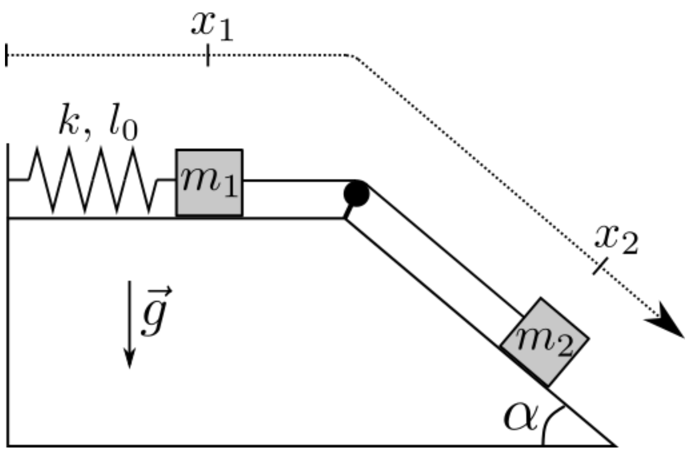
# Mecánica y Termodinámica (ByG) - 2do Cuat 2018 - Cátedra Amador
## Resolución del Primer Parcial (17/10/18)

**Problema 1 - Resolución**

a) Elegimos el origen de coordenadas al inicio del resorte, mientras que el eje cartesiado $\hat{x}$ lo tomaremos paralelo al piso, tal como se observa en la figura.




De esta forma, las ecuaciones de Newton a lo largo del eje $x$ (donde se da el movimiento) quedan

$$m_1\,\ddot{x}_1 = -k\,(x_1 - l_0) + T_1 \tag{1}$$

$$m_2\,\ddot{x}_2 = \sin(\alpha)\,m_2\,g - T_2 \tag{2}$$

b) Si la soga no tiene masa,

$$T_2 - T_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 = T \tag{3}$$

Además, como es inextensible, si $l$ es el largo de la soga,

$$x_2 - x_1 = l \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 \tag{4}$$

Por lo tanto, si $x = x_1$, las ecuaciones de Newton quedan

$$-\,k\,(x - l_0) + T = m_1\,\ddot{x} \tag{5}$$

$$\sin(\alpha)\,m_2\,g - T = m_2\,\ddot{x} \tag{6}$$

c) A partir de la ecuación (5), obtenemos $T = m_1\,\ddot{x} + k\,(x - l_0)$. Entonces, reemplazando $T$ en (6),

$$\sin(\alpha)\,m_2\,g - \big(m_1\,\ddot{x} + k\,(x - l_0)\big) = m_2\,\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha)\,m_2\,g - k\,(x - l_0) = (m_1 + m_2)\,\ddot{x} \tag{7}$$

En la posición de equilibrio, se cumple $\ddot{x} = 0$ y $x = x_{eq}$. Entonces,

$$\sin(\alpha)\,m_2\,g - k\,(x_{eq} - l_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{eq} = l_0 + \frac{m_2\,g\,\sin(\alpha)}{k} \tag{8}$$

d) Para resolver la ecuación (7), reescribimos nuestra variable $x$ como $x = x_{eq} + \tilde{x}$, donde $\tilde{x}$ representa el desplazamiento de la masa 1 respecto del equilibrio. Reemplazando en la ecuación (7) y usando que $\ddot{x}_{eq} = 0$, obtenemos

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{\tilde{x}} = \sin(\alpha)\,m_2\,g - k\,\Big(\big[\tilde{x} + x_{eq}\big] - l_0\Big) = -k\tilde{x} + \Big[\sin(\alpha)\,m_2\,g - k\,\big(x_{eq} - l_0\big)\Big] \tag{9}$$

Reemplazando $x_{eq}$ en la ecuación anterior, se anula lo que está entre corchetes, quedando así

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{\tilde{x}} = -k\tilde{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\tilde{x}} = -\frac{k}{m_1 + m_2}\tilde{x} = -\omega^2\tilde{x} \tag{10}$$

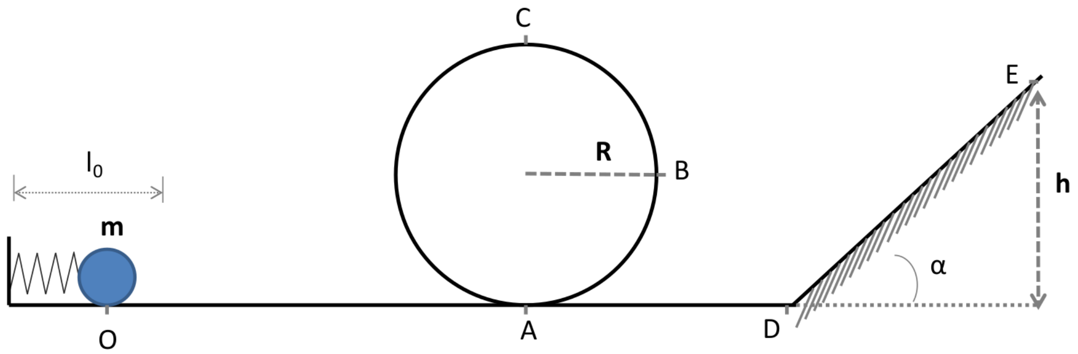
con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$. La solución de esta ecuación es de la forma $\tilde{x}(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, donde $A$ y $\phi$ vienen dados por las condiciones iniciales. Dado que $\tilde{x}(0) = 0$ y que $\dot{\tilde{x}}(0) = v_0$, obtenemos que

$$\begin{cases} \tilde{x}(0) = 0 = A\cos(\phi) \\ \dot{\tilde{x}}(0) = v_0 = -A\,\omega\sin(\phi) \end{cases} \tag{11}$$

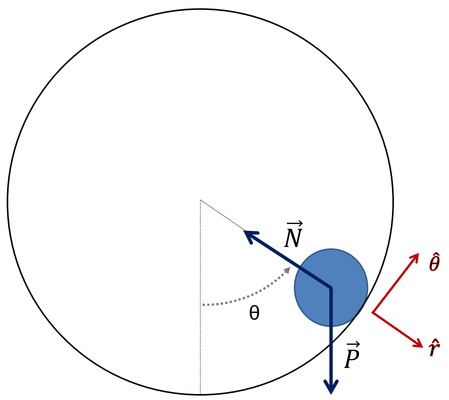
Entonces, $A = \frac{v_0}{\omega}$ y $\phi = -\frac{\pi}{2}$. Luego,

$$x(t) = x_{eq} + \tilde{x} = \left(l_0 + \frac{m_2\,g\,\sin(\alpha)}{k}\right) + \frac{v_0}{\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{12}$$

**Problema 2 - Resolución**




a) La condición para que la bolita no se despegue se encuentra en el rulo. En particular, la fuerza que responde al vínculo entre el riel y la bolita es la normal. Para poder escribir la normal en términos de la posición de la bolita en el tramo circular, defino un sistema de coordenadas polares, midiendo el ángulo $\theta$ desde el punto A (creciente en sentido antihorario), como se muestra en la figura.




La ecuación de Newton en la dirección radial resulta:

$$-N + mg\cos\theta = -mR\dot{\theta}^2 \Rightarrow N = mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2 \tag{13}$$

El punto crucial en la trayectoria de la bolita es el punto C. La condición para que la bolita no se despegue corresponde a pedir que la normal no se anule en ningún punto de la trayectoria circular y en particular en el punto C, es decir, $N_C = N(\theta = \pi) = -mg + mR\dot{\theta}_C^2 > 0$. De esta condición deducimos que la velocidad angular en el punto C debe cumplir que $\dot{\theta_C} > \sqrt{g/R}$, lo cual implica que la velocidad tangencial en dicho punto debe satisfacer:

$$v_C = R\dot{\theta}_C > \sqrt{Rg} \tag{14}$$

A continuación, mediante argumentos de energía debemos estimar cuál debe ser la compresión mínima del resorte para que la bolita llegue a C con una velocidad mayor a $\sqrt{Rg}$.

En el punto O, en el instante en el que se libera el resorte, la bolita se encuentra en reposo y sometida a la acción de la fuerza elástica debida al resorte, cuya compresión inicial es $\Delta x$. Por lo tanto, su energía cinética en O es nula y su energía potencial elástica es $\frac{1}{2}k\Delta x^2$. Si además definimos el cero de potencial gravitatorio convenientemente, la energía potencial gravitatoria es cero en dicho punto. En C, la bolita tiene energía cinética $\frac{1}{2}mv_C^2$ y la energía potencial gravitatoria asociada a la altura del punto C ($2R$) es $mg(2R)$. En el tramo O-C las únicas fuerzas que siente la bolita son la normal y el peso, de las cuales sólo la normal es no conservativa. Sin embargo, en todo el recorrido entre O y C la normal es perpendicular al desplazamiento por lo cual el trabajo de las fuerzas no conservativas es nulo ($W^{\mathbf{F}_{NC}} = W^{\mathbf{N}} = 0$). De la conservación de la energía mecánica ($E_M$):

$$\Delta E_{M,O-C} = W^{\mathbf{F}_{NC}}_{O-C} = 0 = E_{M,C} - E_{M,O} = \{mg(2R) + \frac{1}{2}mv_C^2\} - \{\frac{1}{2}k\Delta x^2\}. \tag{15}$$

Combinando la ecuación anterior con 14, se puede ver que la mínima elongación del resorte necesaria para que la bolita dé la vuelta al rulo es:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{5mgR}{k}} = 0{,}3 \text{ m}. \tag{16}$$

b) Nuevamente, vemos que la energía mecánica de la bolita se conserva en el tramo O-B ya que la única fuerza no conservativa presente es la normal, y ésta no hace trabajo en ningún punto de la trayectoria pues es perpendicular al desplazamiento. Por lo tanto, la energía mecánica es constante en todo punto entre O y B.

La energía mecánica en O (que corresponde a velocidad nula y a una energía potencial elástica no nula pues el resorte se encuentra comprimido) resulta $E_{M,O} = \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}\ 200\ \frac{\text{N}}{\text{m}}\ (0{,}5\text{m})^2 = 25$ J, mientras que la energía mecánica en B (donde la velocidad $v_B$ es no nula y la energía potencial gravitatoria es la asociada a una altura $R$ sobre el nivel inicial) es $E_{M,B} = mgR + \frac{1}{2}mv_B^2$. Igualando ambas energías y despejando, obtenemos $v_B \cong$ 6,54m/s.

c) En el tramo D-E, la energía mecánica no se conserva pues la fuerza de rozamiento (que es paralela al desplazamiento) hace trabajo no nulo. Calculamos en primer lugar ese trabajo.

Llamemos $d$ a la distancia sobre el plano inclinado que recorre la bolita hasta frenarse. Usando trigonometría, es fácil ver que $d = h/sin\alpha$. Utilizando la coordenada $x$ para describir el movimiento de la bolita sobre el plano, el trabajo de la fuerza de rozamiento se calcula como:

$$W^{\mathbf{F_R}} = \int \mathbf{F_R} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{x_D}^{x_E} -\mu_d N\ \hat{x} \cdot \mathrm{d}x\ \hat{x} = \int_{x_D}^{x_E} -\mu_d mg \cos\alpha\ \mathrm{d}x \tag{17}$$

$$= -\mu_d mg \cos\alpha\ d = -\mu_d mg \frac{h}{\tan\alpha}. \tag{18}$$

Sabemos que la variación de energía mecánica entre el punto O y el punto E está dada por el trabajo de las fuerzas no conservativas. Entre O y D, la única fuerza no conservativa presente es la normal, pero esta no hace trabajo pues es perpendicular al desplazamiento. Por este motivo, la energía mecánica entre O y D se conserva ($\Delta E_{M,O-D} = 0 \Rightarrow E_{M,O} = E_{M,D}$). Sin embargo, entre D y E la fuerza de rozamiento que también es no conservativa, hace trabajo no nulo (dado por la ecuación 17), provocando la variación de la energía mecánica total entre D y E, es decir que $\Delta E_{M,D-E} = W^{\mathbf{F_R}} = -\mu_d mg \frac{h}{\tan\alpha}$. Por lo tanto vemos que:

$$\Delta E_{M,O-E} = \Delta E_{M,D-E} = W^{\mathbf{F_R}} = -\mu_d mg \frac{h}{\tan\alpha}, \tag{19}$$

y reescribiendo el lado izquierdo de la ecuación anterior, resulta:

$$E_{M,E} - E_{M,O} = -\mu_d mg \frac{h}{\tan\alpha}. \tag{20}$$

La energía mecánica en O nuevamente está dada únicamente por la energía potencial elástica asociada a la compresión del resorte $\Delta x = 0{,}5$m (pues la velocidad es nula inicialmente). En el punto E en el cual la bolita se frena, la energía cinética de la misma es cero y la energía potencial gravitatoria es la asociada a la altura $h$, que es lo que queremos averiguar. Por lo dicho, la ecuación anterior resulta:

$$E_{M,E} - E_{M,O} = \{mgh\} - \{\frac{1}{2}k\Delta x^2\} = -\mu_d mg \frac{h}{\tan\alpha} \tag{21}$$

$$\Rightarrow h = \frac{\frac{1}{2}k\Delta x^2}{mg(1 + \frac{\mu_d}{\tan\alpha})} = 2 \text{ m}. \tag{22}$$

**Problema 3 - Resolución**

**(a)** Durante los choques, la suma de las fuerzas externas al sistema en consideración (bola blanca-bola negra en el primer caso, y bola blanca-bola gris en el segundo) es nulo, ya que las únicas fuerzas externas presentes en esos casos, el peso de cada una de las bolas y la normal que ejerce el piso sobre ellas, se cancelan.

En cuanto a la conservación de la energía, el único tipo de choque que la conserva es el choque elástico. Por lo tanto, el primer choque conserva la energía, mientras que el segundo, no.

**(b)** Luego del primer choque, la energía mecánica de la bola negra se conserva, ya que la única fuerza presente que hace trabajo es la gravitatoria. Entonces, si después del primer choque la bola negra tiene una velocidad $v_{M,f}$, queremos que toda la energía cinética antes de la pendiente se convierta en energía potencial al escalar a la plataforma. De esta forma, si ponemos el cero de energía potencial gravitatoria en la base de la plataforma (o sea, donde inicialmente se encuentran las tres bolas), debe cumplirse

$$0 = \Delta E_M = \left(\cancel{E_{k,f}} + E_{p,f}\right) - \left(E_{k,i} + \cancel{E_{p,i}}\right) = M\, g\, h_1 - \frac{1}{2}\, M\, v_{M,f}^2 \tag{23}$$

Despejando $v_{M,f}$, la velocidad de la bola negra después del choque, obtenemos

$$v_{M,f} = \sqrt{2\, g\, h_1} = 3.2\,\mathrm{m/s} \tag{24}$$

**(c)** Como el choque es elástico, conservará la energía de las dos masas. Entonces, las ecuaciones relevantes son la conservación del momento lineal y la conservación de la energía. Además, como el choque se da entre dos masas a la misma altura, la energía potencial no varía. De esta forma, también se conserva la energía cinética del sistema de las dos bolas, la blanca y la negra. Entonces, las ecuaciones son:

$$\begin{cases} p_f = p_i \quad \Rightarrow \quad m\, v_{m,f} + M\, v_{M,f} = m\, v_{m,i} + M\, v_{M,i} \\ E_{k,f} = E_{k,i} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\, m\, v_{m,f}^2 + \frac{1}{2}\, M\, v_{M,f}^2 = \frac{1}{2}\, m\, v_{m,i}^2 + \frac{1}{2}\, M\, v_{M,i}^2 \end{cases} \tag{25}$$

Reemplazando $M = 3m$, $v_{m,i} = v_0$ y $v_{M,i} = 0\,\mathrm{m/s}$, obtenemos

$$\begin{cases} \cancel{m}\, v_{m,f} + (3\cancel{m})\, v_{M,f} = \cancel{m}\, v_0 + (3\cancel{m}) \cdot (0\,\mathrm{m/s}) \quad \Rightarrow \quad v_{M,f} = \frac{1}{3}\left(v_0 - v_{m,f}\right) \\ \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}\, v_{m,f}^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}(3\cancel{m})\, v_{M,f}^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}\, v_0^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}(3\cancel{m}) \cdot (0\,\mathrm{m/s})^2 \quad \Rightarrow \quad v_{m,f}^2 + 3\, v_{M,f}^2 = v_0^2 \end{cases} \tag{26}$$

Entonces, reemplazando $v_{M,f}$ en la segunda ecuación, obtenemos

$$v_{m,f}^2 + 3\left[\frac{1}{3}\left(v_0 - v_{m,f}\right)\right]^2 = v_0^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3} v_{m,f}^2 - \frac{2}{3} v_0\, v_{m,f} - \frac{2}{3} v_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \tag{27}$$

$$v_{m,f} = \frac{-\left(-\frac{2}{3}v_0\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{2}{3}v_0\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}v_0^2\right)}}{2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{1}{4}v_0 \pm \frac{3}{4}v_0 \tag{28}$$

El resultado con el + nos da la situación inicial (es decir, $v_{m,f} = v_0$). Por lo tanto, el resultado que nos interesa, el de la velocidad de la bola blanca después del choque, es el resultado con "-", o sea, $v_{m,f} = -\frac{v_0}{2}$. Entonces,

$$v_{M,f} = \frac{1}{3}\left(v_0 - v_{m,f}\right) = \frac{1}{3}\left(v_0 - \left[-\frac{v_0}{2}\right]\right) = \frac{v_0}{2} \tag{29}$$

Como queremos que la velocidad de la bola negra después de este primer choque sea $v_{M,f} = \sqrt{2\,g\,h_1} = 3.2\,\mathrm{m/s}$, tenemos que $v_0 = 2 \cdot v_{M,f} = 2 \cdot \sqrt{2\,g\,h_1} = 6.4\,\mathrm{m/s}$.

La bola de la bola blanca después del primer choque será $v_{m,f} = -\frac{v_0}{2} = -3.2\,\mathrm{m/s}$ (o sea, se moverá hacia la izquierda, como el jugador 2 había anticipado).

Observación: Para resolver este punto, también es posible reemplazar $v_{M,f} = \sqrt{2\,g\,h_1}$ en el sistema de ecuaciones (26) (en lugar de usar un $v_{M,f}$ genérico). Hacer esto, nos da un único valor posible de $v_{m,f}$ y de $v_0$ en la expresión (28), ya que estamos "forzando" el resultado de $v_{M,f}$. Obviamente, el valor de $v_0$ así obtenido será el mismo que el ya calculado.

**(d)** El segundo choque es totalmente plástico. Esto significa, además de que la energía del sistema no se conserva, que la velocidad final de las dos masas será la misma (porque quedan "pegadas"):

$$p_f = p_i \qquad \Rightarrow \qquad (m + M)\,v_f = m\,v_{m,i} + M\,v_{M,i} \qquad \Rightarrow \qquad \big[m + (3m)\big]\;v_f = m\left(-\frac{v_0}{2}\right) + (3m)\cdot 0 \tag{30}$$

Entonces,

$$4\cancel{m}\,v_f = -\cancel{m}\,\frac{v_0}{2} \qquad \Rightarrow \qquad v_f = -\frac{v_0}{8} \tag{31}$$

Después del (segundo) choque, mientras el conjunto bola blanca-bola gris sube hacia la plataforma, la energía se conserva. Entonces, la altura $h$ a la que llega corresponde a la altura a la cual toda la energía cinética se convirtió en potencial gravitatoria. Es decir,

$$0 = \Delta E_M = \big(\cancel{E_{k,f}} + E_{p,f}\big) - \big(E_{k,i} + \cancel{E_{p,i}}\big) = (m + M)\,g\,h - \frac{1}{2}\,(m + M)\,v_f^2 \tag{32}$$

Entonces, reemplazando $v_f$ y despejando $h$, obtenemos

$$\frac{1}{2}\,\cancel{(m + M)}\left(-\frac{v_0}{8}\right)^2 = \cancel{(m + M)}\,g\,h \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{v_0^2}{128\,g} = 0.032\,\mathrm{m} = 3.2\,\mathrm{cm} < 6.4\,\mathrm{cm} = h_2 \tag{33}$$

En consecuencia, la velocidad del conjunto bola blanca-bola gris no es suficiente para llegar a la segunda plataforma, por lo que el jugador 2 pierde.