MEF: Trabajo Práctico 3

1.- Torsión. Una barra de radio a cuyo eje apunta a lo largo del eje $\hat{z}$ se deforma por medio de la transformación

$$x' = \cos\phi x - \sin\phi y$$
$$y' = \sin\phi x + \cos\phi y$$
$$z' = z$$

donde $\phi = \tau z$
a) Encuentre en coordenadas cartesianas el valor exacto de de γ_{yz}. Demuestre que la condición para que la deformación sea pequeña y $\varepsilon_{yz} \approx \gamma_{yz}$ es que $a\tau \ll 1$.
b) Encuentre la condición física para que en este caso γ_{xz} pueda ser aproximado por la expresión lineal en los desplazamientos: $\gamma_{xz} = (\nabla_z u_x + \nabla_x u_z)/2$.

2.- Doblamiento. Una barra de sección cuandrada se dobla de manera que su línea media queda curvada a un radio R como se ve en la Fig. 1. Esto se hace de manera que su línea media no cambia de longitud, es decir el arco de longitud subtendido por la línea media es $s = x$ donde x es la coordenada a lo largo de la línea media antes de la deformación.

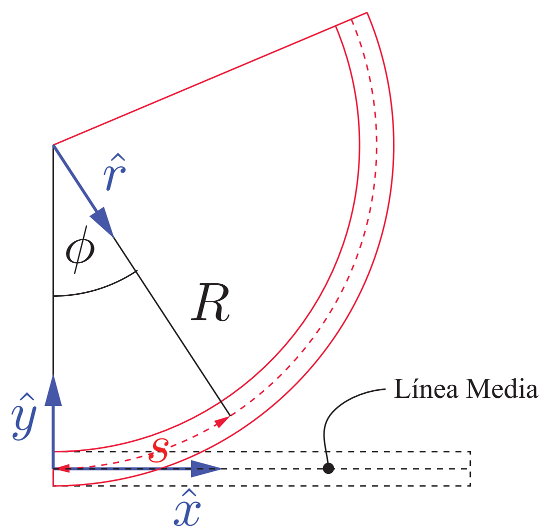

Figure 1: Deformación de doblamiento.

a) Vea que la barra deformada se puede describir por la transformación

$$\vec{x}' = (R + y)\hat{r}(\phi) + R\hat{y}$$

donde $\phi = x/R$.
b) Encuentre los desplazamientos y vea que

$$\gamma_{xx} = \frac{1}{2}[(1 + y/R)^2 - 1]; \qquad \gamma_{yy} = 0; \qquad \gamma_{xy} = 0$$

luego para pequeños espesores $\varepsilon_{xx} \approx y/R$. Encuentre la condición física para que las deformaciones sean pequeñas. Interprete estos resultados.

c) Encuentre las deformaciones $\{\gamma_{xx}, \gamma_{yy}, \gamma_{xy}\}$ utilizando la relación lineal entre deformaciones y desplazamientos. Comparando con b) vea la condición física para la cual utilizar la parte lineal entrega el valor correcto de las deformaciones.

3.- Ecuaciones de Movimiento.

a) Vea que las ecuaciones de movimiento vistas en clases para un cubo inicialmente orientado orientado como se ve en Fig. 2 se pueden también escribir como

$$\rho \vec{a} = \nabla_x \mathbf{F}_x + \nabla_y \mathbf{F}_y + \nabla_z \mathbf{F}_z + \rho \vec{f}$$

donde usamos coordenadas del sistema en reposo y las fuerzas $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$ están definidas por

$\mathbf{F}_x =$ Fuerza por unidad de area aplicada sobre la sección orientada según $\hat{x}'$.
$\mathbf{F}_y =$ Fuerza por unidad de area aplicada sobre la sección orientada según $\hat{y}'$.
$\mathbf{F}_z =$ Fuerza por unidad de area aplicada sobre la sección orientada según $\hat{z}'$.

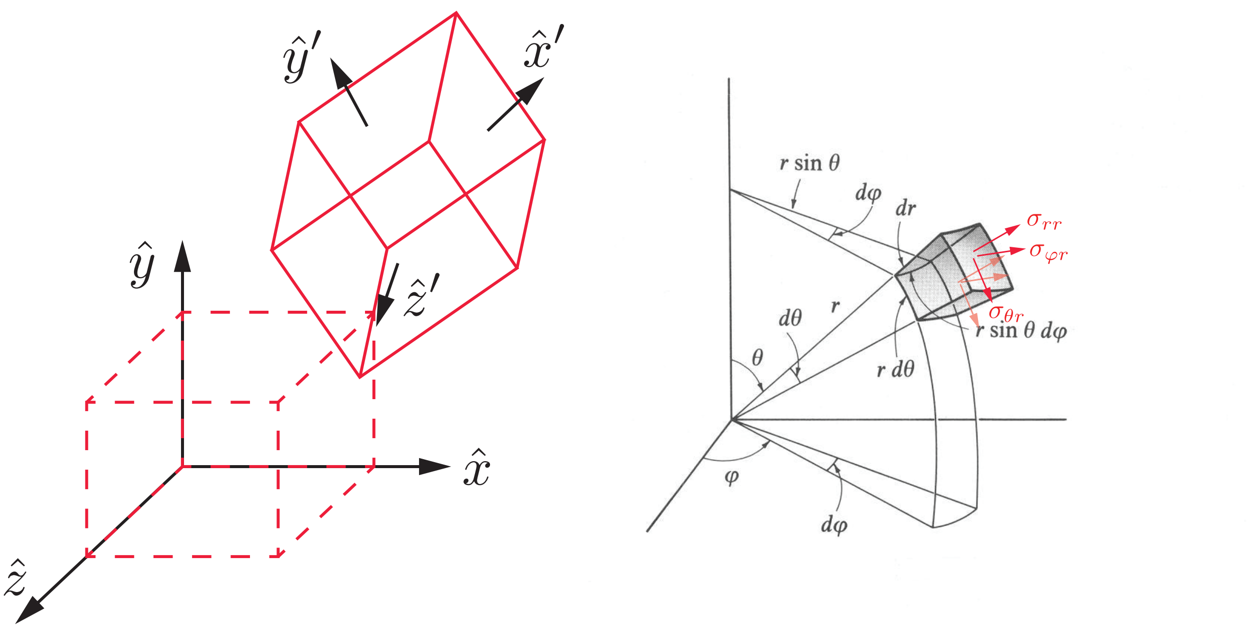

Figure 2: Izquierda: Cubo inicialmente en reposo que bajo pequeñas deformaciones cambia su orientación. Derecha: Coordenadas esféricas.

b) Deduzca que las ecuaciones de equilibrio en coordenadas esféricas (ver Fig. 2) despreciando rotaciones son dadas por

$$\begin{aligned} 0 &= [\nabla_r(\sigma_{rr} r \sin\theta \hat{r}) + \nabla_r(\sigma_{\theta r} r \sin\theta \hat{\theta}) + \nabla_r(\sigma_{\varphi r} r \sin\theta \hat{\varphi}) \\ &+ \nabla_\theta(\sigma_{r\theta} r \sin\theta \hat{r}) + \nabla_\theta(\sigma_{\theta\theta} r \sin\theta \hat{\theta}) + \nabla_\theta(\sigma_{\varphi\theta} r \sin\theta \hat{\varphi}) \\ &+ \nabla_\varphi(\sigma_{r\varphi} r \hat{r}) + \nabla_\varphi(\sigma_{\theta\varphi} r \hat{\theta}) + \nabla_\varphi(\sigma_{\varphi\varphi} r \hat{\varphi})] \end{aligned}$$

Compruebe al menos una de sus ecuaciones comparándolas con lo que se encuentra en textos o wikipedia.

4.- Constantes Elásticas. El primer y segundo (μ, λ) coeficientes de Lamé están definidos para escribir convenientemente la relación esfuerzo deformación en la forma (no consideramos efectos térmicos)

$$\sigma_{ij} = 2\mu\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij}$$

en que μ es el módulo de cizalle (¿por qué?) visto en clases. En *wikipedia* se presenta la siguiente tabla de constantes[1] los cuales, excepto la constante M, ya se han definido en clases ($G = \mu$ en

v · d · e **Elastic moduli for homogeneous isotropic materials** [hide]

Bulk modulus (K) · Young's modulus (E) · Lamé's first parameter (λ) · Shear modulus (G) · Poisson's ratio (ν) · P-wave modulus (M)

Conversion formulas [hide]

Homogeneous isotropic linear elastic materials have their elastic properties uniquely determined by any two moduli among these, thus given any two, any other of the elastic moduli can be calculated according to these formulas.

	(λ, G)	(E, G)	(K, λ)	(K, G)	(λ, ν)	(G, ν)	(E, ν)	(K, ν)	(K, E)	(M, G)
$K =$	$\lambda + \frac{2G}{3}$	$\frac{EG}{3(3G-E)}$			$\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$			$M - \frac{4G}{3}$
$E =$	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$		$\frac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda}$	$\frac{9KG}{3K+G}$	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$	$2G(1+\nu)$		$3K(1-2\nu)$		$\frac{G(3M-4G)}{M-G}$
$\lambda =$		$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$		$K - \frac{2G}{3}$		$\frac{2G\nu}{1-2\nu}$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{3K\nu}{1+\nu}$	$\frac{3K(3K-E)}{9K-E}$	$M - 2G$
$G =$			$\frac{3(K-\lambda)}{2}$		$\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$		$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$\frac{3KE}{9K-E}$	
$\nu =$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	$\frac{E}{2G} - 1$	$\frac{\lambda}{3K-\lambda}$	$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$					$\frac{3K-E}{6K}$	$\frac{M-2G}{2M-2G}$
$M =$	$\lambda + 2G$	$\frac{G(4G-E)}{3G-E}$	$3K - 2\lambda$	$K + \frac{4G}{3}$	$\frac{\lambda(1-\nu)}{\nu}$	$\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}$	$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{3K(1-\nu)}{1+\nu}$	$\frac{3K(3K+E)}{9K-E}$	

Figure 3: Tabla de Constantes

esta notación). La tabla hace patente que sólo dos parámetros son necesarios para describir las ecuaciones y muestra cómo encontrar un parámetro cualquiera cuando ya se ha escogido un par. Utilizando las definiciones vistas en clases justifique cuidadosamente los valores de cada columna (no considere M pero vea el problema a continuación).

5.- Sonido.
a) Demuestre que, despreciando efectos de rotaciones, la ecuación de movimiento de un sólido elástico se puede escribir como:

$$\rho\partial_t^2\mathbf{u} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\nabla^2\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})\right] + \mathbf{f} \tag{1}$$

que en equilibrio y en presencia de gravedad el vector desplazamiento obedece la ecuación biharmónica

$$\nabla^2\nabla^2\vec{u} = 0$$

b) Suponga que existe sólo un desplazamiento que cambia según la posición horizontal, es decir $u_x = u_x(x)$, $u_y = u_y(x)$ y $u_z = u_z(x)$. Demuestre que la ecuación (1) se transforma en

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u_x &= c_l^2\nabla_x^2 u_x\\ \partial_t^2 u_y &= c_t^2\nabla_x^2 u_y\\ \partial_t^2 u_z &= c_t^2\nabla_x^2 u_z\end{aligned}$$

donde

$$c_l^2 = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{E}{\rho}; \qquad c_t^2 = \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{E}{\rho}$$

son las velocidades de onda transversales y longitudinales respectivamente.

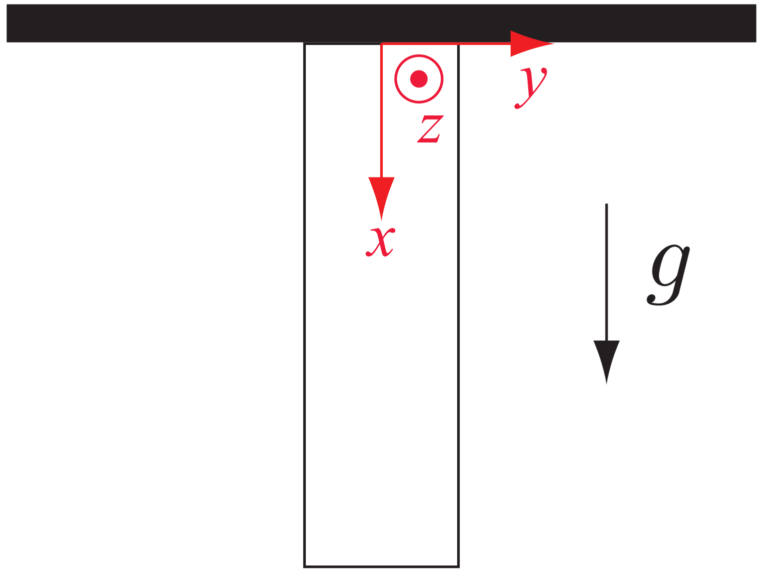

Figure 4: Columna colgante

c) Demuestre que $c_t < c_l$ y encuentre estas velocidades para goma, acero, madera, y PET.

6.- Dibuje y NO Calcule. Basado en las fuerzas aplicadas, los efectos dados por el módulo de Young y coeficiente de Poisson, y las condiciones de borde impuestas dibuje (exageradamente):
a) La forma de un disco de radio R y espesor constante h cuando rota a alta frecuencia. En especial estudie la forma de la sección a un ángulo dado.
b) La forma de una esfera de radio R cuando rota en torno a un eje a alta frecuencia. Prediga cómo se ve la esfera cortada por un meridiano.
c) La forma de la sección de una barra de sección cuadrada cuando se dobla.
d) La forma de una esfera puesta sobre una superficie rígida y deformada por su propio peso.

7.- Columna Traccionada por Gravedad. Una columna de sección cuadrada de lado h y largo L se cuelga de su punto central O y se deforma por su propio peso.
a) Encuentre las condiciones de borde apropiadas para este problema.
b) Resuelva las ecuaciones de equilibrio. Encuentre las deformaciones y luego los desplazamientos.
c) Dibuje la barra antes y después de la deformación. Discuta la forma de la barra producto de la deformación.

[1]Ver $http://en.wikipedia.org/wiki/Elastic\_modulus$