

# Guia 4: Viscosidad: Ley de Stokes \*

Prof. Ana Amador - Turno Laboratorio Martes y Jueves - Dept. Física, FCEyN, UBA.  
Nuevo Plan de Carrera

Marzo 2019

## 1. Introducción:

Cuando un cuerpo se mueve en caída libre en el vacío, el mismo se encuentra sometido sólo a la acción de su peso. Su aceleración es constante (e igual a " $g$ ") y su velocidad aumenta proporcionalmente con el tiempo. ¿Qué diferencia hay cuando el movimiento de caída ocurre en un fluido viscoso, ya sea en aire o en un líquido? En la Figura 1 se muestra el diagrama de cuerpo libre para un cuerpo que cae en un medio viscoso. Además de a su propio peso ( $P$ ), el cuerpo es sometido a una fuerza denominada “empuje” ( $E$ ), de sentido contrario al peso, por el solo hecho de encontrarse sumergido. Además, si el cuerpo se mueve aparece una fuerza viscosa ( $R$ ) que se opone al movimiento del cuerpo. A diferencia de la fuerza de rozamiento dinámico entre dos superficies, esta fuerza viscosa es proporcional a la velocidad y depende también del tamaño y forma del cuerpo.

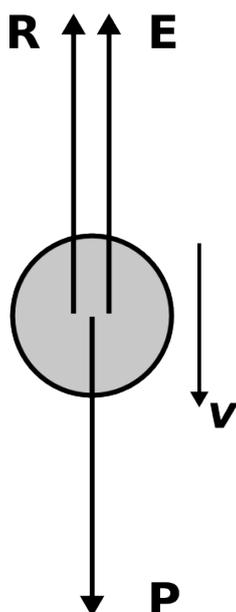


Figura 1: Diagrama de cuerpo libre de una esfera en el seno de un fluido viscoso..

\*Basada en: <http://materias.df.uba.ar/flbyga2018c1/laboratorio-jueves/>

El peso puede escribirse en función del volumen y la densidad de la esfera como se muestra en la ecuación 1.

$$P = m g = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_{\text{esfera}} g \quad (1)$$

Donde  $r$  es el radio de la esfera y  $\rho_{\text{esfera}}$  su densidad. Según el principio de Arquímedes, el empuje es igual al peso del líquido desalojado, es decir que la expresión es similar pero usando la densidad del líquido  $\rho_{\text{liquido}}$ , ecuación (3).

$$E = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_{\text{liquido}} g \quad (2)$$

Para el caso de una esfera en un flujo laminar, la fuerza viscosa puede expresarse según la Ley de Stokes (ec. 3).

$$R = 6\pi r \eta v \quad (3)$$

donde  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad del fluido y  $v$  su velocidad. Planteando la segunda Ley de Newton a partir de las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo (Figura 1) se obtiene la siguiente relación (ec. 4).

$$m a = P - E - R \quad (4)$$

Donde  $a$  es la aceleración del cuerpo. Puede verse al aumentar la velocidad, aumenta la fuerza viscosa y se reduce la aceleración. En el límite en que la aceleración se hace nula, la velocidad se hace constante alcanzando su valor límite ( $v \rightarrow v_{\text{lim}}$ ). En este punto vale la relación 5.

$$R = E - P \quad (5)$$

Reemplazando las ecuaciones 1-3 en 5, y despejando es posible obtener una expresión para la velocidad límite.

$$v_{\text{lim}} = \frac{2}{9} \frac{r^2 g}{\eta} (\rho_{\text{esfera}} - \rho_{\text{liquido}}) \quad (6)$$

El desarrollo anterior corresponde a la caída de una esfera en el seno de un fluido infinito. Sin embargo, a partir del estudio del movimiento en un fluido contenido en un recinto limitado, por ejemplo un tubo de radio  $r_{\text{tubo}}$ , Ladenburg propuso la corrección de la ec. (7).

$$v_{\text{lim}} = \left(1 + 2,4 \frac{r}{r_{\text{tubo}}}\right) v_{\text{medido}} \quad (7)$$

siendo  $v_{\text{medida}}$  la velocidad límite medida para el movimiento dentro del recipiente.

Más allá de este resultado es importante notar que la ecuación 4 es una ecuación dinámica, y que existe un régimen transitorio hasta llegar a los valores cercanos al velocidad límite (que por otro lado, nunca se alcanza). Escribiendo la ecuación 4 como ecuación diferencial y agrupando las constantes, se obtiene la ecuación (8).

$$\ddot{x} = \beta - \alpha \dot{x} \quad (8)$$

Proponiendo como solución una exponencial (homogénea) más una lineal (particular), y que parte con velocidad nula como condición de contorno obtenemos las siguientes expresiones para la posición (9) y la velocidad (10) en función del tiempo.

$$x(t) = v_{\text{lim}} t + \frac{v_{\text{lim}}}{\alpha} e^{-\alpha t} \quad (9)$$

$$\dot{x}(t) = v_{\text{lim}} (1 - e^{-\alpha t}) \quad (10)$$

En esta experiencia de laboratorio se estudiará el movimiento de caída de una esfera en el seno de un fluido, registrándolo con una cámara y utilizando el programa de análisis de imágenes *Tracker*<sup>1</sup> para extraer la posición de la esfera en función del tiempo. A partir de las mediciones se espera obtener una descripción del movimiento y un valor para la viscosidad ( $\eta$ ). Este método para determinar la viscosidad de un fluido es conocido como el método de Stokes.

## 2. Actividades

En el laboratorio se cuenta con probetas que pueden llenarse con detergente y esferas de acero de distintos tamaños. Se propone estudiar el movimiento de distintas esferas, determinando la velocidad límite alcanzada y analizando si se alcanza efectivamente o no una velocidad constante.

- ¿Cómo puede determinarse la velocidad límite? ¿Cuál sería su error?
- ¿Cómo determinar la densidad de las esferas y del líquido?
- ¿Cómo podría determinarse  $\eta$  en este experimento?

En particular, en esta práctica se va a adquirir el video de la trayectoria de la esfera de acero cayendo libremente para luego analizar su movimiento con el programa *Tracker*. El programa disponible en las computadoras del laboratorio para adquirir video es AvaCam, en el cual pueden explorar los parámetros de la adquisición<sup>2</sup>.

### 2.1. Análisis de imágenes con *Tracker*

*Tracker* es un software gratuito creado por *Open Source Physics* (OSP) con soporte para varios sistemas operativos. El programa permite analizar videos y modelar los resultados. En particular nos interesa una herramienta que permite el seguimiento de objetos (posición, velocidad y aceleración superponiendo los gráficos), posee gran variedad de filtros espaciales para mejorar la imagen, así como también perfiles de línea para analizar espectros y patrones de interferencia. Está especialmente diseñado para ser utilizado en los laboratorios de física universitarios.

#### Ayuda:

- Es importante que el fondo y la iluminación sean homogéneos para evitar el ruido en la medición.

<sup>1</sup><http://physlets.org/tracker/>

<sup>2</sup>Este programa guarda todos los videos en [Directorio de programas o C:/AvaCam/CamVideos/

- En cada video que se hace es necesario tener una magnitud patrón para poder calibrar las distancias recorridas. Una vez abierto el archivo en el *Tracker*, hay que elegir los cuadros de interés del video con la herramienta “ajustes de corte” (“*clip settings*”), luego cargar la calibración espacial (utilizando el patrón) con la herramienta “Calibración” y finalmente agregar el sistema de referencia.
- La trayectoria de la esfera se puede determinar de forma manual (cuadro a cuadro marcar posición) o de forma automática. Esta última resulta más precisa. Para ello usar “crear” > “masa puntual” (“*point mass*”). Se elige el *key frame* (que es lo que va a tener que seguir el programa), esto se hace en el primer cuadro de la trayectoria presionando shift+ctrl+click del mouse.
- En el siguiente sitio se pueden encontrar distintos ejemplos: <http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/webstart/>, y en el sitio oficial del programa se pueden encontrar tutoriales como: <https://www.youtube.com/watch?v=n4Eqy60yYUY>.