

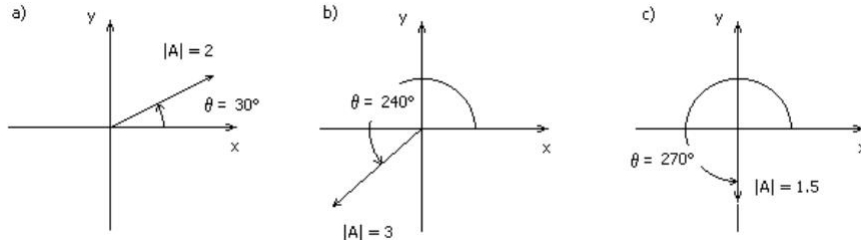
Guía 0: repaso matemático

Parte I: vectores

- ① Determine el módulo y la dirección de los siguientes vectores. Representélos gráficamente.

$$\mathbf{A} = (-4; 3) \quad \mathbf{B} = (2; 0) \quad \mathbf{C} = -2\hat{x} - 3\hat{y} \quad \mathbf{D} = 0\hat{x} - 5\hat{y}$$

- ② Halle las componentes cartesianas de los siguientes vectores:



- ③ Dados los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , halle gráficamente la suma, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

- (a) $\mathbf{A} = (-3; 2)$ y $\mathbf{B} = (-2; 5)$.
 (b) $|\mathbf{A}| = 2$, $\theta_A = 20^\circ$ y $|\mathbf{B}| = 3$, $\theta_B = 135^\circ$.
 (c) $\mathbf{A} = (-2; 0)$ y $\mathbf{B} = (0; 4)$.

Ahora, halle analíticamente las componentes cartesianas y polares del vector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, y del vector $\mathbf{A} - \mathbf{B}$. ¿El módulo del vector suma, $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, es igual a la suma de los módulos de \mathbf{A} y de \mathbf{B} ?

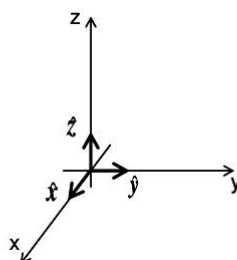
- ④ Halle el vector que tiene origen en el punto \mathbf{P} y extremo en el punto \mathbf{Q} en los siguientes casos:

- (a) $\mathbf{P} = (2; -1)$ y $\mathbf{Q} = (-5; -2)$.
 (b) $\mathbf{P} = (2; -5; 8)$ y $\mathbf{Q} = (-4; -3; 2)$.

- ⑤ Dados los vectores $\mathbf{A} = (3\hat{x} + 2\hat{y} + 3\hat{z})$, $\mathbf{B} = (4\hat{x} - 3\hat{y} + 2\hat{z})$, $\mathbf{C} = (-2\hat{y} - 5\hat{z})$, efectúe las siguientes operaciones:

- (a) $(\mathbf{A} - \mathbf{B})/|\mathbf{C}|$
 (b) $5\mathbf{A} - 2\mathbf{C}$
 (c) $-2\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C}/5$

- ⑥ Se define el producto escalar entre dos vectores como $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta$, donde θ es el ángulo que forman los dos vectores. Sean $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ los versores usuales de la terna derecha mostrada en la figura.



La base canónica se define con los siguientes versores: $\hat{\mathbf{x}} = (1; 0; 0)$, $\hat{\mathbf{y}} = (0; 1; 0)$, $\hat{\mathbf{z}} = (0; 0; 1)$. Calcule los siguientes productos escalares: $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}}$.

- ⑦ Usando la propiedad distributiva del producto escalar respecto a la suma y los resultados del ejercicio anterior, demuestre que si

$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}$, entonces:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

- ⑧ Efectúe el producto escalar entre los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} y diga si en algún caso \mathbf{A} es perpendicular a \mathbf{B} .

(a) $\mathbf{A} = 3\hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{y}} + 1\hat{\mathbf{z}}$ $\mathbf{B} = -1\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{z}}$

(b) $\mathbf{A} = (2; 3; -1)$ $\mathbf{B} = (6; -5; 2)$

(c) $|\mathbf{A}| = 3$, $|\mathbf{B}| = 2$, $\theta_{AB} = 60^\circ$

Parte II: derivadas e integrales

- ⑨ Sean A , α , b , c , ω y ϕ constantes. Derive las siguientes funciones.

(a) $f(t) = c$

(b) $f(t) = b \cdot t + c$

(c) $f(t) = b \cdot t^{-1} + c$

(d) $f(t) = b \cdot t^n$, con $n \neq 0$

(e) $f(t) = A e^{\alpha t}$

(f) $f(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

(g) $f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

(h) $f(t) = A e^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi)$ (producto, regla de la cadena)

- ⑩ Sean A , α , b , c , ω y ϕ constantes. Halle la primitiva $F(t)$ de las siguientes funciones.

Recordatorio: La función primitiva $F(t) = \int f(t)dt$ es una función cuya derivada da $f(t)$. NO olvide la constante de integración.

(a) $f(t) = c$

(b) $f(t) = b \cdot t + c$

(c) $f(t) = b \cdot t^{-1}$

(d) $f(t) = b \cdot t^n$, con $n \neq -1$

(e) $f(t) = A e^{\alpha t}$

(f) $f(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

(g) $f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

(h) $f(t) = \frac{2t}{t^2+1}$ (integración por sustitución)

(i) $f(t) = t e^{\alpha t}$ (integración por partes)

- 11 Utilizando la regla de Barrow, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (con F una primitiva de f), calcule las siguientes integrales.

(a) $v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a dt$ (a constante)

(b) $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt$ ($v(t)$ del ítem anterior)

(c) $E_p(h) = \int_0^h mg dx$ (mg constante es la fuerza gravitatoria)

Parte III: ecuaciones diferenciales

- 12 Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales. Es decir, encuentre la función $y(t)$. En todos los casos, y_0 es una constante.

(a) $\frac{dy}{dt} = 2, y(0) = 0;$

(b) $\frac{dy}{dt} = a, y(0) = y_0;$

(c) $\frac{dy}{dt} = e^t + 2, y(0) = y_0;$

(d) $\frac{dy}{dt} - \sin(3t) = 0, y(0) = y_0;$

(e) $\frac{dy}{dt} = 2y, y(1) = y_0$

(f) $t \frac{dy}{dt} = 1, y(1) = y_0.$

- 13 Suponga una colonia que tiene N_0 bacterias al tiempo $t = 0$. Si la colonia crece a una tasa proporcional a su población, entonces:

$$\frac{dN}{dt} = \kappa N, \quad \kappa > 0$$

- (a) Resuelva esta ecuación para encontrar $N(t)$. Grafique cualitativamente la solución.
 (b) ¿Cuánto tarda la población inicial en duplicarse? ¿Cuánto tiempo más hay que esperar para que se vuelva a duplicar?

- 14 Bajo ciertas condiciones que estudiaremos cuando veamos mecánica a escala celular y molecular, la aceleración de un objeto que se mueve en un fluido es $a = -\gamma v$, donde γ es una constante positiva que depende de la masa y la forma del objeto y de la viscosidad del fluido. Si la velocidad inicial es $v_0 > 0$, encuentre la velocidad en función del tiempo para el objeto.

- 15 Resuelva estas ecuaciones diferenciales de segundo orden. Tome como condición inicial en todos los casos $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$ (m, F y A son constantes).

(a) $m \ddot{x} = F$

(b) $\ddot{x} = A t$

(c) $\ddot{x} = e^t$

Ayuda: Muchas veces, para resolver una de segundo orden, conviene primero asignarle un nuevo nombre a la derivada primera. Por ejemplo, en lugar de \ddot{x} , usar $\dot{x} = v$ y $\ddot{x} = \dot{v}$.

Notación: $\dot{x} = x' = \frac{dx}{dt}$, y $\ddot{x} = x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$

- 16 Sabemos que la solución de la ecuación diferencial $\ddot{x} = -\omega^2 x$ viene dada por una función de la forma $x(t) = A \cos(ct + \phi)$, donde A y ϕ quedan determinadas por las condiciones iniciales del problema. Encuentre el valor de c para que esta función efectivamente sea solución de la ecuación. Una vez hallado c , encuentre los valores de A y ϕ sabiendo que a $t = 0$, $x(t = 0) = 0$ y $v(t = 0) = v_0$. *Ayuda:* Para encontrar c , reemplace $x(t)$ en la ecuación y despeje c .

Esta solución (y la ecuación que se resuelve) es la que se encuentra para el movimiento de un péndulo o un resorte (más de estos temas en próximas guías).

17 Encuentre una solución para las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas. Para ello, use el enunciado de 16.

(a) $\ddot{x} = -4x$, $x(0) = 3$ y $\dot{x}(0) = 0$;

(b) $\ddot{x} = -4x$, $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 6$;

18 Supongamos ahora que la ecuación a resolver es $\ddot{x} = -\omega^2 x - \frac{\gamma}{m} \dot{x} = -\omega^2 x - \frac{\gamma}{m} \dot{x}$. Sabemos que, bajo ciertas condiciones, la solución a esta ecuación diferencial es de la forma $x(t) = Ae^{-bt} \cos(ct + \phi)$, donde A y ϕ son constantes a determinar por las condiciones iniciales del problema. Al igual que en 16, halle los valores de b y c para que $x(t)$ sea efectivamente solución de la ecuación diferencial.

Esta ecuación es una combinación de las situaciones dadas en 14 y en 16. Es decir, esta ecuación describe un movimiento oscilatorio, al que se le agrega una amortiguación.