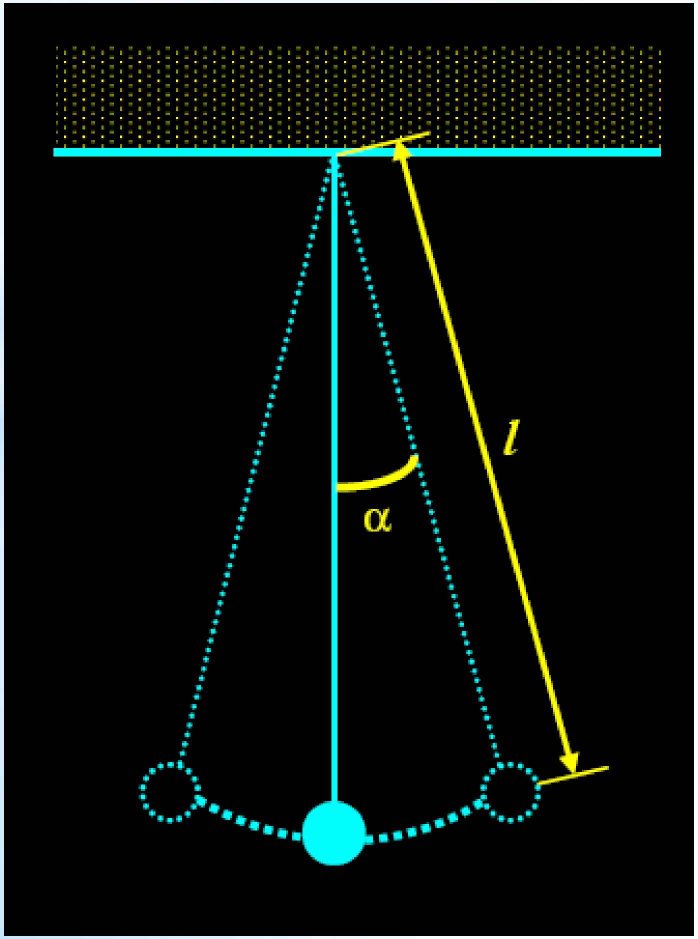
Péndulo Simple
Cuadrados Mínimos

Laboratorio 1

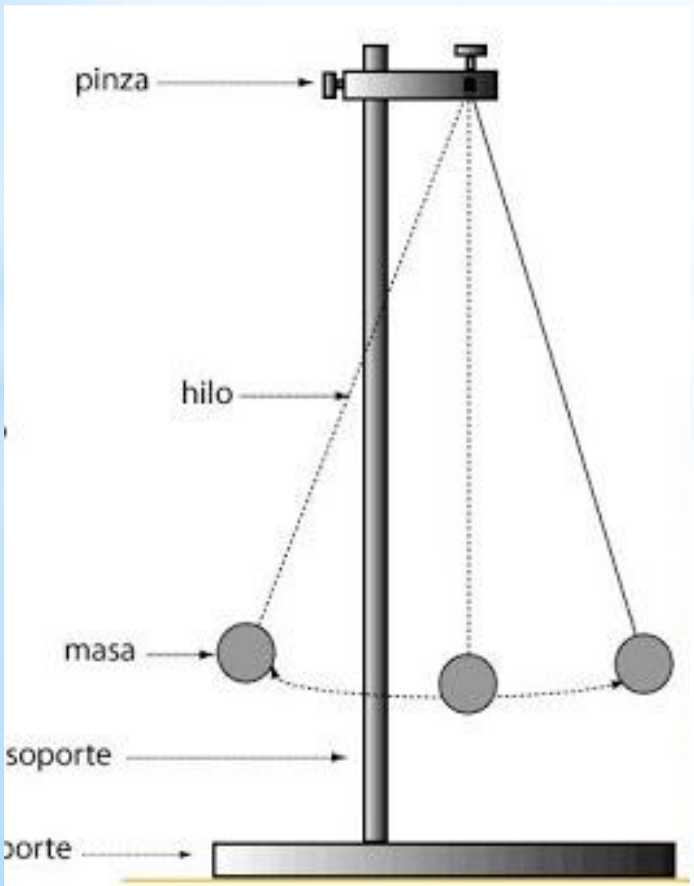
Departamento de Física –FCEyN - UBA

PÉNDULO

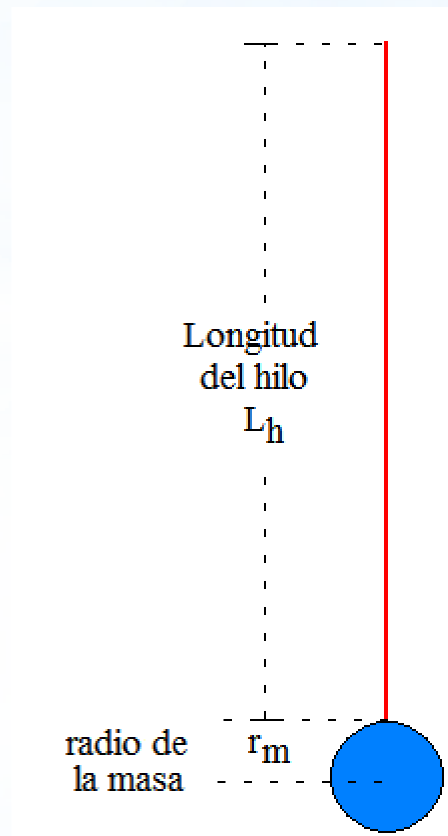


El **péndulo simple** (también llamado **péndulo ideal**) es un sistema idealizado constituido por una partícula de masa ***m*** que está suspendida mediante un hilo inextensible y sin peso. Naturalmente es imposible la realización práctica de un péndulo simple, pero si es accesible a la teoría.

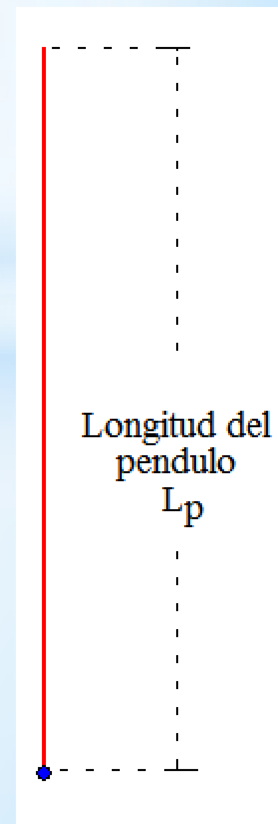
PÉNDULO



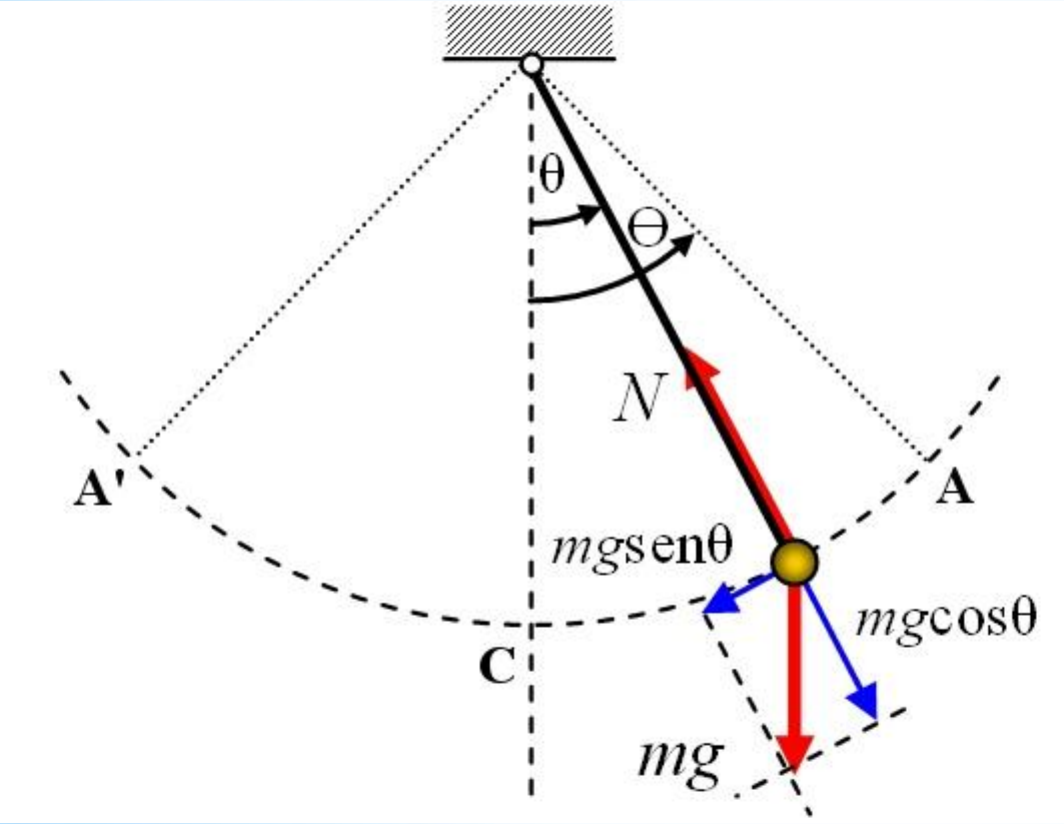
Caso real



Caso ideal



PÉNDULO



Ecuación de Movimiento:

$$F_t = -mg\sin\theta = ma_t$$

Relación entre aceleración tangencial y angular:

$$a_t = \ell\ddot{\theta}$$

Ecuación diferencial del movimiento plano del péndulo simple:

$$\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

PÉNDULO: aproximación de pequeñas oscilaciones

Ecuación de Movimiento: $\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$

Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %	Θ(º)	Θ(rad)	senΘ	dif. %
0	0,00000	0,00000	0,00	15	0,26180	0,25882	1,15
2	0,03491	0,03490	0,02	20	0,34907	0,34202	2,06
5	0,08727	0,08716	0,13	25	0,43633	0,42262	3,25
10	0,17453	0,17365	0,51	30	0,52360	0,50000	4,72

Ecuación de movimiento armónico simple: $\ell\ddot{\theta} + g\theta = 0$

Solución: $\theta = \Theta\sin(\omega t + \phi)$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

PÉNDULO: aproximación de pequeñas oscilaciones

Donde T es el Período:

Tiempo utilizado en realizar una oscilación completa, llegamos a:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \text{ec .9}$$

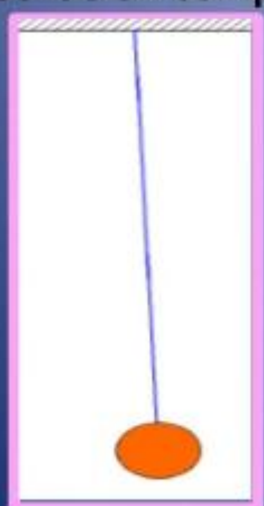


Fig. 2

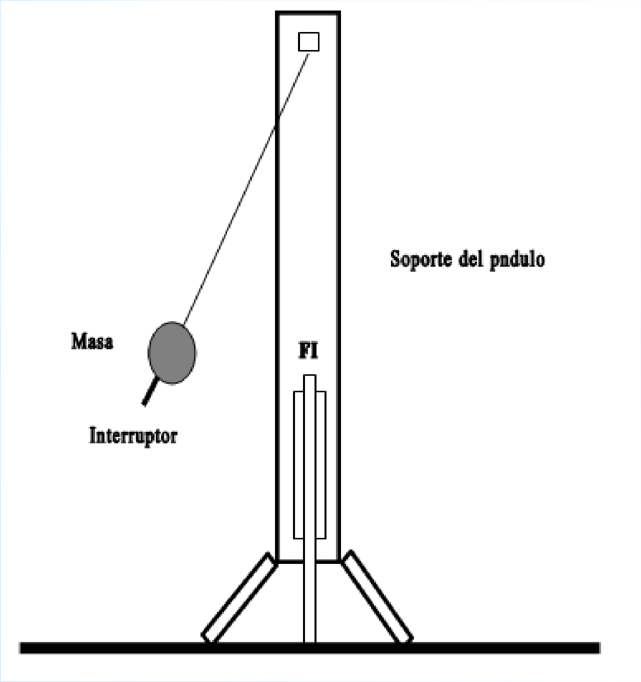
g es la gravedad cuyo valor es 9.8m/s^2
L es la longitud de la cuerda

CONCLUSION: ESTA ECUACION SUGIERE QUE ESTAS MAGNITUDES DEPENDEN SÓLO DE LA LONGITUD DEL HILO Y DE LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD.

http://blogmazuera.files.wordpress.com/2012/02/pendulo-simple.gif?w=460

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física
Juan José Giambiagi

PÉNDULO: experimento



- Preparar el experimento según el esquema.

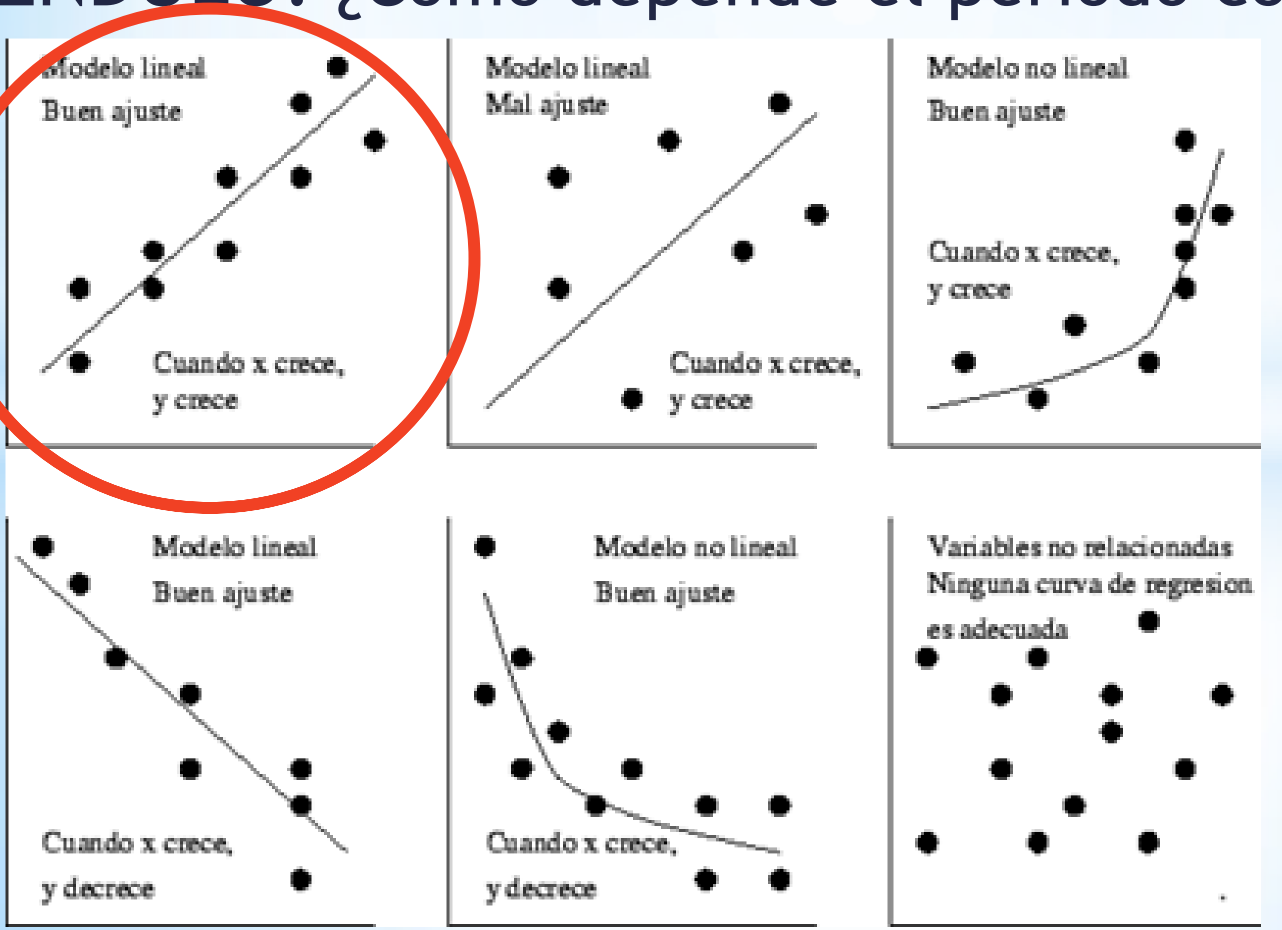
- Rango de variación de la longitud del péndulo
  Longitud mínima: masa puntual.
  Longitud máxima: condiciones del equipamiento.

- Amplitud inicial del péndulo (el modelo considera ángulos pequeños). Determinar en forma aproximada el ángulo máximo admisible para que el período sea aproximadamente constante.

- Paso de variación en la longitud del péndulo.

- Realizar el experimento para al menos 10 diferentes longitudes del péndulo.

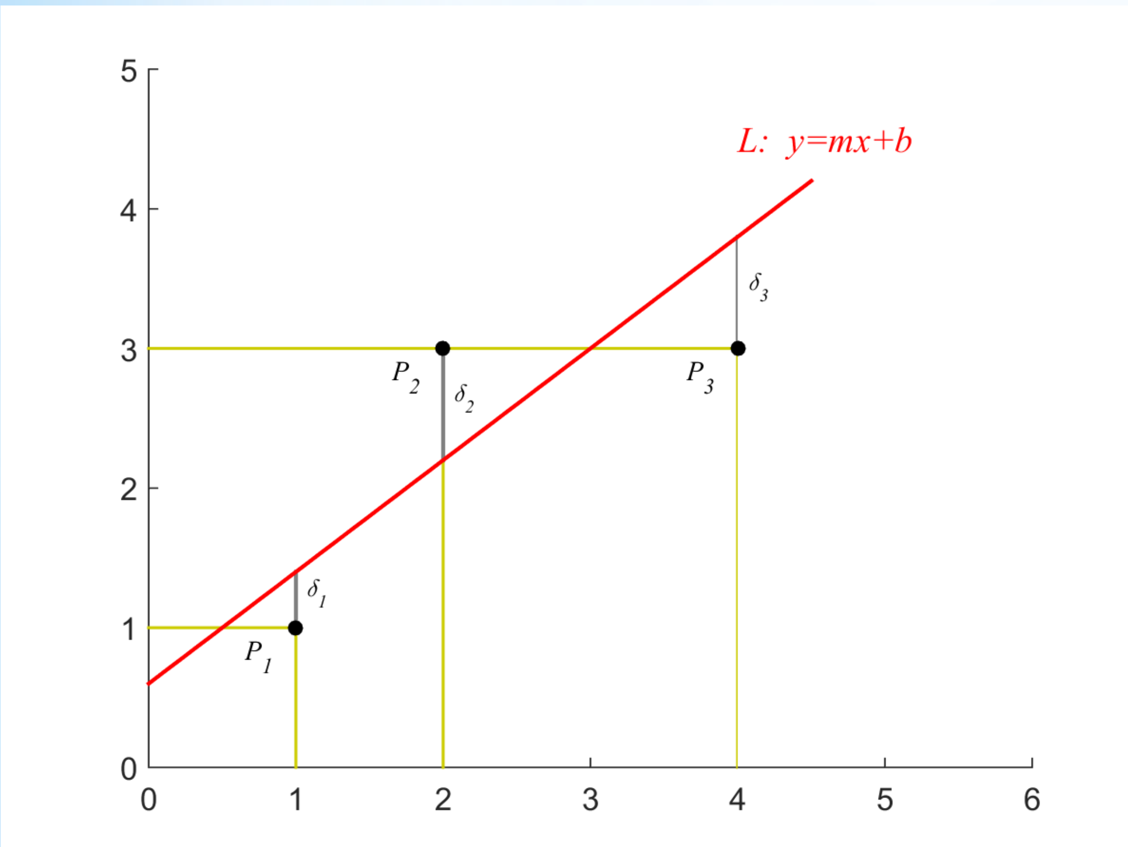
PÉNDULO: ¿Cómo depende el período con la longitud?



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{l}}$$

¿Cómo encontramos la mejor recta que ajuste nuestros datos?



$$y = mx + b$$

$$\delta y_i = y_i - (mx_i + b)$$

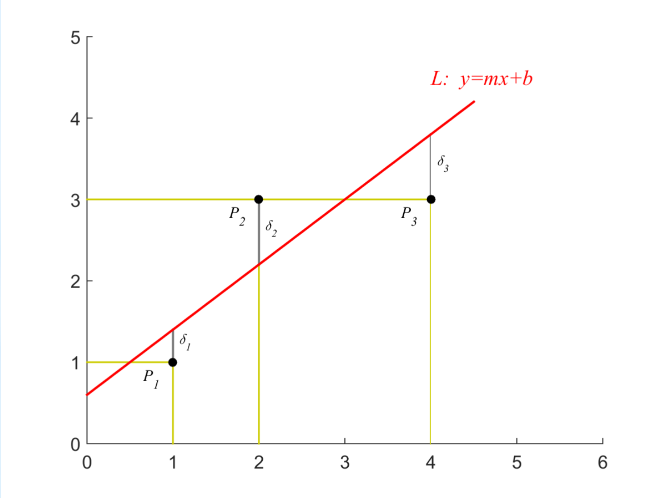
$$(\delta y_i)^2 = [y_i - (mx_i + b)\ ]^2$$

$$M = \sum(\delta y_i)^2$$
$$= \sum y_i{}^2 + m^2\sum x_i{}^2 + nb^2 + 2mb\sum x_i - 2m\sum x_i y_i - 2b\sum y_i$$

¿Cómo encontramos la mejor recta que ajuste nuestros datos?

Mejor recta: la que minimice M

$$\boxed{y = mx + b}$$



$$M = \sum(\delta y_i)^2 = \sum {y_i}^2 + m^2 \sum {x_i}^2 + nb^2 + 2mb\sum x_i - 2m\sum x_i y_i - 2b\sum y_i$$

$$\frac{\partial M}{\partial m} = 0 \qquad \frac{\partial M}{\partial b} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2m\sum {x_i}^2 + 2b\sum x_i - 2\sum(x_i y_i) = 0 \\ 2nb + 2m\sum x_i - 2\sum y_i = 0 \end{array} \right.$$

$$m = \frac{n\sum(x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum(x_i y_i)}{n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

universidad de buenos aires - exactas
departamento de física
Juan José Giambiagi

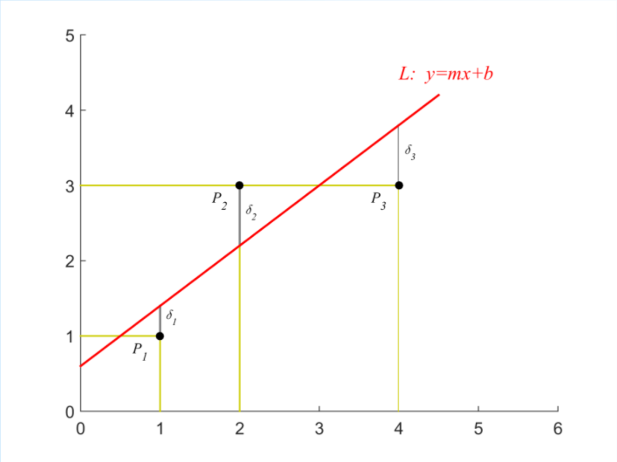
¿Cómo encontramos la mejor recta que ajuste nuestros datos?

m y b son funciones de y_i

$$m = \frac{n\sum(x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum {x_i}^2 \sum y_i - \sum x_i \sum (x_i y_i)}{n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

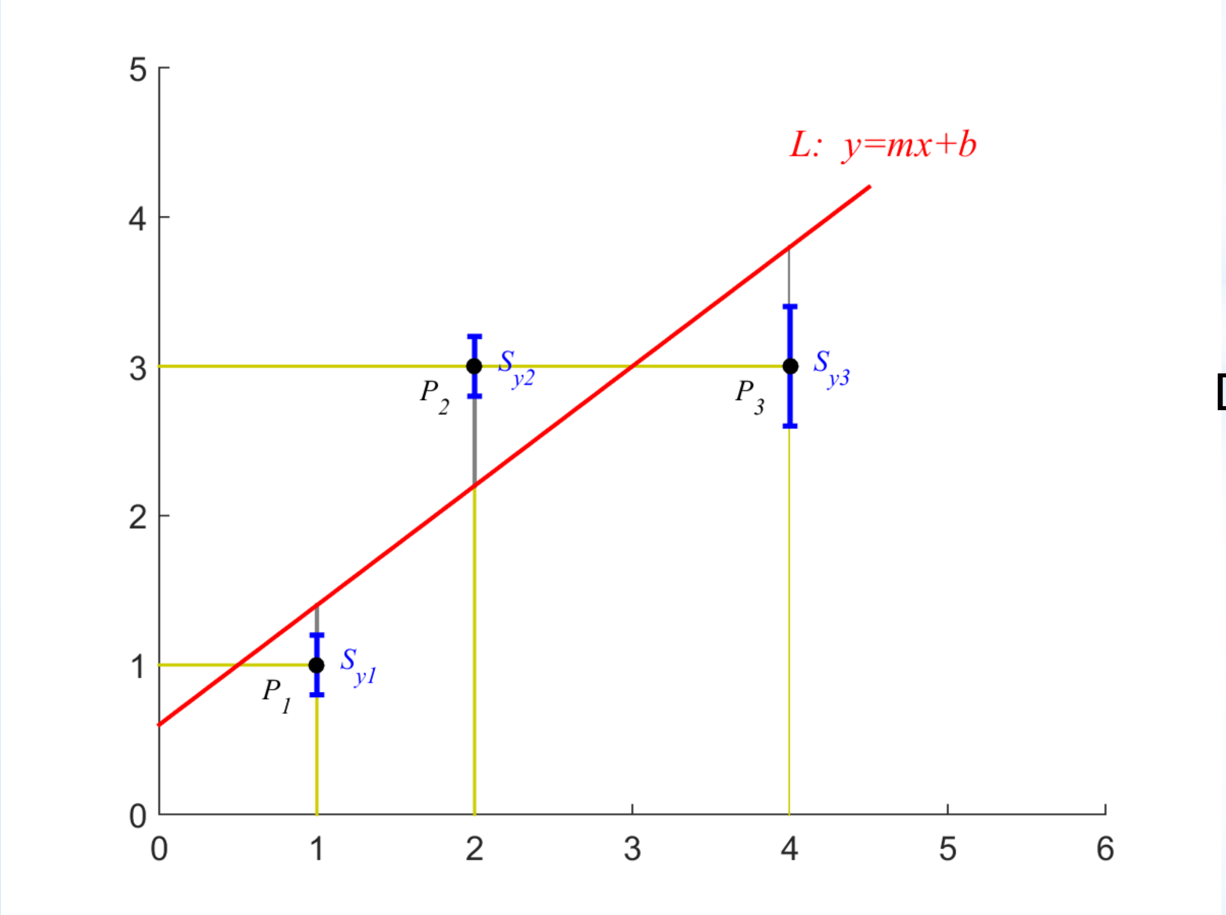
$$S^2 = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)^2 {s_{yi}}^2$$



$$\delta y_i = y_i - (m x_i + b)$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum {\delta_i}^2}{N-2}}$$

¿Todos los puntos son equivalentes? ¿Confiamos mas en alguno que en otro?



Media ponderada

$$\bar{x} = \frac{\sum \frac{x_i}{S_i^{\,2}}}{\sum \frac{1}{S_i^{\,2}}}$$

Desviación standard de la media ponderada

$$S^2 = \frac{\sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_i^{\,2}}}{(N-1)\sum \frac{1}{S_i^{\,2}}}$$

¿Todos los puntos son equivalentes? ¿Confiamos mas en alguno que en otro?

Cuadrados mínimos ponderados

$$b = \frac{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} y_i \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} {x_i}^2 - \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i y_i}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} {x_i}^2 - \left(\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i\right)^2}$$

$$m = \frac{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} (x_i y_i) - \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} y_i}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{1}{(S_{yi})^2} {x_i}^2 - \left(\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} x_i\right)^2}$$

¿Todos los puntos son equivalentes? ¿Confiamos mas en alguno que en otro?

Cuadrados mínimos ponderados: incertezas

$$S_m{}^2 = \frac{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2}}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{x_i{}^2}{(S_{yi})^2} - \left(\sum \frac{x_i}{(S_{yi})^2}\right)^2}$$

$$S_b{}^2 = \frac{\sum \frac{x_i{}^2}{(S_{yi})^2}}{\sum \frac{1}{(S_{yi})^2} \sum \frac{x_i{}^2}{(S_{yi})^2} - \left(\sum \frac{x_i}{(S_{yi})^2}\right)^2}$$

[https://www.che.udel.edu/pdf/FittingData.pdf]