que la fuerza aplicada en nuestras coordenadas absolutas se puede escribir fácilmente en función del esfuerzo actual como  $\sigma'_{xx}\hat{x}$  para la tracción en la cara orientada según  $\hat{x}$  y  $\sigma'_{yy}\hat{y}$  para la cara orientada según  $\hat{y}$ , etc. El balance de fuerzas será

$$\begin{aligned} \oint_{\delta S} d\vec{F} &= \sigma'_{xx}\hat{x}|_{x'+\delta x'}\hat{x}\delta y'\delta z' - \sigma'_{xx}\hat{x}|_x\delta y'\delta z' + \sigma'_{yx}\hat{y}|_{x'+\delta x'}\hat{x}\delta y'\delta z' - \sigma'_{yx}\hat{y}|_x\delta y'\delta z' \\ &+ \sigma'_{yy}\hat{y}|_{y'+\delta y'}\hat{x}\delta x'\delta z' - \sigma'_{yy}\hat{y}|_y\delta x'\delta z' + \sigma'_{xy}\hat{x}|_{y'+\delta y'}\hat{x}\delta x'\delta z' - \sigma'_{xy}\hat{x}|_y\delta x'\delta z' + \dots \\ &= [\hat{x}\nabla'_x\sigma'_{xx} + \hat{y}\nabla'_x\sigma'_{yx} + \hat{z}\nabla'_x\sigma'_{zx} + \\ &+ \hat{x}\nabla'_y\sigma'_{xy} + \hat{y}\nabla'_y\sigma'_{yy} + \hat{z}\nabla'_y\sigma'_{zy} + \\ &+ \hat{x}\nabla'_z\sigma'_{xz} + \hat{y}\nabla'_z\sigma'_{yz} + \hat{z}\nabla'_z\sigma'_{zz}]\delta V' \end{aligned}$$

o de forma mas compacta

$$\oint_{\delta S} d\vec{F} = (\nabla'_j\sigma'_{ij})\hat{x}_i\delta V' \longrightarrow \rho'\vec{a} = (\nabla'_j\sigma'_{ij})\hat{x}_i + \vec{f} \quad (22)$$

Pero estos esfuerzos no son los dados por (9). Para la Fig. 36 la fuerza aplicada sobre la cara orientada según  $\hat{y}$  es  $\sigma'_{yy}\hat{y}$  en las coordenadas actuales pero que esto equivale a  $\sigma'_{yy}\hat{y} = \sigma_{xx}\hat{x}'$  si utilizamos las coordenadas originales, donde  $\hat{x}'$  está definido en (18) y corresponde a la rotación del vector  $\hat{x}$  junto con el objeto. Como el esfuerzo  $\sigma_{xx}$  es lineal con la deformación no debemos preocuparnos de efectos de cambio de area sobre las caras producto de la deformación y podemos escribir para la fuerza aplicada sobre la cara traccionada la relación:

$$\oint_{\delta S} d\vec{F} = \sigma_{xx}\hat{x}'|_{x+\delta x}\delta y\delta z - \sigma_{xx}\hat{x}'|_x\delta y\delta z \approx \nabla_x(\sigma_{xx}\hat{x}')\delta V$$

Notar que estamos usando las coordenadas originales donde el area de la cara esta dado por  $\delta y \delta z$  (y no  $\delta x \delta z$  lo cual sería correcto en el sistema deformado para el caso específico de la Fig. 36 ). Si incluimos el resto de los esfuerzos en la misma cara llegamos a

$$\oint_{\delta S} d\vec{F} = [\nabla_x(\sigma_{xx}\hat{x}') + \nabla_x(\sigma_{yx}\hat{y}') + \nabla_x(\sigma_{zx}\hat{z}')] \delta V$$

y si incluimos esfuerzos en el resto de las caras llegamos a

$$\begin{aligned} \oint_{\delta S} d\vec{F} = & [\nabla_x(\sigma_{xx}\hat{x}') + \nabla_x(\sigma_{yx}\hat{y}') + \nabla_x(\sigma_{zx}\hat{z}')] \\ & + [\nabla_y(\sigma_{xy}\hat{x}') + \nabla_y(\sigma_{yy}\hat{y}') + \nabla_y(\sigma_{zy}\hat{z}')] \\ & + [\nabla_z(\sigma_{xz}\hat{x}') + \nabla_z(\sigma_{yz}\hat{y}') + \nabla_z(\sigma_{zz}\hat{z}')] \delta V \end{aligned}$$

Finalmente la ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned} \rho' \vec{a} = \vec{f} + & [\nabla_x(\sigma_{xx}\hat{x}') + \nabla_x(\sigma_{yx}\hat{y}') + \nabla_x(\sigma_{zx}\hat{z}')] \\ & + [\nabla_y(\sigma_{xy}\hat{x}') + \nabla_y(\sigma_{yy}\hat{y}') + \nabla_y(\sigma_{zy}\hat{z}')] \\ & + [\nabla_z(\sigma_{xz}\hat{x}') + \nabla_z(\sigma_{yz}\hat{y}') + \nabla_z(\sigma_{zz}\hat{z}')] (\delta V / \delta V') \end{aligned} \quad (23)$$

donde logramos sortear los dos problemas especificados mas arriba: nuestras coordenadas son lagrangianas y los esfuerzos son los dados por las expresiones (9). Como los cambios de volumen multiplican a cantidades que son ya pequeñas podemos hacer  $\delta V / \delta V' \approx 1$ . Igualmente al orden mas bajo  $\rho' \approx \rho$ . Esto en notación tensorial se puede escribir como

$$\rho \vec{a} = \nabla_j (\sigma_{ij} \hat{x}'_i) + \vec{f} \quad (24)$$

Si podemos despreciar rotaciones entonces  $\hat{x}' \approx \hat{x}$ ,  $\hat{y}' \approx \hat{y}$  y  $\hat{z}' \approx \hat{z}$  con lo que obtenemos la ecuación  $\rho \vec{a} = (\nabla_j \sigma_{ij}) \hat{x}_i + \vec{f}$ , es decir no existe diferencia entre esta ecuación y la ecuación de movimiento (22) en coordenadas eulerianas. Esto lo vamos a analizar mas detenidamente en las secciones siguientes.

### Ecuaciones de Movimiento

Ahora podemos encontrar una formulación muy parecida a la que se usa en Mecánica de Fluidos pero con la salvedad que usamos coordenadas lagrangianas en la descripción y suponemos que los desplazamientos son muy pequeños para despreciar rotaciones. Las ecuaciones de equilibrio son

$$\rho \partial_t^2 u_i = \nabla_j \sigma_{ij} + f_i$$

donde

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \left[ \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right] = \frac{E}{(1+\nu)} \left[ \frac{1}{2} (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j) + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} \right]$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \nabla_j \sigma_{ij} &= \frac{E}{(1+\nu)} \left[ \frac{1}{2} (\nabla^2 u_i + \nabla_i (\nabla \cdot \mathbf{u})) + \frac{\nu}{1-2\nu} \nabla_i (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] \\ \longrightarrow \nabla_j \sigma_{ij} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu} \nabla_i (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] \end{aligned}$$

lo que en la ecuación de equilibrio da

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] + \mathbf{f}$$

Notar que hemos incorporado la posibilidad de una deofrmación que dependa del tiempo, es decir tenemos la transformación

$$\vec{x}'(\vec{x}, t) = \vec{x} + \vec{u}(\vec{x}, t)$$

que implica que la aceleración en relación (1) es

$$\vec{a} = \partial_t^2 \vec{x}'(\vec{x}, t) = \partial_t^2 \vec{u}(\vec{x}, t)$$

### Correcciones Nolineales

Para saber si el efecto de las rotaciones puede ser despreciado o no debemos calcular los nuevos vectores unitarios en (23). Utilizando (18) vemos que

$$\begin{aligned} \hat{x}' &= \frac{\hat{x} + \nabla_x \vec{u}}{\sqrt{1 + 2\gamma_{xx}}} \\ \hat{y}' &= \frac{\hat{y} + \nabla_y \vec{u}}{\sqrt{1 + 2\gamma_{yy}}} \\ \hat{z}' &= \frac{\hat{z} + \nabla_z \vec{u}}{\sqrt{1 + 2\gamma_{zz}}} \end{aligned}$$

luego al orden mas bajo en los gradientes encontramos que

$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot \hat{x}' &= \frac{1 + \nabla_x u_x}{\sqrt{1 + 2\gamma_{xx}}} \approx (1 + \nabla_x u_x) \left( 1 - \gamma_{xx} + \frac{3}{2} \gamma_{xx}^2 \right) \\ &= (1 + \nabla_x u_x) \left[ 1 - \nabla_x u_x - \frac{1}{2} ((\nabla_x u_x)^2 + (\nabla_x u_y)^2 + (\nabla_x u_z)^2) + \frac{3}{2} (\nabla_x u_x)^2 \right] \\ &= 1 - \frac{1}{2} [(\nabla_x u_y)^2 + (\nabla_x u_z)^2] + \mathcal{O}(u^3) \\ \hat{y} \cdot \hat{x}' &= \nabla_x u_y \\ \hat{z} \cdot \hat{x}' &= \nabla_x u_z \end{aligned}$$

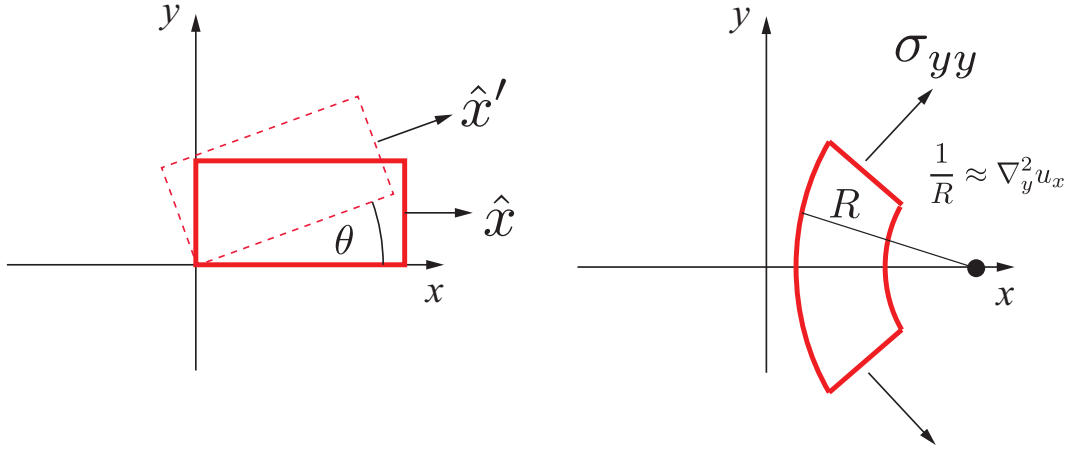


Figure 37: Izquierda: Debido a la rotación podemos estimar  $\hat{x}' \approx \hat{x} + \sin \theta \hat{y}$ , pero  $\theta \approx \nabla_x u_y$  como habíamos calculado en (13), luego  $\hat{x}' \approx \hat{x} + \nabla_x u_y \hat{y}$ . Derecha: efecto de laplace por efecto de la curvatura en una dirección.

Derivando directamente sobre estas expresiones encontramos

$$\begin{aligned}\hat{x} \cdot \nabla_x \hat{x}' &= -[(\nabla_x u_y)(\nabla_x^2 u_y) + (\nabla_x u_z)(\nabla_x^2 u_z)] + \mathcal{O}(u^3) \\ \hat{y} \cdot \nabla_x \hat{x}' &= \nabla_x^2 u_y \\ \hat{z} \cdot \nabla_x \hat{x}' &= \nabla_x^2 u_z\end{aligned}$$

Resumiendo, si no admitimos términos cuadráticos en el desplazamiento encontramos que lo anterior queda resumido en la expresión

$$\hat{x}' = \hat{x} + \nabla_x u_y \hat{y} + \nabla_x u_z \hat{z}$$

lo cual tiene una sencilla interpretación geométrica como se ve en Fig. 37. Similarmente

$$\begin{aligned}\hat{y}' &= \nabla_y u_x \hat{x} + \hat{y} + \nabla_y u_z \hat{z} \\ \hat{z}' &= \nabla_z u_x \hat{x} + \nabla_z u_y \hat{y} + \hat{z}\end{aligned}\tag{25}$$

con ello podemos encontrar que por ejemplo la ecuación de movimiento según  $\hat{x}$  es

$$\begin{aligned}\rho a_x = f_x &+ [\nabla_x \sigma_{xx} + \nabla_y \sigma_{xy} + \nabla_z \sigma_{xz}] \\ &+ [\nabla_x \sigma_{yx} + \nabla_y \sigma_{yy} + \nabla_z \sigma_{yz}] \nabla_y u_x + [\nabla_x \sigma_{zx} + \nabla_y \sigma_{zy} + \nabla_z \sigma_{zz}] \nabla_z u_x \\ &+ [\sigma_{yx} \nabla_x \nabla_y u_x + \sigma_{yy} \nabla_y^2 u_x + \sigma_{yz} \nabla_z \nabla_y u_x] + [\sigma_{zx} \nabla_x \nabla_z u_x + \sigma_{zy} \nabla_y \nabla_z u_x + \sigma_{zz} \nabla_z^2 u_x]\end{aligned}$$

Notar que lo anterior se puede escribir más compactamente como

$$\rho a_x = f_x + [\nabla_x \sigma_{xx} + \nabla_y \sigma_{xy} + \nabla_z \sigma_{xz}] + \nabla_i (\sigma_{ij} \nabla_j u_x)\tag{26}$$

Podemos interpretar fácilmente los diversos términos en la ecuación de movimiento:

- El primer término corresponde que esperamos al despreciar rotaciones o cuando los gradientes se pueden suponer pequeños.
- El segundo tipo de términos proviene de la rotación de coordenadas de manera que la fuerza provocada por el primer término en las otras direcciones ( $\hat{y}$  y  $\hat{z}$ ) tiene una componente según  $\hat{x}$ .
- Los dos últimos términos son los mas interesantes y corresponden a un efecto puro de curvatura: al curvar en la dirección perpendicular a  $\hat{x}$  provoca que la fuerza  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{zz}$  tengan componentes en la dirección  $\hat{x}$  como se ve en Fig. 37. Este es un *efecto de laplace* que es importante en filamentos y membranas.

La importancia de los dos últimos términos queda patente al observar que en equilibrio y en ausencia de fuerzas externas al orden cuadrático tenemos

$$0 = [\nabla_x \sigma_{xx} + \nabla_y \sigma_{xy} + \nabla_z \sigma_{xz}] + [\sigma_{yx} \nabla_x \nabla_y u_x + \sigma_{yy} \nabla_y^2 u_x + \sigma_{yz} \nabla_z \nabla_y u_x] + [\sigma_{zx} \nabla_x \nabla_z u_x + \sigma_{zy} \nabla_y \nabla_z u_x + \sigma_{zz} \nabla_z^2 u_x] + \mathcal{O}(u^3)$$

### ¿Cuándo podemos despreciar rotaciones en problemas 3D?

Ahora podemos revisar lo que significa la aproximación de pequeñas rotaciones. Si podemos suponer que los gradientes son pequeños, esto es

$$\nabla_x u_x \sim \nabla_y u_y \sim \nabla_x u_y \sim \nabla_y u_x \ll 1 \quad (27)$$

podemos quedarnos con las expresiones lineales de las ecuaciones deformación-desplazamiento (17). Esto automáticamente implica que, por ejemplo,

$$\nabla_x u_x \sim \varepsilon_{xx}$$

con lo cual el término producto de las rotaciones es del orden de

$$\nabla_i (\sigma_{ij} \nabla_j u_x) \sim (\nabla_x \sigma_{xx}) \varepsilon_{xx}$$

y por tanto mucho menor que el término de orden cero cuando trabajamos bajo la condición de pequeñas deformaciones. Si los gradientes son grandes las aproximaciones anteriores no son posibles aunque las deformaciones sean pequeñas y debemos en primera aproximación incorporar el término de rotación en (26), un ejemplo de ello es la aproximación de Föpl-Von Kármán para el análisis de placas. Si las rotaciones son aún mayores se deben utilizar otros métodos.

La complejidad de usar ecuaciones de equilibrio de fuerzas es que necesitamos aproximarlas debido al efecto de rotación aún cuando estamos todavía bajo la condición de pequeñas deformaciones. Esto motiva a utilizar otros métodos, como el de la energía, para evitar escribir ecuaciones de equilibrio de “fuerzas que rotan”. Una ventaja del análisis de filamentos, que veremos mas adelante, es que se puede esconder esta rotación trabajando vectorialmente, es decir, manipulando directamente las ecuaciones de movimiento (23).

### Otras Coordenadas

Las ecuaciones de equilibrio en otras coordenadas se obtienen de una forma similar. En coordenadas cilíndricas tenemos que las tracciones sobre un elemento ortogonal están dadas en el caso de una tracción radial por

$$\oint_{\delta S} d\vec{F} = \sigma_{rr}\hat{r}r\delta\theta\delta z|_{r+\delta r} - \sigma_{rr}\hat{r}r\delta\theta\delta z|_r \approx \nabla_r(\sigma_{rr}r\hat{r})\delta r\delta\theta\delta z$$

Si agregamos el resto de las componentes encontramos

$$\begin{aligned} \oint_{\delta S} d\vec{F} &= [\nabla_r(\sigma_{rr}r\hat{r}) + \nabla_r(\sigma_{\theta r}r\hat{\theta}) + \nabla_r(\sigma_{zr}r\hat{z}) \\ &+ \nabla_\theta(\sigma_{r\theta}\hat{r}) + \nabla_\theta(\sigma_{\theta\theta}\hat{\theta}) + \nabla_\theta(\sigma_{z\theta}\hat{z}) \\ &+ \nabla_z(\sigma_{rz}r\hat{r}) + \nabla_z(\sigma_{\theta z}r\hat{\theta}) + \nabla_z(\sigma_{zz}r\hat{z})]\delta r\delta\theta\delta z \end{aligned}$$

donde hemos despreciado rotaciones y las direcciones son las mismas de antes de deformar. Utilizando que  $\nabla_\theta\hat{r} = \hat{\theta}$ ,  $\nabla_\theta\hat{\theta} = -\hat{r}$  y la ecuación de equilibrio (no hay aceleraciones)

$$\begin{aligned} 0 = \oint_{\delta S} d\vec{F} + \vec{f}\delta V &= [\nabla_r(\sigma_{rr}r)\hat{r} + \nabla_r(\sigma_{\theta r}r)\hat{\theta} + \nabla_r(\sigma_{zr}r)\hat{z} \\ &+ \nabla_\theta(\sigma_{r\theta})\hat{r} + \nabla_\theta(\sigma_{\theta\theta})\hat{\theta} + \nabla_\theta(\sigma_{z\theta})\hat{z} \\ &+ \sigma_{r\theta}\hat{\theta} - \sigma_{\theta\theta}\hat{r} \\ &+ \nabla_z(\sigma_{rz}r)\hat{r} + \nabla_z(\sigma_{\theta z}r)\hat{\theta} + \nabla_z(\sigma_{zz}r)\hat{z}]\delta r\delta\theta\delta z + (f_r\hat{r} + f_\theta\hat{\theta} + f_z\hat{z})r\delta r\delta\theta\delta z \end{aligned}$$

Luego tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \hat{r}) \quad & \frac{1}{r}[\nabla_r(\sigma_{rr}r) + \nabla_\theta\sigma_{r\theta} - \sigma_{\theta\theta}] + \nabla_z\sigma_{rz} + f_r = 0 \\ \hat{\theta}) \quad & \frac{1}{r}[\nabla_r(\sigma_{\theta r}r) + \nabla_\theta\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{r\theta}] + \nabla_z\sigma_{\theta z} + f_\theta = 0 \\ \hat{z}) \quad & \frac{1}{r}[\nabla_r(\sigma_{zr}r) + \nabla_\theta\sigma_{z\theta}] + \nabla_z\sigma_{zz} + f_z = 0 \end{aligned} \tag{28}$$