# MEF: Trabajo Práctico 4

**1.- Catenaria.** Suponga una cuerda de largo $L$ la cual tiene aplicada una fuerza externa $\vec{K} = -\sigma g \hat{y}$ donde $g$ es la gravedad y $\sigma$ es la densidad por unidad de línea.
a) Demuestre que la fuerza sobre cada sección se puede escribir como

$$\vec{F} = \sigma g s \hat{y} + \vec{F}_0$$

donde $s$ es la distancia a lo largo de la línea media partiendo desde el lado izquierdo. Utilizando la condición física que la barra es una cuerda y suponiendo que en $s = L/2$ la cuerda está en su punto mas bajo (ver Fig. 1), argumente que $\vec{F}|_{s=L/2} = T\hat{x}$. Luego deduzca

$$\vec{F} = \sigma g (s - L/2)\hat{y} + T\hat{x}$$

e interprete $T$.

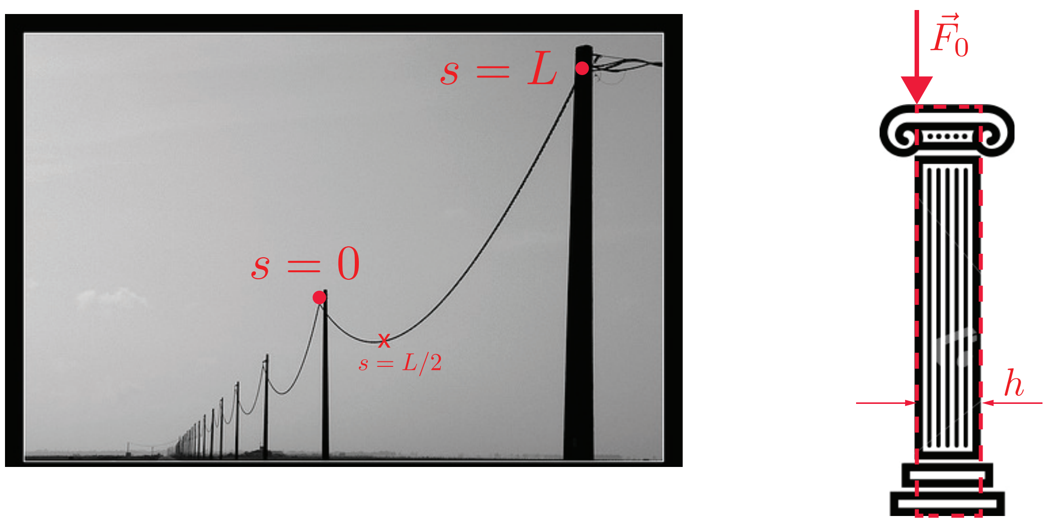


Figure 1: Izquierda: Cable eléctrico deformado en forma de catenaria debido a su propio peso. Derecha: Columna sometida a una carga sobre su borde lo cual genera momentos peligrosos.

b) Demuestre que la tangente a la cuerda está dada por

$$\hat{t} = \frac{\hat{x} + \sigma g \bar{s}/T \hat{y}}{\sqrt{1 + (\sigma g \bar{s}/T)^2}}$$

donde usamos $\bar{s} = s - L/2$. Dado que $\hat{t} = d\vec{r}/ds = dx/ds\hat{x} + dy/ds$, en que la curva está descrita paramétricamente por[1] $\vec{r}(s) = x(s)\hat{x} + y(s)\hat{y}$, encuentre las ecuaciones

$$\frac{dx'}{d\bar{s}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\sigma g \bar{s}/T)^2}}; \qquad \frac{dy'}{d\bar{s}} = \frac{\sigma g \bar{s}/T}{\sqrt{1 + (\sigma g \bar{s}/T)^2}}$$

c) Integre las ecuaciones anteriores tomando el origen del sistema de coordenadas en el punto mas bajo de la cuerda. Demuestre que

$$x(\bar{s}) = \frac{T}{\sigma g} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sigma g \bar{s}}{T}\right); \qquad y(\bar{s}) = \frac{T}{\sigma g}\left(\sqrt{1 + (\sigma g \bar{s}/T)^2} - 1\right)$$

[1] Siguiendo la notación del curso debieramos escribir $\vec{r}(x) = x'(x)\hat{x} + \hat{y}'(x)\hat{y}$, pero esta notación es muy pesada para usarla aquí.

luego esta curva escrita en la forma $y = y(x)$ es

$$y = \frac{T}{\sigma g}\left[\cosh\left(\frac{\sigma g x}{T}\right) - 1\right]$$

lo que se denomina *Catenaria*.

**2.- Columna** Se aplica sobre una columna de sección cuadrada y lado $h$ una fuerza vertical en uno de sus bordes el cual produce tracción en la columna
a) Dibuje la posicion de la línea resultante de la fuerza, de la superficie neutra y de la línea media.
b) Si la columna se hace de manera que su peso ayude a su estabilidad y por lo mismo a evitar tracciones. Encuentre y dibuje la posición de la linea resultante cuando se agrega esta variable. Suponga que el material tiene una densidad de masa $\rho$.
c) Investigue qué ocurre con la resultante cuando se aumenta la sección de la columna. Por un lado el torque ejercido será mayor y también la posibilidad de una tracción, pero por otra parte aumenta el peso (a densidad constante). Discuta.

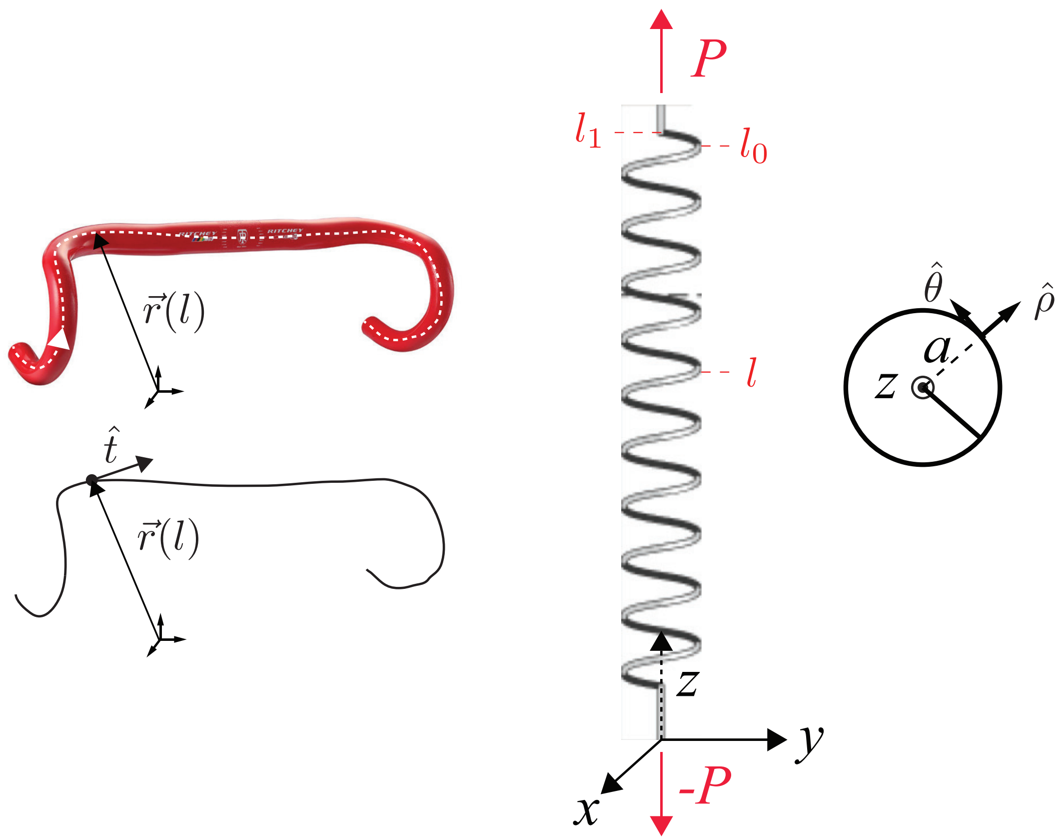


Figure 2: Izquierda: Definición de la línea media en el manubrio de una bicicleta. Derecha: Configuración para un resorte muy rígido en el cual las espiras están casi en contacto una con otra antes de la deformación, es decir $\hat{t} \approx \hat{\theta}$

**3.- Barras Curvas** Aunque las ecuaciones de equilibrio fueron deducidas en clases para una barra que inicialmente tiene su línea media recta, podemos expandir nuestra deducción a barras que son inicialmente curvas e investigar su equilibrio en la aproximación de pequeñas deflecciones. Para ello

a) Dada la curva $\vec{r}(l)$ que describe la línea media de la barra (ver Fig. 2) en su estado inicial sin cargas aplicadas cuya tangente es $\hat{t} = d\vec{r}/dl$, demuestre que para pequeñas deflecciones las ecuaciones de equilibrio son

$$\frac{d\vec{F}}{dl} + \vec{K} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d\vec{M}}{dl} + \hat{t} \times \vec{F} = 0 \tag{2}$$

donde suponga que las fuerzas externas tienen su resultante en la línea media. Defina cuidadosamente $\vec{F}$ y $\vec{M}$ de las ecuaciones anteriores.

b) Utilice el formalismo anterior para estudiar las fuerzas y momentos en un resorte muy rígido definido por la Fig. 2 el cual se tracciona con una fuerza igual y opuesta en sus extremos. Para ello vea que en la región en que la espira es circular la fuerza es $\vec{F} = \vec{P} = P\hat{z}$ y el momento es aproximadamente

$$\vec{M} = aP\hat{\theta} + \vec{M}_0$$

donde $\vec{M}_0$ es una constante de integración.

c) Deduzca el valor de $\vec{M}_0$ analizando cuidadosamente la región que une la espira con el punto de aplicación de la fuerza en $l = L$. Una vez determinado el momento describa cómo espera que se deforme la espira en cada región definida en Fig. 2, es decir $l < l_0$, $l_0 < l < l_1$, $l_1 < l < L$.