MEF: Trabajo Práctico 1

1.- Cuerda de guitarra I

a) Demuestre que para conseguir una frecuencia o nota en el sonido de una guitarra se necesita una deformación

$$\epsilon_0 = \frac{\rho}{E}(2fL)^2 \tag{1}$$

donde ρ es la densidad del material, E es el módulo de Young, L el largo de la cuerda y f la frecuencia que se desea escuchar.

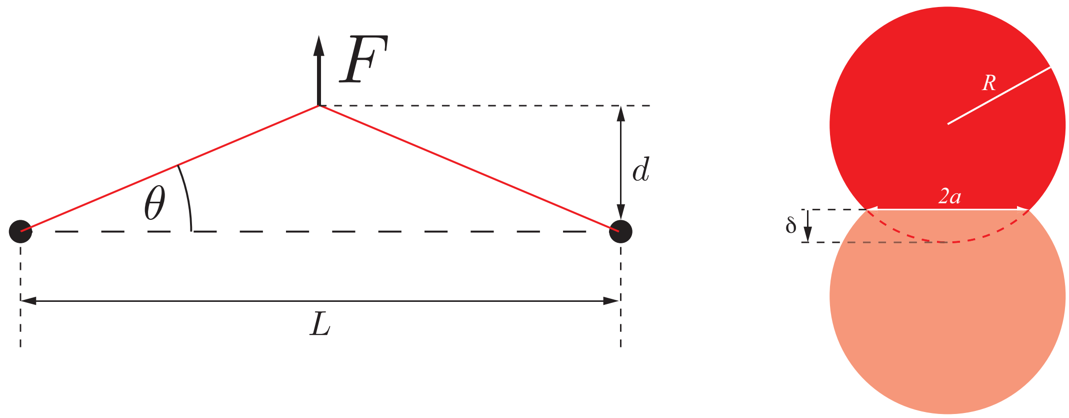

Figure 1: Izquierda: Cuerda tensada. Derecha: Contacto de hertz para un cilindro.

b) Cuando la cuerda se desplaza desde el centro una distancia d y perpendicular a su dirección longitudinal (ver Fig. 1) vea que se debe satisfacer la ecuación de equilibrio

$$F = 2T \sin\theta \tag{2}$$

donde T es la tensión de la cuerda y F es la fuerza para desplazar la cuerda. Compare con la ecuación de Laplace.

c) Notar que según (1) la nota en una cuerda se puede conseguir con un esfuerzo dado no importando el valor de su diámetro, es decir su sección A. Por otra parte si para una nota dada aumentamos demasiado la sección será muy dificil pulsarla porque esto requerirá mucha fuerza según (2). Por otra parte si la sección es muy pequeña una fuerza originará un gran desplazamiento y tocaremos otras cuerdas de la guitarra lo cual tampoco es deseado. Si suponemos que pulsamos con nuestro dedo con una fuerza no mayor a $F \approx 500$ grs. y deseamos desplazar lo máximo posible sin tocar otras cuerdas, es decir $d \approx 1$ cm (distancia típica entre cuerdas de una guitarra), estime el radio que debiera tener una cuerda. Utilice los mismos datos de los Apuntes para una cuerda de Nylon ($f = 300$ Hz, $L = 70$ cm, $\rho = 1.1 \times 10^3$ kg/m^3)

d) Estrictamente la tensión de la cuerda en (2) es la tensión en el estado de equilibrio mostrado en Fig. 1. Esta tensión es distinta de la que existe cuando la cuerda está horizontal, y que llamaremos $T_0 = EA\epsilon_0$, debido a la deformación extra que se aplica al desplazar fuera de la línea horizontal. Demuestre que

$$\frac{T - T_0}{T_0} \approx \frac{2}{\epsilon_0}\frac{d^2}{L^2}$$

y para los valores utilizados en c) vea que esta diferencia es muy pequeña y por tanto despreciable.

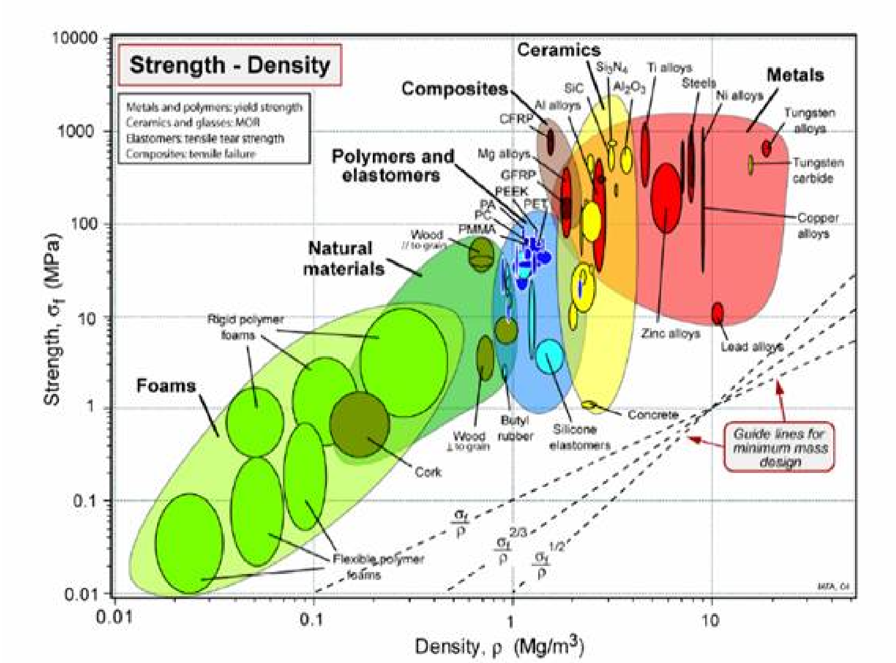

Figure 2: Diagrama de Ashby $\sigma_Y - \rho$.

2.- Cuerda de guitarra II Cuerdas existen de diferentes materiales: acero, nylon, PET, kevlar, etc. Un problema al elegir un material es que su tensión sea tal que superemos el límite elástico del material y su defomación ya no es reversible.

a) Demuestre que en el caso de un metal que suena a una frecuencia f la condición para que la cuerda se deforme elásicamente es dada por

$$(2fL)^2 < \frac{\sigma_Y}{\rho}$$

donde σ_Y es el esfuerzo mas allá del cual hay deformación permanente.

b) Seleccione en un diagrama de Ashby $\sigma_Y - \rho$ (que se incluye) los materiales posibles para los cuales se puede hacer una cuerda de guitarra que suene a $f = 300$ Hz.

3.- Contacto de Hertz Para un cilindro de largo L y radio R en contacto con otro cilindro se observa una zona de contacto plana caracterizada por una distancia a (ver Fig. 1). Estime la fuerza para comprimir los dos cilindros y demuestre que en este caso se cumple la ley de Hooke.

4.- Ruptura o Buckling Se tiene una barra de acero de 1 m de largo y diámetro 1 cm. Suponiendo que la resistencia en compresión es igual a la de tracción encuentre

a) La máxima carga que puede soportar esta barra antes que ocurra una ruptura del material.

b) La máxima carga que puede soportar antes que se pandee suponiendo que está empotrada en ambos bordes.

c) ¿Si se cambia el largo de la barra, para qué largo de la barra puede ser relevante la ruptura por compresión?

Ayuda: El momento de inercia para una barra circular de radio R es $I = \pi R^4/4$ y para una barra de sección cuadrada de lado h es $I = h^4/12$.

Figure 3: Silla en un modelo de tracción y silla en un modelo de compresión.

5.- Tracción o Compresión

Existen dos modelos comparables para sostener una carga: en tracción se sujeta la carga por barras, cables o cuerdas mientras que en compresión las cargas se soportan por barras, pilares, o columnas (ver Fig. 3). Es atractivo usar mas elementos porque en caso que falle uno quedan otros de respaldo lo que técnicamente se conoce como *redundancia*. El problema de la redundancia puede ser su costo en masa que en el caso de un sistema biológico o ingenieril significa mas gasto en producirlo, transportarlo, o mantenerlo.

¿Cuántas barras son necesarias en un diseño simple como el de la Fig. 3? ¿Cuál representa el diseño mas eficiente? Vamos a analizar este problema para un mismo material, carga P y largo L de los elementos, desde el punto de la masa que la estructura o diseño representa. Para ello:

a) Demuestre que en tracción se consigue la misma resistencia a la carga P con diferente número de barras siempre y cuando su sección total sea la misma. Demuestre que la masa mínima de la estructura crece linealmente con el largo de las barras.

b) Dado que en compresión el modo mas peligroso de falla es el de buckling, demuestre que en compresión la masa de la estructura que puede soportar la carga P aumenta con el número de barras[1] como $\sqrt{n}$. ¿Es ventajoso o no producir redundacia cuando se trabaja en compresión en una estructura?. Desde este punto de vista compare un animal de 4 patas con "uno de dos".

[1] Utilice la expresión para buckling dada en los Apuntes.