

Guía 2: Estimación de la gravedad: Regresión Lineal. *

Turno Ana Amador - Laboratorio Martes y Jueves - Dept. Física, FCEyN, UBA.
Nuevo Plan de Carrera

Marzo 2019

1. Introducción:

En la presente guía incorporaremos una herramienta que nos permitirá analizar la validez de modelos físicos: **el ajuste lineal** por cuadrados mínimos.

Las leyes físicas son (en la mayoría de los casos) expresadas como **relaciones funcionales entre variables** del sistema analizado. En la primera guía se presentó el siguiente cálculo como forma de obtener g conociendo el valor de L y T :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1)$$

Ahora, si consideramos L y T como variables del sistema, para cada valor de L correspondería un valor $T(L)$, y todos los pares de valores deberían seguir la siguiente relación funcional:

$$T(L) = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2)$$

En este MODELO T y L son variables que pueden ser medidas. g es un parámetro del modelo que puede ser estimado si tenemos una serie de mediciones T, L realizadas en forma experimental. La estimación del parámetro g constituye en sí mismo en una **medición indirecta** de la aceleración de la gravedad.

El ajuste por cuadrados mínimos es la herramienta que nos permitirá estimar los parámetros de un modelo determinado. Consiste en un cálculo algorítmico que se realiza a partir de datos medidos y de un modelo funcional con parámetros a estimar. Los datos medidos no necesariamente coincidirán de forma exacta con la curva que representa la relación funcional, pero si el modelo “es correcto”, deberían variar en un entorno de dicha curva.

Esta forma de análisis puede parecer similar al cálculo realizado en la primera guía, pero es mucho más profundo. El análisis de la serie de datos como relación funcional nos permite evaluar el modelo en sí mismo. No solo usarlo como cálculo, sino evaluar **si la relación entre una variable y la otra “realmente” siguen la forma de una recta, polinomio o función propuesta para el modelo**. La validez del valor estimado para un parámetro (en este caso: g), así como

*Basada en: <http://materias.df.uba.ar/flbyga2018c1/laboratorio-jueves/>

el intervalo de error que se le pueda asignar a dicho parámetro, dependerán en primer lugar de evaluar si los datos siguen o no el modelo propuesto. Para ello se utilizarán **indicadores de bondad de ajuste** que deberán ser analizados en cada informe.

Vamos a trabajar con ajustes lineales en esta guía. Para analizar los datos deberemos antes “linearizarlos” (¿como?) para luego aplicar un ajuste lineal. Hay varias formas de linearizarlos, con distintas ventajas y desventajas que se explicarán en clase.

Como caso de estudio, tomaremos de nuevo el ejemplo de la estimación de la aceleración gravitatoria (g) a partir de las mediciones del período de un péndulo. En primer lugar, dado que existe una infinidad de posibles funciones no-lineales que ajustan una serie de puntos, es importante tener una hipótesis para evaluar y restringir estas posibilidades. En este caso tenemos un modelo muy fuerte a partir del cual esperamos que, si medimos el período (T) para una gran cantidad de longitudes del hilo (L) obtendremos una relación como la de la ecuación (2).

Este es un ejemplo particular de una serie de funciones no-lineales, llamadas funciones potenciales o relaciones de potencias, que tienen la forma $f(x) = ax^k$, donde a es la aceleración de proporcionalidad y k el exponente. Y aunque suelen confundirse con relaciones exponenciales (que veremos en la guía 3), no son lo mismo ni requieren el mismo tratamiento.

Brevemente, y volviendo al ejemplo de la ecuación (2), para determinar la aceleración g es necesario

1. Graficar la relación entre ambas variables, con sus respectivas incertezas.
2. Transformar las variables (y las incertezas) de forma de obtener una relación lineal, teniendo en cuenta el modelo propuesto.
3. Graficar la relación entre ambas variables transformadas, con sus respectivas incertezas.
4. Realizar un ajuste lineal por cuadrados mínimos (pueden ver más sobre cuadrados mínimos en los apuntes disponibles en la web de la materia).

Para realizar las medidas de período en este trabajo, se utilizará el sistema de adquisición de datos *SensorDAQ* conectado a un sensor infrarrojo (*photogate*).

Distintas señales pueden ser adquiridas por una amplia variedad de sensores y transformadas a diferencias de potencial. El *SensorDAQ* es un sistema que adquiere estas diferencias de potencial en función del tiempo (señales analógicas) y las digitaliza en un conjunto de datos de voltaje en función del tiempo, para que puedan ser interpretadas y procesadas en una computadora. Es por esto que resulta necesario analizar la precisión de la señal digital obtenida tanto en voltaje como en tiempo:

- La resolución en voltaje de la placa está determinada por el rango de medición y el número de bits de la misma, que fija en cuántos intervalos se discretiza el rango de voltaje medido. Por ejemplo, una placa de 8 bits divide el rango en $2^8 = 256$ intervalos, y si el rango es de 10 Volts, esto equivale a una resolución en voltaje de 0.04 Volts.
- La resolución temporal está dada por el intervalo de tiempo entre datos sucesivos, determinado por la frecuencia de adquisición o frecuencia de muestreo de datos. Esta frecuencia puede ser determinada por el usuario pero sólo en un cierto rango, que depende de la duración del evento y del número total de datos permitidos por el programa. Por ejemplo, si la frecuencia de adquisición es de 1000 Hz, la resolución temporal es de $1/1000 Hz = 1 ms$.

El valor de la diferencia de potencial es determinado por un sensor, que convierte alguna magnitud física: temperatura, presión, luz, fuerza, etc en una diferencia de potencial. En el caso de *photogate*, el mismo emite y recibe una luz infrarroja, y la señal de interés se produce cuando esta es interrumpida, evidenciando el paso de un objeto.

2. Experiencia 1.

2.1. Evaluación del *SensorDAQ*

En primer lugar, es necesario interiorizarse en el uso de equipamiento, para ello se propone variar la frecuencia de muestreo y el tiempo de adquisición de datos mientras se obtura con la mano un *photogate* y se observe la señal.

- ¿Qué diferencia de potencial registra el *SensorDAQ* cuando el *photogate* está obturado? ¿Y cuando no lo está?
- ¿Cómo son los cambios entre uno y otro estado? ¿Qué pasa cuando se aumenta la frecuencia de adquisición?

Por otro lado, determine la resolución y la incerteza en voltaje del sistema de adquisición de datos registrando una señal constante en el tiempo. Para ello es mejor utilizar una frecuencia de adquisición alta.

2.2. Mediciones

Montar un péndulo simple teniendo en cuenta que sea fácil variar la longitud del hilo. Colocar el *photogate* de forma que el péndulo interrumpa el haz de luz en su recorrido.

- ¿Es igual (desde un punto de vista teórico y desde un punto de vista práctico) dónde se coloca el *photogate*?
- Al poner en movimiento el péndulo cerciórese de que la amplitud angular de oscilación sea pequeña (menor a 10°) ¿Por qué les parece?
- Realizar varias pruebas antes de empezar a medir para establecer la frecuencia de adquisición correcta.

Una vez definido el montaje (que siempre es lo que lleva más tiempo), realizar mediciones para 10 longitudes diferentes del péndulo en cuestión, sin modificar los demás parámetros del montaje experimental. ¿Es necesario realizar varias mediciones de cada punto? ¿Por qué?

2.3. Análisis

Siguiendo los pasos mencionados en la introducción, y a partir del modelo y la relación entre las variables observada (en un gráfico), establezcan cómo deben transformar las variables de forma de obtener una relación lineal entre las variables transformadas. ¿Qué deben hacer con las incertezas?

Una vez obtenido un gráfico que según el modelo deba ser lineal (¡y se vea lineal!), realizar una regresión lineal por cuadrados mínimos entre las variables. Algunas preguntas más para guiar el proceso,

1. ¿La relación se ve lineal? ¿Se ve lineal en todo el rango? Muchas veces ocurre que ciertos modelos o leyes son aplicables bajo ciertas condiciones o supuestos, si estos no se cumplen, entonces el modelo no es válido y las variables no necesariamente seguirán la relación esperada.
2. ¿Qué supuestos tiene en cuenta el presente modelo? ¿Se cumplen?
3. ¿Deben utilizar cuadrados mínimos o cuadrados mínimos ponderados? ¿Por qué?

Por último, comparé los resultados obtenidos con los valores tabulados por un lado ¿Son distinguibles? ¿Y respecto a los obtenidos en la guía anterior? ¿El método resultó más o menos preciso? ¿Y exacto? (Nota: Tenga en cuenta todos los comentarios de la guía anterior).

2.4. Instrumentación alternativa

De forma opcional, se pueden explorar otras formas de adquisición (semi)automatizada para medir los periodos. Dos propuestas:

1. **Utilizar el sensor de posición.** Se deben tener las mismas consideraciones respecto a la configuración del Sensor DAQ.
2. **Filmar el péndulo.** Se deberán agregar elementos que permitan asignar una escala a la imagen. Se propone procesar los datos usando el Tracker.

En caso de realizar alguna de las formas alternativas de adquisición, comparar la precisión y exactitud lograda sobre el valor final medido para g en cada método y discutir.

3. Experiencia 2.

Una forma alternativa de determinar la aceleración gravitatoria es a partir de experiencias de caída libre. Utilizando nuevamente el *photogate* se dejará caer un objeto y se estimará su velocidad y aceleración. ¿En cuántos puntos es necesario medir para determinar la velocidad de un móvil? ¿Y la aceleración?

Se utilizará como objeto una placa traslúcida con varias marcas regulares (*cebra*), esta placa producirá varias interrupciones en su paso por el *photogate* ¿Qué patrón esperan obtener?

Comiencen realizando un gráfico la posición de la placa en función del tiempo, y a partir del mismo deriven la velocidad en función del tiempo ¿Es esta una relación lineal?

Determinen la aceleración a partir de este gráfico ¿Cómo lo harían con las herramientas analíticas utilizadas en la Experiencia 1?

(Nota: ¡No se olviden de las incertezas! ¿Son mediciones directas o indirectas?)

Al igual que en la Experiencia 1, compare los resultados obtenidos con los valores tabulados por un lado ¿Son distinguibles? ¿Y respecto a los obtenidos en la guía anterior? ¿El método resultó más o menos preciso? ¿Y exacto? (Nota: Tenga en cuenta todos los comentarios de la guía anterior).

Por último, ¿Qué supuestos conlleva el modelo teórico utilizado? ¿Se cumplen en su montaje experimental? ¿Cómo lo mejorarían?