Primer parcial - 12/10/2018

Resuelva los ejercicios en hojas separadas; utilice $|g| = 10\frac{m}{s^2}$

Justifique todos sus razonamientos

1. **(3.5pts)** Una bolita de masa M se encuentra sobre una superficie semicircular sin rozamiento y de radio R, unida por una soga ideal e inextensible a un bloque de masa m. La soga siempre sigue a la forma de la superficie.

   a) Haga los diagramas de cuerpo libre para ambos cuerpos, escriba las ecuaciones de Newton correspondientes e indique cuáles son los vínculos que genera la soga.

   b) Se observa que cuando la masa del bloque vale 0.2kg, la posición de equilibrio para la bolita es de 10° respecto a la vertical. Calcule entonces el valor de la masa M.

   c) Estando el sistema en equilibrio se corta la soga. Asumiendo pequeñas oscilaciones en la ecuación de Newton de la bolita, indique cuál es su frecuencia de oscilación y su posición de equilibrio. De una expresión para la posición y para la velocidad en función del tiempo e indique cómo calcularía las constantes que aparecen en ellas.

2. **(3pts)** Sobre un bloque de masa m_2 se encuentra apoyado un bloque de masa m_1, al cual se le aplica una fuerza $\mathbf{F}$ como se muestra en la figura. Ambos cuerpos se mueven sin que haya desplazamiento entre ellos. Existe rozamiento tanto entre los bloques como entre el bloque inferior y la superficie.

   a) Discuta qué tipo de rozamiento hay presente entre los bloques. Haga un diagrama de cuerpo libre para cada uno e indique claramente los pares de interacción presentes en el sistema.

   b) Escriba las ecuaciones de Newton correspondientes y las condicones de vínculo entre los bloques.

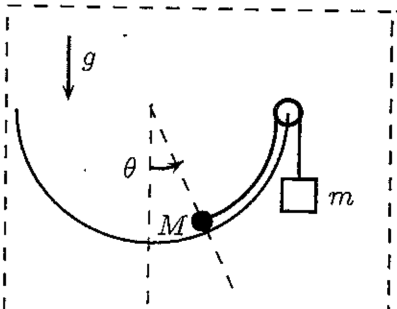
   c) Para el caso en que los cuerpos se mueven a velocidad constante, calcule el máximo módulo que puede tomar la fuerza $\mathbf{F}$ (considere como dato a m_1, m_2, α, g y todos los coeficientes de rozamiento que necesite). Analice el resultado obtenido en función de los parámetros del problema.

3. **(3.5pts)** Un proyectil de masa $m = 0{,}05$kg es impulsado, desde el reposo, por un resorte de constante elástica $K = 125$N/m que está comprimido 25cm. Luego de atravesar un tramo de $L = 4$mts con coeficiente de rozamiento μ_d, el proyectil choca plásticamente con un cuerpo de masa $M = 0{,}25$kg. Finalmente, ambos cuerpos ascienden juntos por un plano inclinado $\beta = 35°$ respecto a la horizontal.

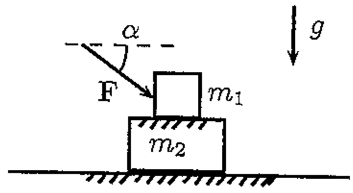
   a) Discuta, desde que el proyectil está en contacto con el resorte hasta que los cuerpos alcanzan la altura máxima, si se conservan el momento lineal y la energía mecánica en cada una de las etapas del recorrido.

   b) Luego del choque plástico el cuerpo mM adquiere una velocidad $V = 2m/s$. Calcule la velocidad del proyectil justo antes del impacto y coeficiente de rozamiento del tramo horizontal.

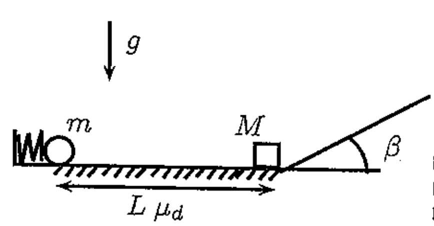
   c) Halle la altura máxima que alcanzará el cuerpo mM. Discuta si esta altura depende o no del ángulo β y de la velocidad que traía el proyectil antes del choque con M.



Problema 1

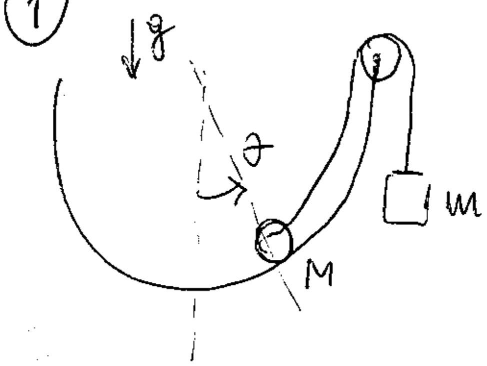


Problema 2

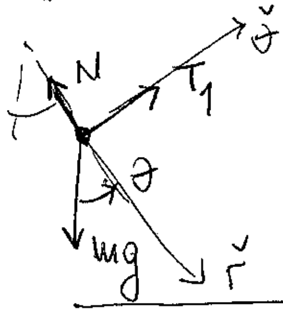


Problema 3

(1) a) DCL, ecs Newton y Vínculos (I)



Bolita: uso coordenadas polares



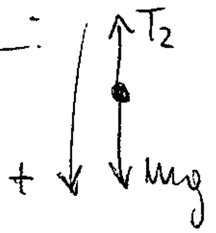
$\breve{r})\ -N + Mg\cos\theta = M(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$

como $r = R$ es cte $\Rightarrow \ddot{r} = 0$

luego: $\boxed{-N + Mg\cos\theta = -MR\dot{\theta}^2}$

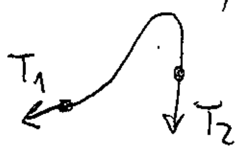
$\boxed{\breve{\theta})\ -Mg\,\mathrm{sen}\theta + T_1 = MR\ddot{\theta}}$

Bloque:



$mg - T_2 = m\ddot{X}$

Soga → Vínculos



•) sin masa $\Rightarrow$

$T_2 - T_1 = \cancel{m_{soga}}\, a$

$\boxed{T_2 = T_1}$

•) Inextensible: $\ddot{X} = R\ddot{\theta}$

b) Posición de equilibrio:

$\ddot{X} = R\ddot{\theta} = 0$ y $\theta_{eq} = 10°$

Para el bloque vale $T = mg$. Uso esto en la ec $\breve{\theta})$ de la bolita:

$$-Mg\,\mathrm{sen}\theta_{eq} + mg = 0 \Rightarrow \boxed{M = \frac{m}{\mathrm{sen}\,\theta_{eq}}}$$

Usando los datos:

$$M = \frac{0{,}2\,\mathrm{kg}}{\mathrm{sen}(10°)} =$$

c) Se corta la soga: escribo la nueva ec de Newton para la bolita

$\breve{r})\ -N + Mg\cos\theta = -MR\dot{\theta}^2$

$\breve{\theta})\ -Mg\,\mathrm{sen}\theta = MR\ddot{\theta}$

Usando ~~la~~ aprox. de pequeñas oscilaciones, $\mathrm{sen}\theta \simeq \theta$, la ec $\breve{\theta})$ queda: $-\cancel{M}g\theta \simeq \cancel{M}R\ddot{\theta} \Rightarrow$

$\ddot{\theta} \simeq -\frac{g}{R}\theta$, que es de la forma $\ddot{X} = -\omega^2(X - X_{eq})$

siendo $\omega^2 = g/R$ la frec de oscilacion y

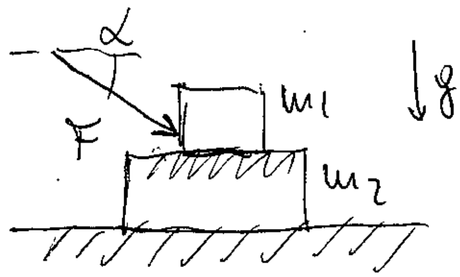
$\theta_{eq} = 0$ (la vertical) su posición de equilibrio.

La solución a la ecuación de movimiento es

$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$, $\dot{\theta}(t) = -\theta_0 \omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$

donde θ_0 y ϕ se obtienen a partir de las condiciones iniciales para la posición y velocidad angular.

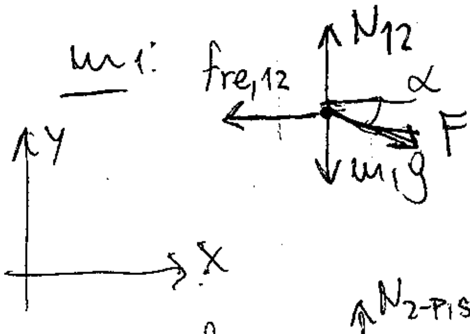
2)



a) Los bloques se mueven sin que haya deslizamiento relativo entre ellos. Por lo tanto, el rozamiento entre m_1 y m_2 debe ser estático.

DCL:

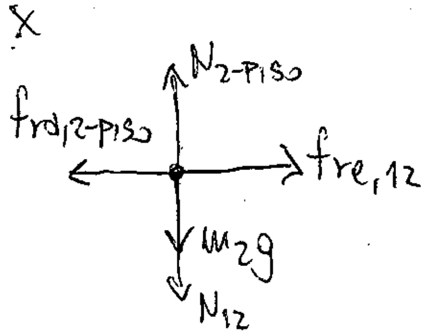
m_1:



b) x) $F\cos\alpha - fre_{,12} = m_1 \ddot{X}_1$

y) $N_{12} - m_1 g - F \operatorname{sen}\alpha = 0$

m_2:



x) $fre_{,12} - frd_{,2\text{-}p} = m_2 \ddot{X}_2$

y) $N_{2\text{-}p} - m_2 g - N_{12} = 0$

Vínculo: $\ddot{X}_1 = \ddot{X}_2 \rightarrow$ los bloques avanzan juntos

c) Los cuerpos avanzan a velocidad cte $\Rightarrow$ $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0$. (II)

Por lo tanto

$$① \begin{cases} F\cos\alpha - fr_{e,12} = 0 & (1x) \\ N_{12} - m_1 g - F\,\text{sen}\,\alpha = 0 & (1y) \end{cases} \qquad ② \begin{cases} fr_{e,12} - fr_{d,2-p} = 0 & (2x) \\ N_{2-p} - m_2 g - N_{12} = 0. & (2y) \end{cases}$$

De la ecuación (1x) despejo F:

$$F\cos\alpha = fr_{e,12} \leq \mu_{e1} N_{12}$$

de la ec (1y) N_{12}: $\quad N_{12} = m_1 g + F\,\text{sen}\,\alpha \Rightarrow$

$$F\cos\alpha \leq \mu_{e1}(m_1 g + F\,\text{sen}\,\alpha)$$

$$F\cos\alpha - \mu_{e1} F\,\text{sen}\,\alpha \leq \mu_{e1} m_1 g$$

$$F(\cos\alpha - \mu_{e1}\,\text{sen}\,\alpha) \leq \mu_{e1} m_1 g$$

$$\boxed{F \leq \frac{\mu_{e1} m_1 g}{\cos\alpha - \mu_{e1}\,\text{sen}\,\alpha}}$$

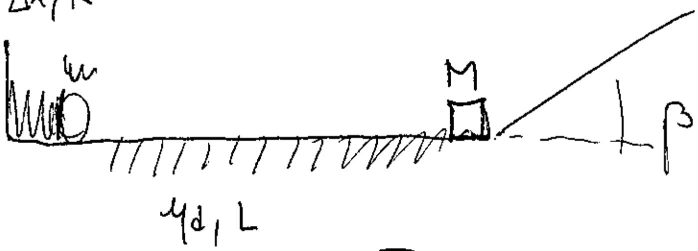
•) Las unidades están bien:

$$[F] = \frac{[\mu]\cdot[\text{Peso}]}{[\text{adimensional}]} \quad ✓$$

•) Cuanto más pesado sea m_1 mayor fuerza puedo aplicar

•) Cuanto mayor sea el rozamiento, ~~mas~~ más fuerza puede aplicarse sobre m1: esto se ve en el factor que está en el numerador ($\mu_{e1}\cdot m_1 g$) como en el denominador, ya que al aumentar el término $\mu_{e1}\cdot\text{sen}\,\alpha$ ~~para~~ el denominador ~~se~~ se hace más chico, con lo que aumenta el posible valor de F.

③ $\Delta x, K$



a) Conservación de $\overline{P}$ y E_{mec}

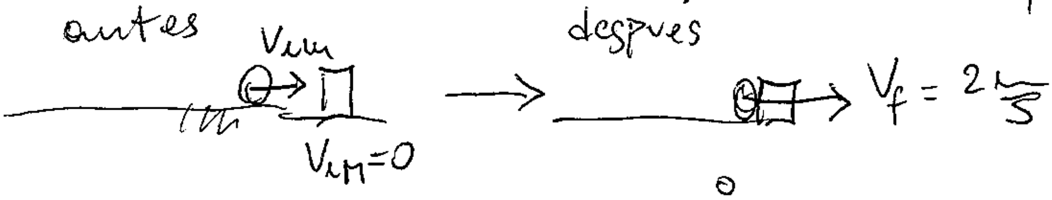
i) bolita en contacto con el resorte: el momento lineal de la bolita no se conserva ya que el resorte ejerce sobre ella una fuerza que la acelera, haciendo variar su velocidad y, por lo tanto, su momento lineal. La energía mecánica del sistema bolita-resorte sí se conserva: toda la energía elástica del resorte es transformada en cinética de la bolita.

ii) bolita en la zona de rozamiento: no se conserva el momento lineal, el roz. desacelera a la bolita. Tampoco se conserva la energía mecánica, ya que en este tramo se disipa energía.

iii) Choque plástico m-M: es un choque → se conserva el momento lineal del sistema m-M. Como es plástico se pierde energía cinética ⇒ no se conserva la energía mecánica.

iv) ascenso por la rampa: como no hay rozamiento la energía mecánica se conserva. Pero no así el momento lineal, ya que en la subida el peso ~~ejerce una fuerza que~~ desacelera a ambos cuerpos.

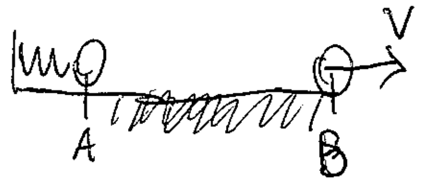
b) Luego del choque $V = 2\,m/s$: $m = 0{,}05\,kg$ $M = 0{,}25\,kg$ (III)



Uso $\Delta P_{sis} = 0 \Rightarrow m V_{im} + \cancel{M V_{iM}}^{\,0} = (m+M) V_f$

$$\Rightarrow \boxed{V_{im} = \frac{m+M}{m} V_f} \quad , \quad V_{im} = 12\frac{m}{s}$$

V_{im} es la velocidad justo antes del choque y la vel con la que sale de la zona con rozamiento. O sea, el estado final del primer tramo:



$E_{mec,A} = \frac{1}{2} K \Delta X^2$
$E_{mec,B} = \frac{1}{2} m V_{im}^2$
Ambos son dato (ahora)

Calculando la pérdida de energía mecánica entre A y B puedo encontrar cuánto vale el coef de rozamiento:

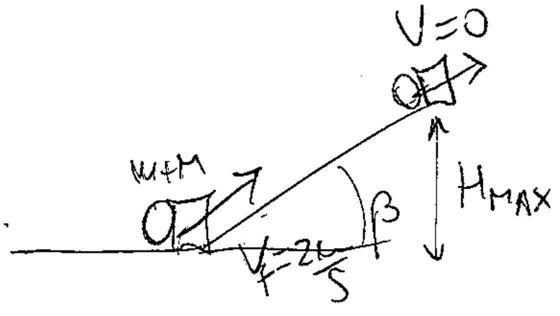
$$E_{MB} - E_{MA} = W_{ROZ}$$

$K = 125\,N/m$, $\Delta X = 0{,}25\,m$
$L = 4\,mts$

$$\frac{1}{2} m V_{im}^2 - \frac{1}{2} K \Delta X^2 = -\mu_d\, m g \cdot L$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_d = \frac{K \Delta X^2 - m V_{im}^2}{2 m g L}} \quad , \quad \mu_d = 0{,}153125$$

c) Altura máxima luego del choque:



La energía mecánica se conserva, por lo tanto:

$$\frac{1}{2} \cancel{(m+M)} V_f^2 = \cancel{(m+M)}\, g\, H_{MAX}$$

$$\boxed{H_{MAX} = \frac{V_f^2}{2g}} \quad , \quad H_M = 0{,}2\,mts$$

H_M: es indep^te de β pero no de la vel que traía el proyectil, ya que V_f depende de esta velocidad.