MEF: Trabajo Práctico 5

1.- Galileo: Ley del cuadrado/cubo Vamos a analizar la ley de escalamiento propuesta por Galileo que se muestra en Fig. 1 y que textualmente resumió en la frase "Yo creo que un perro pequeño puede llevar sobre sus espaldas 2 o 3 perros del mismo tamaño, en cambio dudo que un caballo pueda llevar a otro sobre sus espaldas", es decir la resistencia de una estructura no escala geométricamente.

Para estudiar este problema vamos a suponer que la masa total de la estructura, M_T, es proporcional a la masa de la viga M_V, es decir $M_V = \alpha M_T$ con $\alpha < 1$, por lo que analizaremos el problema de la deflexión de una viga por el peso $W = gM_T = gM_V/\alpha$ distribuido sobre ella, tal como se muestra en Fig. 1

a) Demuestre que los momentos en la barra para pequeña deflexión son $M = W(x - x^2/L)/2$ y que la máxima deflexión es

$$y_{max} = \frac{5}{384}\frac{WL^3}{EI}$$

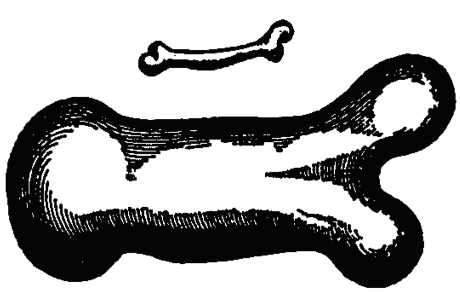
justo en el centro de la viga.

b) Demuestre que el máximo esfuerzo de compresión y tracción sobre la viga está dado por

$$\sigma_{max} = \frac{LR}{8EI} \times W$$

donde suponemos que la viga es cilíndrica y de radio R. Deduzca de esta relación que cuando el sistema aumenta el doble de tamaño de forma que $R' = 2R$ y $L' = 2L$ los esfuerzos disminuyen en un factor 2^2 para una carga fija. Si por otra parte el peso aumenta como el volumen en un factor 2^3, esto muestra que a medida que crece la estructura su resistencia estará en problemas... si la mantenemos con igual forma. Esto se conoce como la ley del cuadrado/cubo.

c) Deduzca que para que no exista ruptura en la viga a medida que aumenta el tamaño del sistema se debe cambiar la forma de manera que que $L^2 \sim R$, que corresponde a lo que se dibuja en Fig. 1.



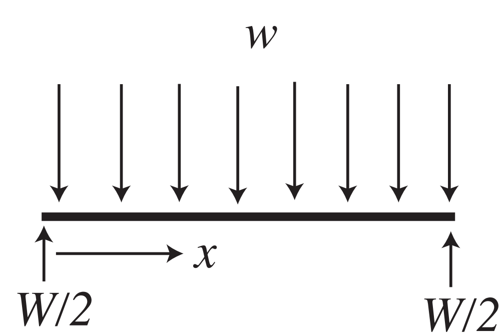


Figure 1: Izquierda: La figura de Galileo ilustra su ley del cuadrado-cubo que se traduce en que el hueso inferior de un largo 3 veces mayor que el pequeño tiene que tener un ancho 9 veces mayor para igualar su resistencia a la ruptura. Derecha: Deflexión de una viga debido a su propio peso $W = wL$ donde w es la fuerza por unidad de línea.

2.- Fórmulas Deflexión Demuestre las siguientes fórmulas clásicas (ver anexo 2 en libro de J.E. Gordon) para pequeña rotación ($\hat{t} \approx \hat{x}$) de una barra de largo L:

a) Peso uniformemente distribuido $W = wL$ (ver Fig. 2)

$$M = \frac{1}{2}\frac{W}{L}x^2 \,\text{en x},\; M_{max} = \frac{1}{2}WL\,\text{en B},\; y = \frac{1}{24}\frac{W}{EIL}(x^4 - 4L^3x + 3L^4),\; y_{max} = \frac{1}{8}\frac{WL^3}{EI}$$

b) Columna con peso en el centro y que descansa sobre dos pilares en sus extremos (ver Fig. 2)

$$M = \frac{1}{2}Wx\,\text{de A a B},\; \frac{1}{2}W(L-x)\,\text{de B a C},\; M_{max} = \frac{WL}{4}\,\text{en B},\; y = \frac{1}{48}\frac{W}{EI}(3L^2x - 4x^3)\,\text{de A a B},\; y_{max} = \frac{1}{48}\frac{WL^3}{EI}\text{en B}$$

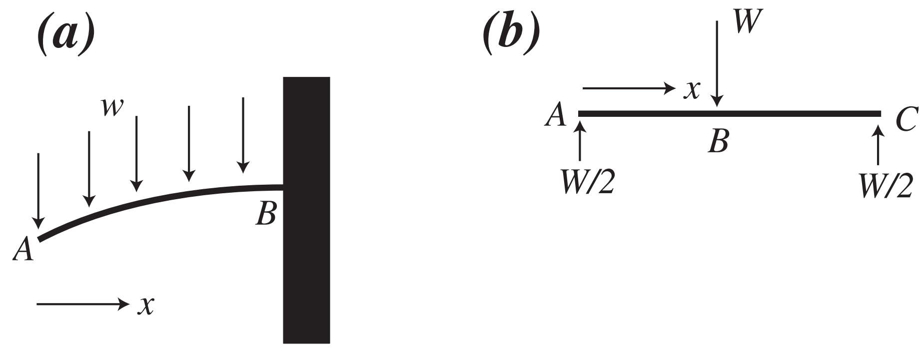


Figure 2: Deflexión de barras.

3.- Módulo de Rigidez Considere un filamento que se empotra en un borde y al cual se le aplica una carga P mucho mayor que el peso del filamento por lo que despreciamos esto último. Debido a la carga aplicada y la flexibilidad del filamento se produce un gran desplazamiento del filamento y luego éste "cae" y luce como en la Fig. 3, donde aparece una distancia H que corresponde a la distancia entre la pared y el filamento.
a) Vea que la ecuación de equilibrio para los momentos es en este caso

$$EI\ddot{\phi} - P\cos\phi = 0$$

donde el ángulo ϕ y coordenadas están dados por la Fig. 3 y de aquí demuestre que existe una primera integral dada por

$$EI\frac{\dot{\phi}^2}{2} - P\sin\phi = const$$

y luego argumente que ello implica que

$$EI\frac{\dot{\phi}_0^2}{2} = P$$

donde $\dot{\phi}_0$ es la curvatura en $s = 0$.
c) Demuestre que la ecuación de equilibrio se puede escribir también como

$$EI\ddot{\phi} - P\dot{x} = 0$$

y que por tanto existe la primera integral $EI\dot{\phi} - Px = const$ y de aquí argumente que se satisface la relación

$$EI\dot{\phi}_0 = -PH$$

d) Concluya que

$$H = \left(\frac{2EI}{P}\right)^{1/2}$$

Tome un filamento muy flexible de un material del cual conozca su módulo de Young E y prepare la configuración de la Fig. 3 aplicando una carga conocida P. Del valor de P y H mida el valor de EI. Compare con el valor que se obtiene de primeros principios, es decir, utilizando E y los parámetros geométricos de la sección.

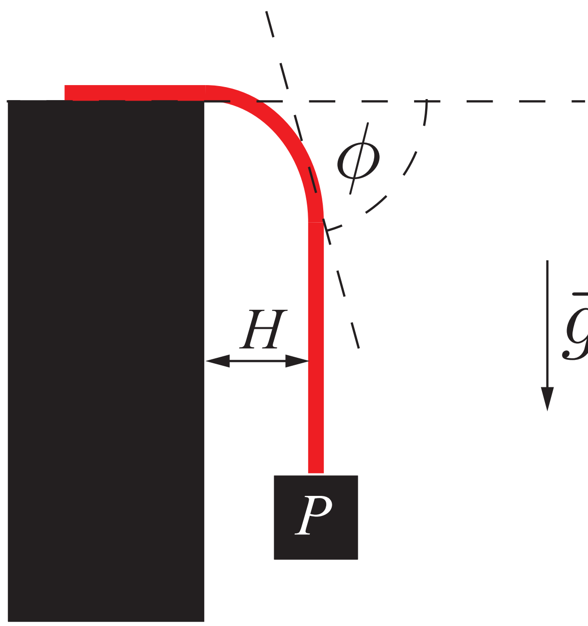


Figure 3: Filamento muy flexible que cae por gravedad. Debido a la rigidez de doblamiento el filamento conserva una distancia H con la pared. Para la notación utilizada en clases el ángulo ϕ en la figura es negativo.

4.- Fórmulas de Buckling Demuestre las siguientes fórmulas para el valor crítico de buckling de una barra de módulo de Young E, largo L y momento de inercia I:
a) Barra comprimida con bordes sujetos por pivotes: $F_c = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$
b) Barra con los dos bordes empotrados: $F_c = 4\pi^2 \frac{EI}{L^2}$
c) Compare estos resultados con el cálculo del valor crítico estudiado en clases y explique porqué las condiciones de borde alteran la resistencia del material al pandeo. Demuestre que al igual que en el problema de Galileo, la resistencia al pandeo de la estructura escala como el cuadrado del tamaño (si su forma no cambia).

5.- Altura de los árboles Una restricción para la altura máxima de los árboles es su resistencia al doblamiento por su propio peso. Una varilla muy delgada tenderá a doblarse por su peso si su radio es muy pequeño (menor resistencia al doblamiento) o si es demasiado larga (mayor peso). Esta hipótesis puramente mecánica supone que sólo interesa las propiedades elásticas del material y su geometría que evitan el pandeo del árbol.
Para determinar la relación entre estos parámetros Greenhill realizó el siguiente experimento en 1881: tomando astas de diferente diámetro se preguntó qué tan alto puede ser antes de que se

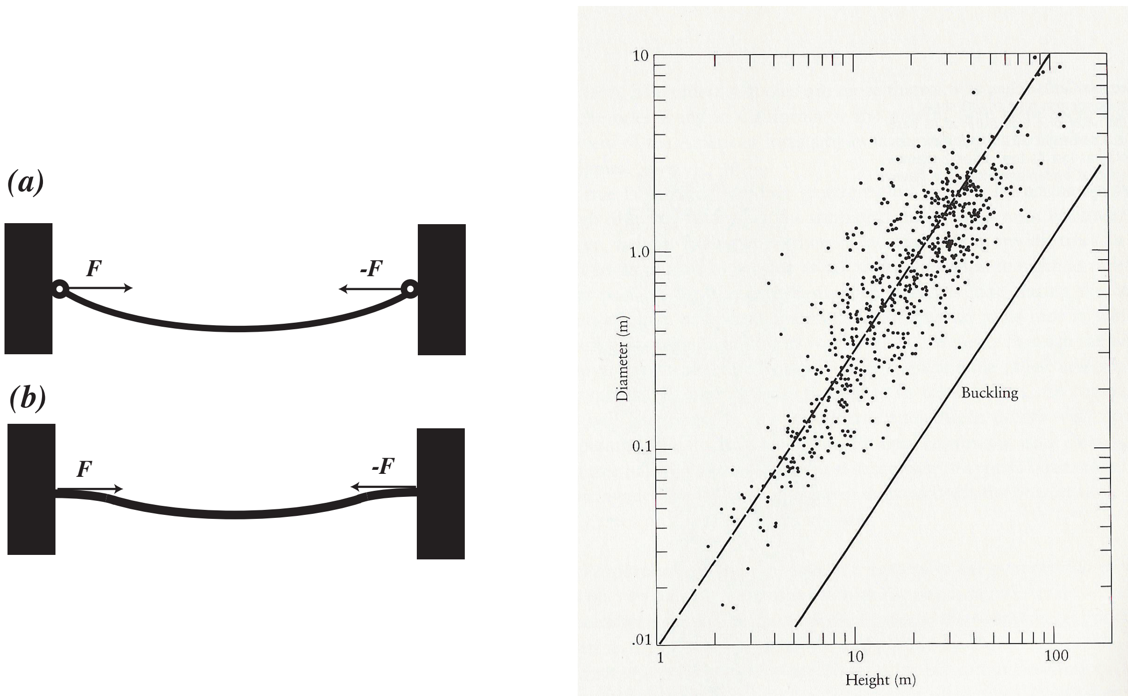


Figure 4: Izq.: Buckling de una barra para dos condiciones de borde diferentes. Der.: Experimentos de Greenhill

pandee por su propio peso. El resultado esta mostrado en la línea "Buckling" de la Fig. 4 junto con un catastro hecho de todos los árboles de America del Norte (los puntos). El gráfico Log-Log de la figura muestra una relación $R \sim L^{3/2}$ entre el diámetro y la altura. Discuta y explique la condición encontrada por Greenhill.