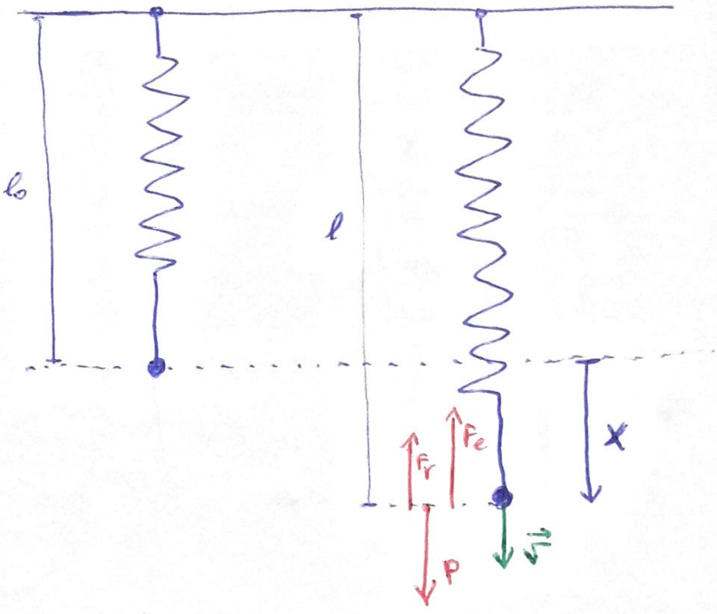
PENDULO AMORTIGUADO



MODELO:

Asunciones

- masa de resorte despreciable
- masa puntual
- movimiento en una dimensión

Leyes Físicas

- Hooke: $F_e = -K(\ell - \ell_0)$
- Stokes: $F_r = -b \cdot v$
- Leyes de Newton
- Gravedad: $P = M \cdot G$

Derivaciones del Modelo

para entender la dinámica, aplicamos las leyes de Newton

$$M \cdot A = P + F_e + F_r$$

Reescribo considerando $F = P + F_e = -K \cdot x \Rightarrow \boxed{F = -K \cdot x}$

$F_r = -b \cdot v = -b \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \boxed{F_r = -b \cdot \frac{dx}{dt}}$

$A = \frac{d^2x}{dt^2}$

Ecuación dinámica

$$\frac{d^2x}{dt} + \frac{b}{M} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{K}{M} \cdot x = 0$$

$\longrightarrow$ La solución es $x(t)$ y nos permite conocer la trayectoria y derivar la velocidad, aceleración, fuerzas, etc

Es una ecuación diferencial lineal de 2do orden (Homogenea)

$\Rightarrow$ solucion del tipo: $x_{H1}(t) = e^{\lambda_1 t}$

$x_{H2}(t) = e^{\lambda_2 t}$

Dinámica del sistema

$\Rightarrow x(t) = \alpha \cdot x_{H1}(t) + \beta \cdot x_{H2}(t)$

condiciones iniciales del sistema

Reemplazamos en la solucion propuesta los parámetros matemáticos por los del Modelo

$$x(t) = A \cdot e^{-\frac{b}{2M} \cdot t} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{K}{M} - \frac{b^2}{(2M)^2}} \cdot t + \phi\right)$$

Reescrito:

$$x(t) = A \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

con: $\gamma = \frac{b}{2M}$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$

Finalmente, reescribimos modelo y solución para ordenar:

Modelo

$\boxed{F = -K \cdot X}$ (1)

$\boxed{F_r = -b \dfrac{dx}{dt}}$ (2)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

$\boxed{\gamma = \dfrac{b}{2M}}$ (3)

$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K}{M}}}$ (4)

Solución

Dinámica

$$X(t) = \underbrace{A}_{\text{condiciones iniciales}} \cdot e^{-\overbrace{\gamma}^{\text{dinámica}} \cdot t} \cdot \cos(\overbrace{\omega}^{\text{dinámica}} \cdot t + \underbrace{\phi}_{\text{condiciones iniciales}}) \quad (5)$$

con $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$ (6)

condiciones iniciales

de la solución se pueden derivar:

$V(t) = \dfrac{dx}{dt}$ ... $\quad F(t) = -K \cdot x(t)$ $\quad$ etc...

Parámetros del sistema dinámico: γ, ω_0, ω

Parámetros del sistema físico: b, M, K, l_0

Parámetros de condiciones iniciales: A, ϕ

SI USAMOS EL MODELO "PARA MEDIR"

$M \longrightarrow$ Balanza

$K \longrightarrow$ (4) y (1) $\longrightarrow$ (4) Mido ω_0 ; (1) Mido $-\dfrac{F}{X}$

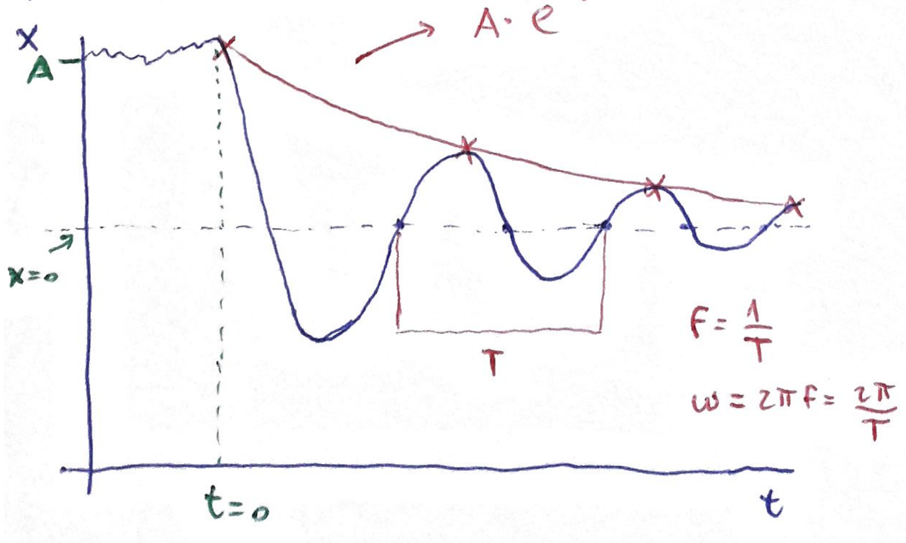
$b \longrightarrow$ (3) Mido γ $\longrightarrow$ (6) Mido ω y ω_0 ; (5) Mido $A \cdot e^{-\gamma \cdot t}$

PARA CORROBORAR

- de (1): ¿$F(x)$ es lineal?
- de (6): ¿se corre la frecuencia cuando hay fricción?
- de (5): ¿el decaimiento del coseno es exponencial?

Análisis de Resultados

$A \cdot e^{-\gamma \cdot t}$



$F = \dfrac{1}{T}$

$\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$

X_{max}	t
✓	x
x	✓
x	x

$X_{max} = A \cdot e^{-\gamma t}$

$\log(X_{max}) = \log(A) - \gamma \cdot t$