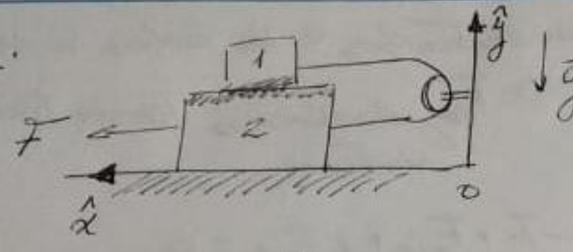
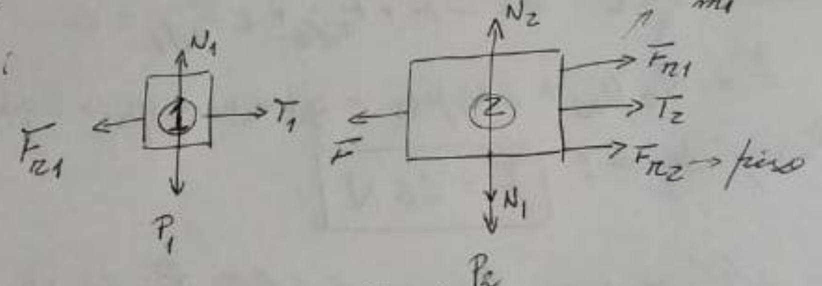
Ej 1.

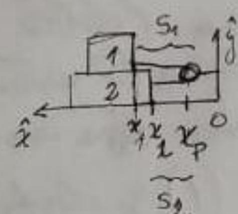


La caja 1 se mueve de Izq a DERECHA ($\ddot{x}_1 < 0$) y la 2 de Derecha a Izq ($\ddot{x}_2 > 0$)

DCL:



Con mi SR:



$L = S_1 + S_2$

$\Rightarrow L = (x_2 - x_p) + (x_1 - x_p)$

$\Downarrow$ derivando, como x_p está fija

$0 = \ddot{x}_2 + \ddot{x}_1 \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2}$

Tiene sentido!

A su vez, como la soga es ideal $\Rightarrow |T_1| = |T_2| = T$

Entonces: $m_1)\ \hat{x})\ F_{R1} - T_1 = m_1 \ddot{x}_1 \qquad \hat{y})\ N_1 - P_1 = m_1 \ddot{y}_1 = 0$

$m_2)\ \hat{x})\ F - T_2 - F_{R2} - F_{R1} = m_2 \ddot{x}_2 \qquad \hat{y})\ N_2 - P_2 - N_1 = m_2 \ddot{y}_2 = 0$

$\Rightarrow$ Reemplazando: $m_1)\ \hat{x})\ F_{R1} - T = m_1 \ddot{x}_1 \qquad \hat{y})\ N_1 = m_1 g$

$m_2)\ \hat{x})\ F - T - F_{R2} - F_{R1} = -m_2 \ddot{x}_1 \qquad \hat{y})\ N_2 = g(m_2 + m_1)$

Restando $\hat{x}$) $F_{r1} - T - (F - T - F_{r2} - F_{r1}) = m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_1$

$$-F + F_{r2} + 2F_{r1} = (m_1+m_2)\ddot{x}_1 \quad (1)$$

b) El sistema se mueve a $\vec{v}$ = cte, además como mis cajas están conectadas a la polea se van a mover entre si $\Rightarrow$ F_{roz} dinámico para todo mi sistema

Entonces $\ddot{x}_{1/2} = 0 \Rightarrow -F + F_{rd2} + 2F_{rd1} = 0$

$$F = N_2\mu_{2d} + 2N_1\mu_{1d} = g(m_1+m_2)\mu_{2d} + 2gm_1\mu_{1d}$$

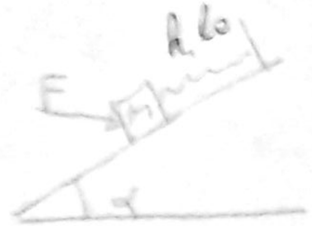
Reemplazo: $\boxed{F = 26\,N}$

c) Se aplica una fuerza el doble $\tilde{F} = 52\,N$, las F_s's de roz no cambian porque el sistema se sigue moviendo. Pero ahora aparecen las aceleraciones.

Si reemplazo en (1) y despejo:

$$\frac{-52\,N + 18\,N + 8\,N}{6\,kg} = \ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$$

$\boxed{\ddot{x}_1 = -4,\hat{3}\,\frac{m}{s}}$ tiene sentido porque la caja 1 se mueve en contra de mi SR



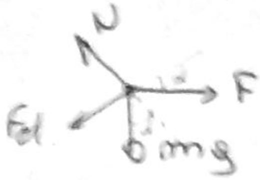
$\alpha = 30°$

$M = 0{,}5\ kg$

$l_0 = 10\ cm$

$F = 8{,}7\ N$

a)



D.C.L

Primero defino el sist de referencia, tomo el origen en el extremo del resorte y los x creciendo hacia la masa.

→ Ec Newton

$\hat{x}$) $-k(x-l_0) - F\cos\alpha + mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = m\ddot{x}$

$\hat{y}$) $N - mg\cos\alpha - F\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0$

b) Para calcular la posición de equilibrio uso la ecuación de Newton en $\hat{x}$.

$$\Rightarrow \frac{-F\cos\alpha + mg\,\mathrm{sen}\,\alpha + kl_0}{m} = \ddot{x} + \frac{k}{m}x$$

equilibrio

$x = x_{eq} \rightarrow \ddot{x} = 0$

$$\Rightarrow x_{eq} = -\frac{F\cos\alpha}{k} + \frac{mg}{k}\,\mathrm{sen}\,\alpha + l_0 \quad ☆$$

obs: 1) si $\alpha = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\,\alpha = 0 \rightarrow$ tengo el equilibrio en l_0 – algo que es $\propto$ a F.

2) si $\alpha = 90° \Rightarrow$ como $F \perp$ resorte No cambio x_{eq} (¡ojo en el otro eje!) y aparece el peso!

→ Ahora si: $x_{eq} = \frac{l_o}{2}$ ⇒ uso *

$$\frac{l_o}{2} = -\frac{F\cos\alpha}{k} + \frac{mg}{k}\operatorname{sen}\alpha + l_o$$

reemplazo:

$$k = \left(-F\cos\alpha + mg\operatorname{sen}\alpha\right) / \left(-\frac{l_o}{2}\right)$$

$$\left(-8.7N\cos 30° + 0.5\,kg \cdot 10\frac{m}{s^2}\operatorname{sen}30°\right) / \left(-0{,}05\,m\right) = 100{,}7\frac{N}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{k = 100{,}7\ N/m}$$

c) $t=0$ $\quad x(t=0) = l_o/2$

$\dot{x}(t=0) = 0$

ojo: Nuevo equilibrio no es más $l_o/2$ porque $F=0$ ahora ⇒ sistema oscila!

Nueva ecuación movimiento

$$\rightarrow \underbrace{g\operatorname{sen}\alpha + \frac{k}{m}l_o}_{particular} = \underbrace{\ddot{x} + \frac{k}{m}x}_{homogénea}$$

resuelvo $x(t) = \underbrace{A\cos(\omega t + \phi)}_{homogénea} + \underbrace{x_{eq}^{nueva}}_{particular}$

A, ϕ ⇒ parámetros que dependen de las c.i.

ω, x_{eq}^{nueva} → del sistema

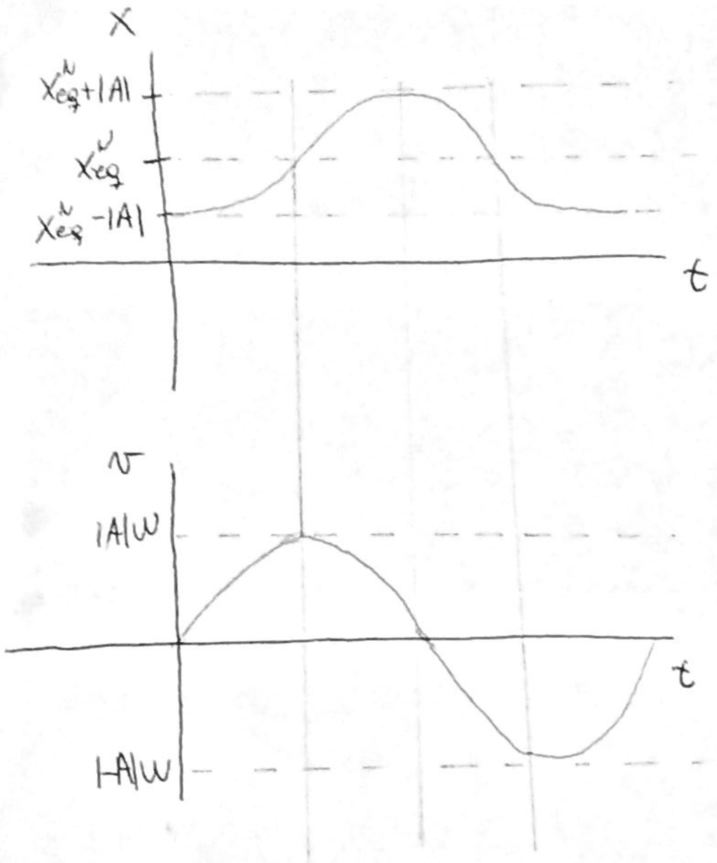
$\omega^2 = k/m$; (hay que mostrarlo ¿cómo?)

$x_{eq}^{nueva} = \frac{mg}{k}\operatorname{sen}\alpha + l_o$; obs: peso "mueve" la pos. equilibrio

$$x(t=0) = l_o/2 = A\cos\phi + \frac{mg}{k}\operatorname{sen}\alpha + l_o \quad (1)$$

$$\dot{x}(t=0) = 0 = -A\omega\operatorname{sen}\phi \Rightarrow \phi = 0. \quad (2)$$

(2) en (1): $A = -\left(\frac{mg}{k}\operatorname{sen}\alpha + \frac{l_o}{2}\right) = -0{,}075\,m$


x
$x_{eq}^{N}+|A|$
x_{eq}^{N}
$x_{eq}^{N}-|A|$
t
v
$|A|\omega$
$-|A|\omega$
t

Problema 3

a) Al destrabarse el resorte, la bolita (que inicialmente se encuentra en el punto O) sufre la acción de la fuerza elástica (además del peso y la normal en la dirección vertical) que la empuja desde el punto O hasta la posición en la cual el resorte alcanza su longitud natural. En dicho punto, la bolita alcanza su velocidad máxima y se separa del resorte. A partir de dicho instante, la bolita solo se encuentra afectada por las fuerzas peso y normal, y recorre un trayecto horizontal desconocido sin cambiar su velocidad, hasta llegar a A. El hecho de que en parte del tramo O-A la bolita se encuentre afectada por el resorte y en otra parte no, evidencia la utilidad de aplicar teoremas de conservación para calcular la velocidad en A, y en particular, aquel que vincula la energía mecánica con el trabajo de las fuerzas no conservativas: $\Delta E_{M,O-A} = W_{O-A}^{\vec{F}_{NC}}$.

La energía mecánica de la bolita se conserva en el tramo O-A ya que la única fuerza no conservativa presente es la normal, y ésta no hace trabajo en ningún punto de la trayectoria entre O y A pues es perpendicular al desplazamiento. Por lo tanto, la energía mecánica es constante en todo punto entre O y A. En particular, resulta conveniente elegir como cero de potencial gravitatorio el suelo, de modo tal que los puntos O, A, B y C se encuentren a una altura H respecto del mismo. Dado que la bolita se encuentra inicialmente en reposo y sometida a la acción del resorte (que se encuentra comprimido $\Delta x = |l - l_0|$) en el punto O, vemos que:

$$\Delta E_{M,O-A} = W_{O-A}^{\vec{F}_{NC}} = 0 = E_{M,A} - E_{M,O} = \{\cancel{mgH} + \frac{1}{2}mv_A^2\} - \{\cancel{mgH} + \frac{1}{2}k\Delta x^2\}. \quad (1)$$

Entonces,

$$v_A = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x = 7.2 \text{ m/s}. \quad (2)$$

b) En el tramo A-B, la bolita se encuentra sometida a dos fuerzas no conservativas: la normal y la fuerza de rozamiento dinámica ($\vec{F}_{R_d}$) con el suelo. La primera (que es no nula y por la ecuación de Newton sabemos que en módulo vale mg) sigue siendo perpendicular al desplazamiento por lo cual no hace trabajo sobre la bolita. Sin embargo, el trabajo de la fuerza de rozamiento no es nulo, y se calcula como:

$$W_{A-B}^{\vec{F}_{R_d}} = \int \vec{F}_{R_d} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B |\vec{F}_{R_d}| \cos\theta \mathrm{d}l \ , \quad (3)$$

donde $\theta = 180^{\text{o}}$ es el ángulo comprendido entre el vector $\vec{F}_{R_d}$ y el vector de desplazamiento, de modo tal que $\cos\theta = -1$. Dado que $|\vec{F}_{R_d}| = \mu_d N = \mu_d mg$ es constante, puede salir de la integral de modo que:

$$W_{A-B}^{\vec{F}_{R_d}} = -\mu_d mg \int_A^B \mathrm{d}l = -\mu_d mg d_{A-B}. \quad (4)$$

Además, por lo dicho sabemos que $\Delta E_{M,A-B} = E_{M,B} - E_{M,A} = W_{A-B}^{\vec{F}_{NC}} = W_{A-B}^{\vec{F}_{R_d}}$, donde $E_{M,B} = \{mgH + \frac{1}{2}mv_B^2\}$ y $E_{M,A} = \{mgH + \frac{1}{2}mv_A^2\}$. Es importante destacar que el signo negativo del trabajo implica que la bolita pierde energía mecánica en el tramo A-B (la energía mecánica en B es menor que en A). La variación de la energía en este caso es únicamente cinética. Es decir que, tal como nos indica la intuición, la bolita pierde velocidad al pasar por el tramo con rozamiento y entonces $v_B < v_A$. Entonces, vemos que:

$$d_{A-B} = \frac{(1/2)\cancel{m}(v_B^2 - v_A^2)}{-\mu_d \cancel{m}g} = 0.7 \text{ m}. \quad (5)$$

c) Para obtener la altura (punto al que llamaremos D) a la cual la bolita alcanza la misma velocidad que en A, utilizaremos la conservación de la energía mecánica entre C y D. Antes debemos notar que la energía mecánica entre B y C se conserva pues el trabajo de las fuerzas no conservativas es nulo entre dichos puntos. Nuevamente esto se debe a que la normal, que es la única fuerza no conservativa en el tramo B-C, es perpendicular al desplazamiento, por lo que no hace trabajo sobre la bolita. El hecho de que los puntos B y C se encuentren a igual altura implica que la variación de energía potencial gravitatoria es nula. Por ende, la conservación de la energía mecánica en B-C se traduce en que la energía cinética es constante en dicho tramo y por ende $v_B = v_C$. Una vez que la bolita cae por el acantilado, es decir entre C y D, la única fuerza que siente es el peso, que es conservativa. Por lo tanto $\Delta E_{M,C-D} = 0$, lo cual implica que $E_{M,C} = \{mgH + \frac{1}{2}mv_C^2\} = \{mgH + \frac{1}{2}mv_B^2\}$ es igual a $E_{M,D} = \{mgh + \frac{1}{2}mv_D^2\} = \{mgh + \frac{1}{2}mv_A^2\}$. Igualando ambas expresiones y despejando h, que es la altura del punto D a la cual $v_A = v_D$, obtenemos:

$$h = H + \frac{1}{2g}(v_B^2 - v_A^2) = 1.72 \text{ m.} \tag{6}$$

Como $v_B < v_A$, el segundo término de la expresión anterior es negativo y por ende $h < H$, con h medida desde el suelo (recordemos que elegimos dicho punto como cero de potencial al comienzo del ejercicio, por lo cual las alturas están medidas desde él y son positivas hacia arriba). Resulta coherente que el punto en el cual la bolita recupera la velocidad que tenía antes de atravesar el tramo con rozamiento se encuentre más abajo que C, pues la bolita gana energía cinética a cambio de perder energía potencial gravitatoria.

d) Para que la bolita no caiga por el acantilado debe frenarse antes de llegar a C. Sin embargo, ya demostramos que $v_B = v_C$, por lo cual la condición que debemos pedir es que $v_B = 0$. Sabemos que la variación de energía mecánica entre A y B es el trabajo de la fuerza de rozamiento, con lo cual:

$$\begin{aligned}
\Delta E_{M,A-B} = E_{M,B} - E_{M,A} &= \{\cancel{mgH} + \frac{1}{2}mv_B^2\} - \{\cancel{mgH} + \frac{1}{2}mv_A^2\} && (7)\\
&= 0 - \frac{1}{2}mv_A^2 && (8)\\
&= W_{A-B}^{\vec{F}_{R_d}} && (9)\\
&= -\mu_d mg d_{A-B} && (10)\\
&\Rightarrow v_A = \sqrt{2\mu_d g d_{A-B}} \approx 2.37 \text{ m/s.} && (11)
\end{aligned}$$

Si la bolita llega a A con dicha velocidad, pierde la totalidad de su energía en el tramo con rozamiento de modo tal que su velocidad se anula en B. De la conservación de la energía entre O y A podemos extraer la compresión del resorte necesaria para que la bolita llegue a A con dicha velocidad:

$$\Delta x = \sqrt{m/k}\ v_A = \sqrt{\frac{2\mu_d mg d_{A-B}}{k}} \approx 0.197 \text{ m.} \tag{12}$$

Si la compresión inicial es mayor a la calculada, la velocidad de la bolita en B será distinta de cero y por lo tanto, inevitablemente caerá por el acantilado.