Clase 1b

Introducción a propagación de errores

http://materias.df.uba.ar/mtb2019c1/laboratorio-martes-jueves/

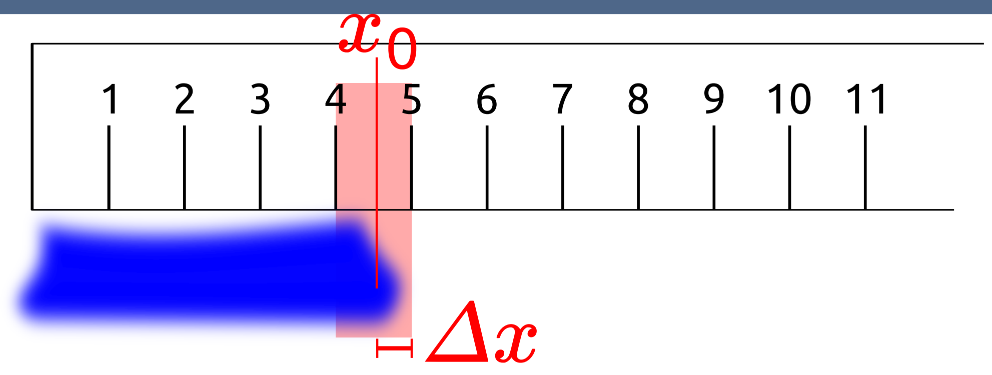
Repaso

- **Desviación Estándar (de la muestra)**
  - Permite predecir probabilidad de hallar valores al medir
  - SD o σ

- **Error Estándar**
  - $SD/\sqrt{N}$
  - Incerteza del valor medio μ o x_0
  - SE o σ_{x0}

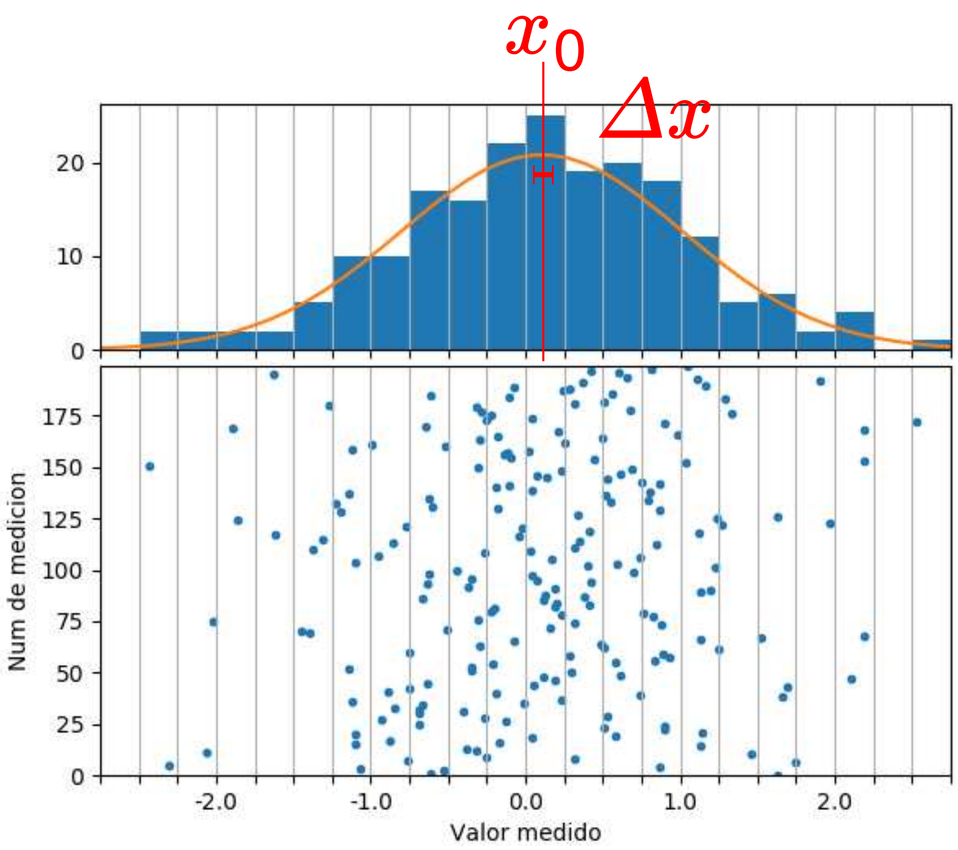
- **Valor medio**
  - Estimación del valor real que se trata de medir
  - μ o x_0 o $\langle x \rangle$ o $\overline{x}$

Repaso



→ **Error ABSOLUTO σ_{abs}**

Desconocimiento absoluto



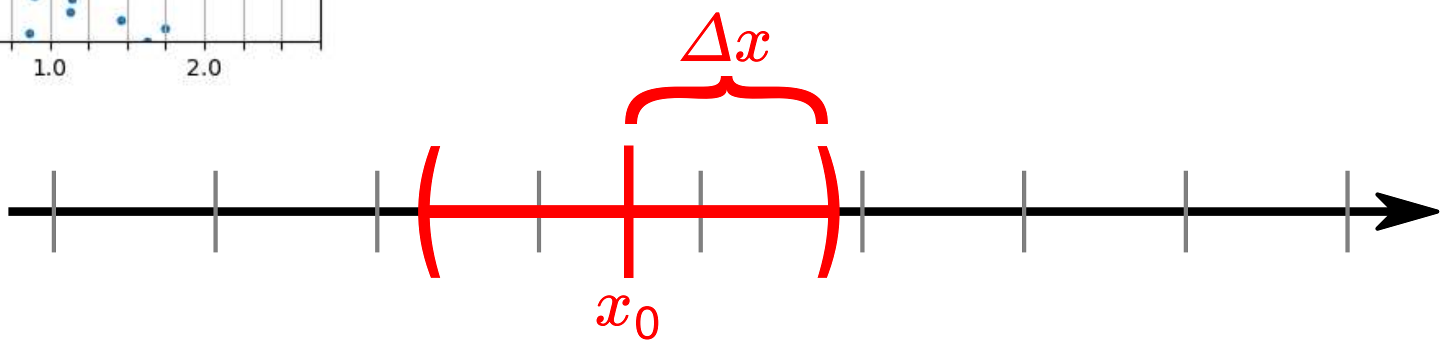
→ **Error ESTADÍSTICO σ_{est}**

Variable aleatoria

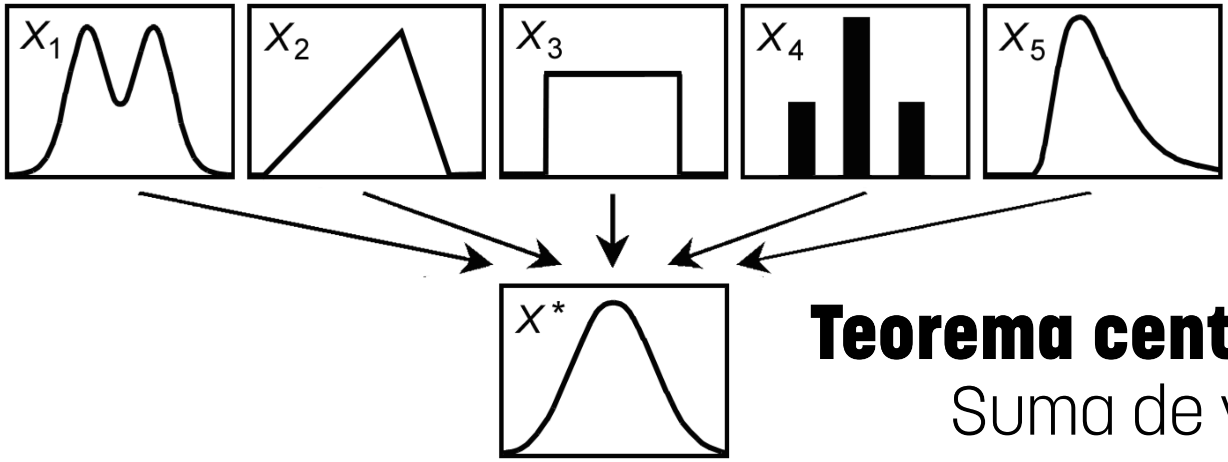
Se puede reducir como SD/√N

$X_0 = \langle X \rangle$

ΔX = SE = σ/√N = SD/√N



Repaso



Teorema central del límite

Suma de variables aleatorias CON media y varianza ….

… tiende a Gaussiana

$$X^* = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$$

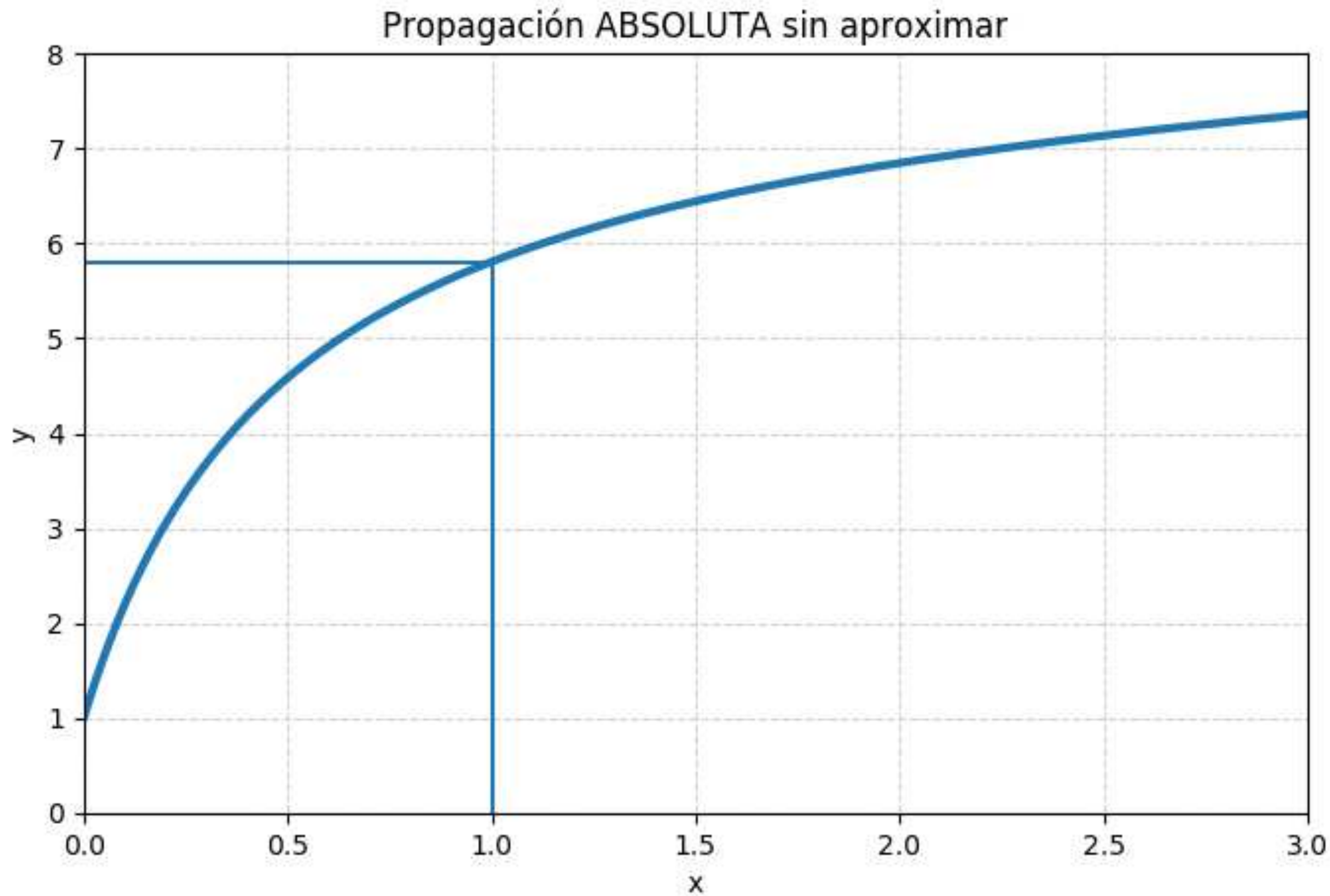
Modelo Gaussiano (distribusión normal)

$$G_{\sigma,\mu}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Propagación de errores

Propagación del intervalo de incerteza a través de una función

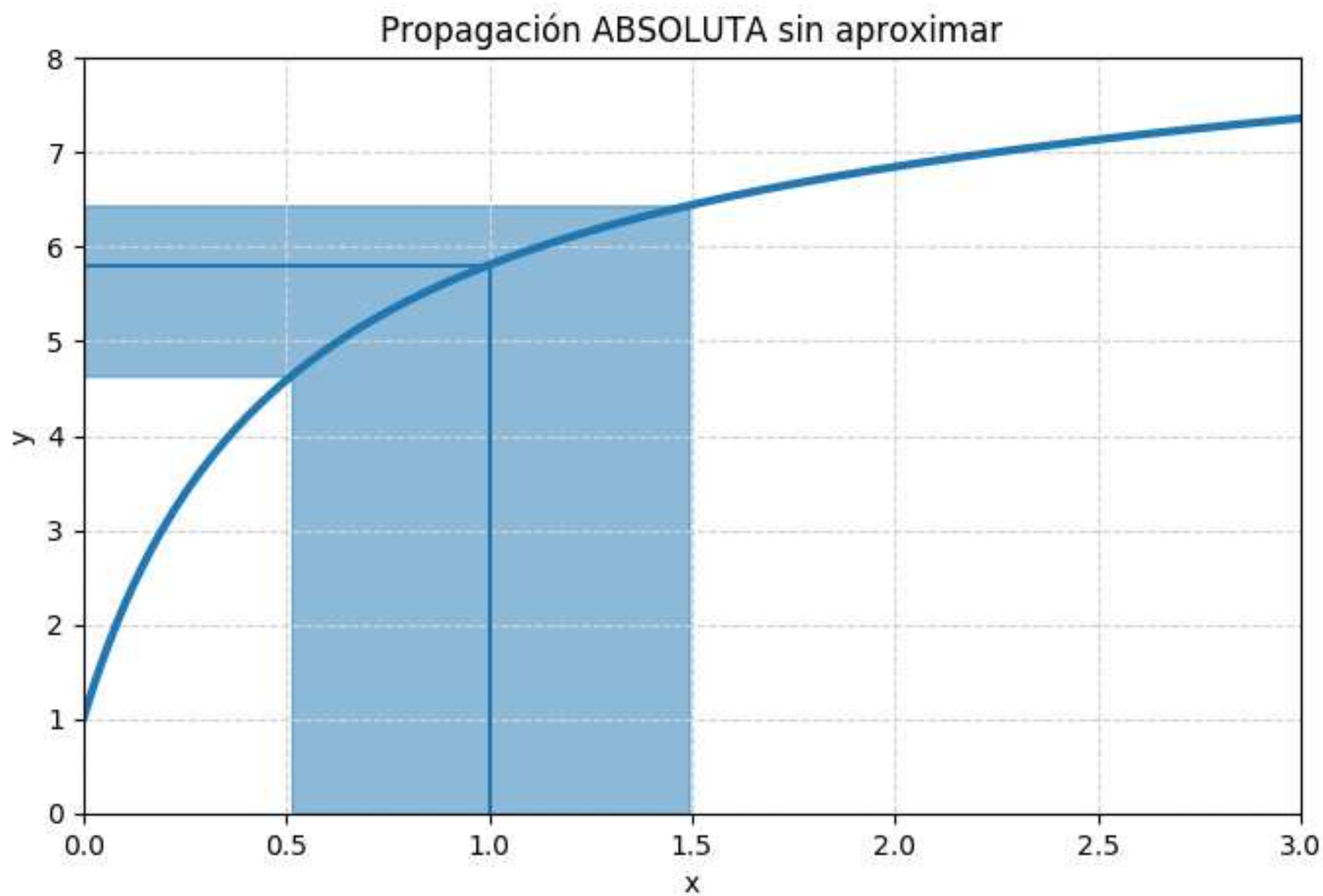
Error Absoluto: caso intuitivo



Propagación de errores

Propagación del intervalo de incerteza a través de una función

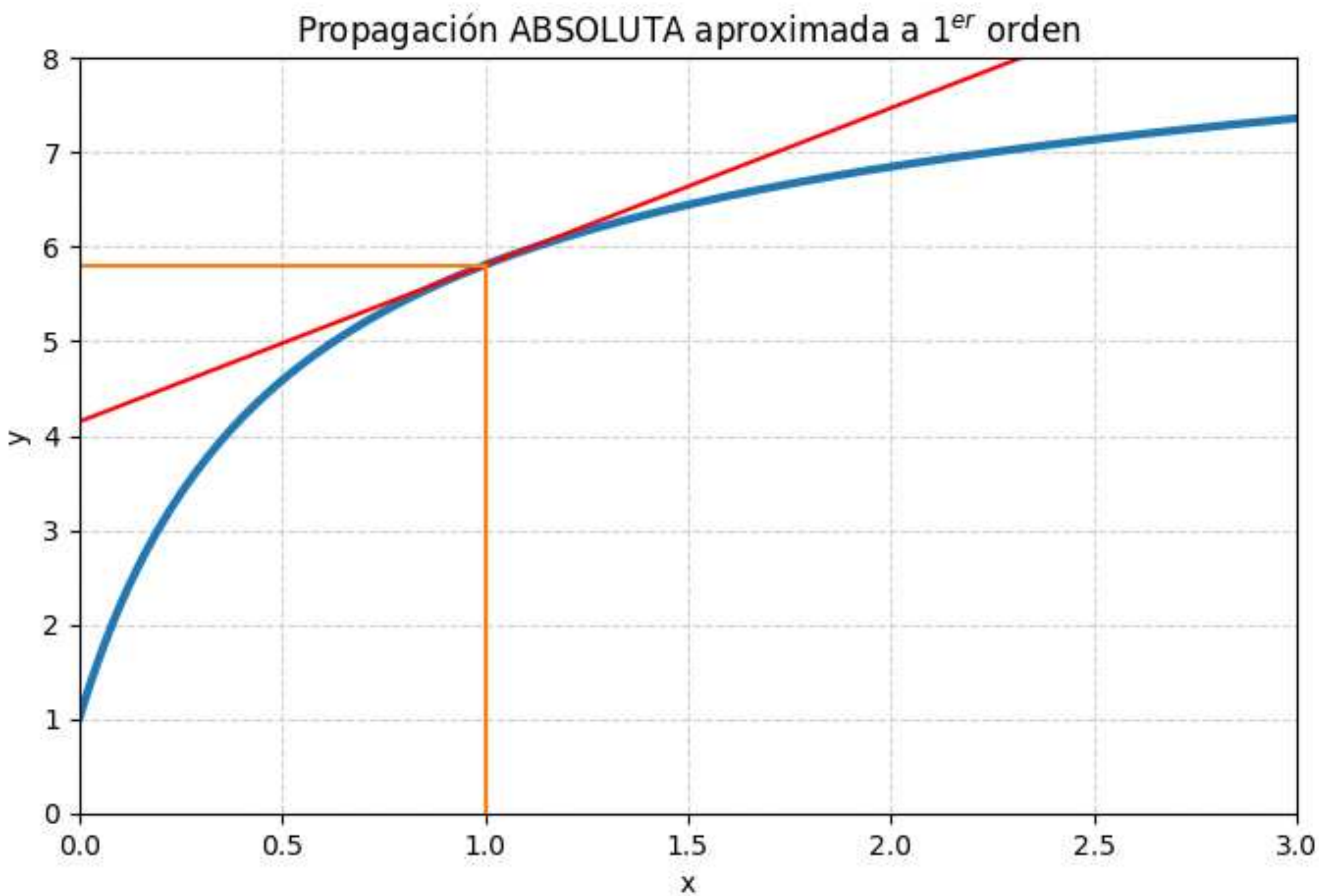
Error Absoluto: caso intuitivo



Propagación de errores

Propagación del intervalo de incerteza a través de una aproximación de 1er orden: una recta

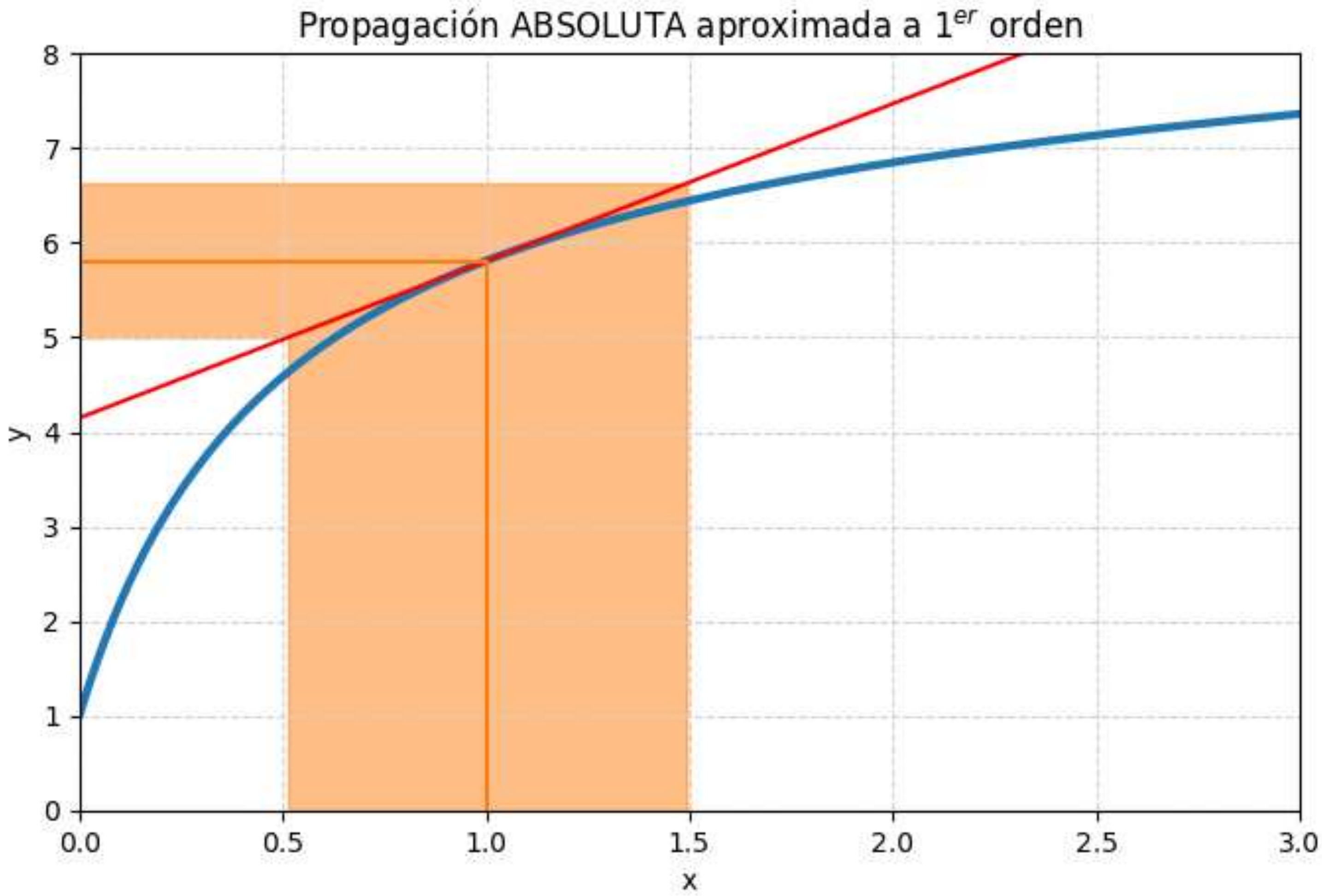
La pendiente de la recta es la derivada de la función en ese punto



Propagación de errores

$$y_0 = f(x_0)$$

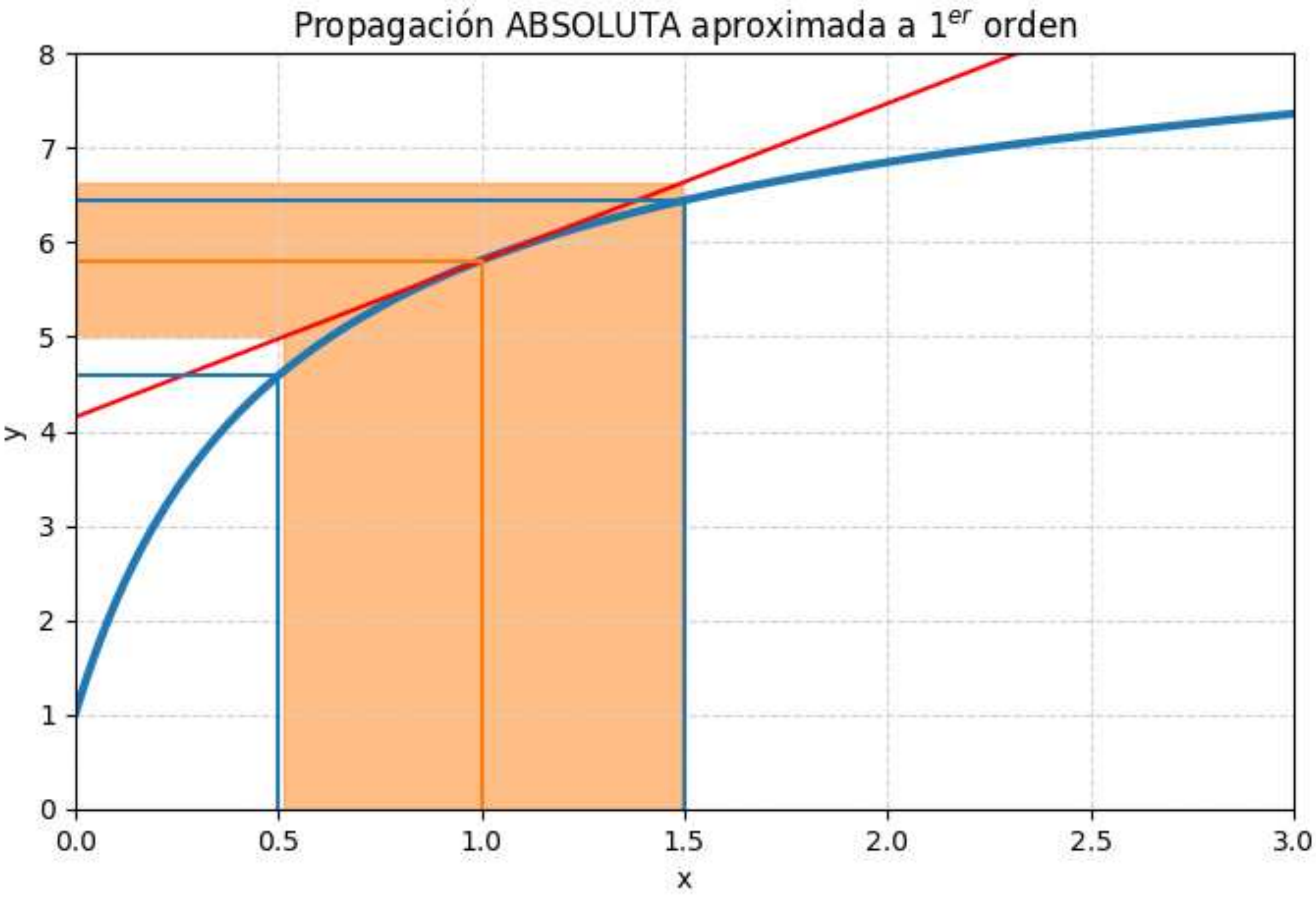
$$\Delta y = \left|\frac{df}{dx}\right|_{x = x_0} \cdot \Delta x$$



Propagación de errores

$$y_0 = f(x_0)$$

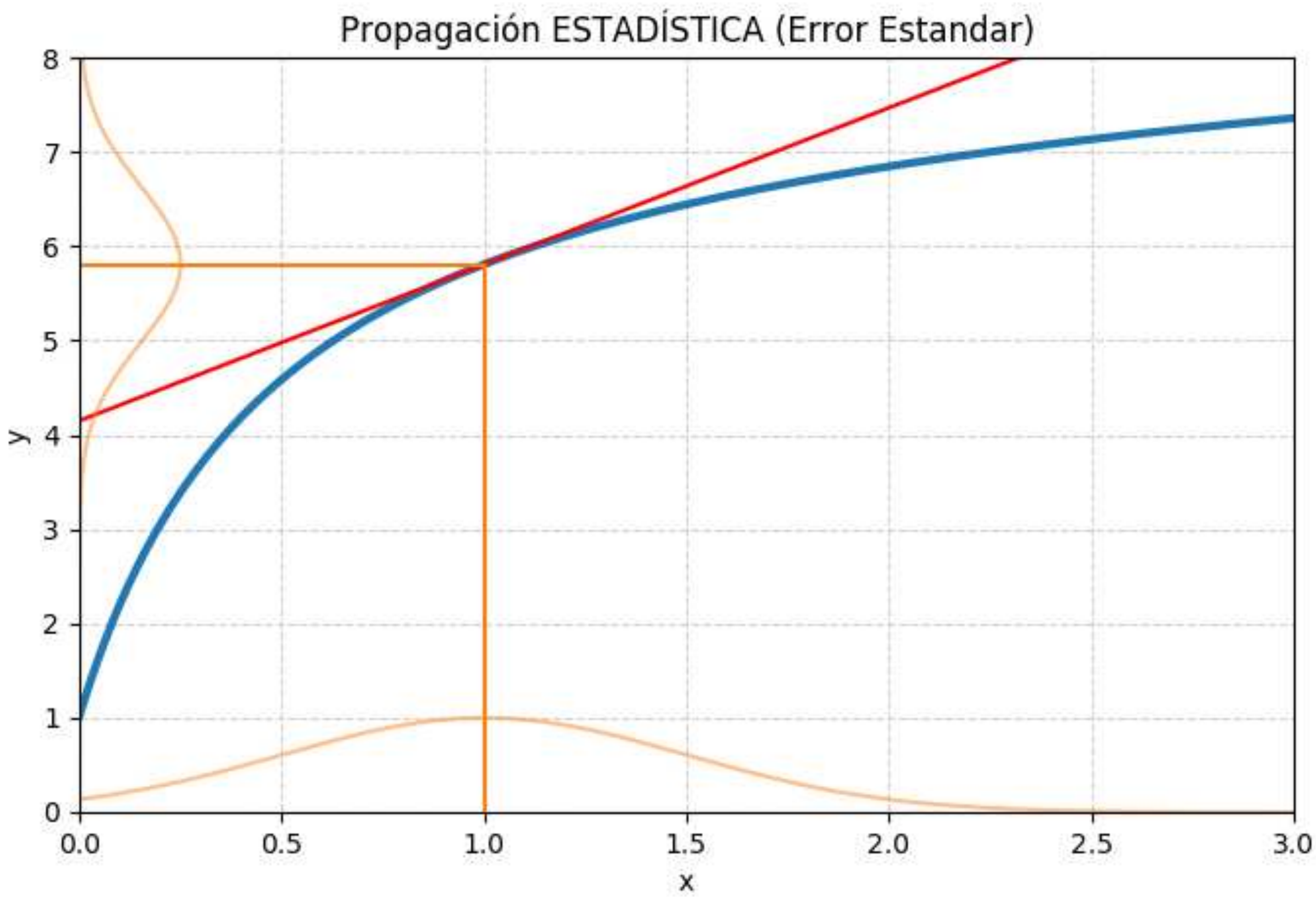
$$\Delta y = \left|\frac{df}{dx}\right|_{x = x_0} \cdot \Delta x$$



Propagación de errores

Propagación del intervalo de incerteza a través de una función

Error Estadístico



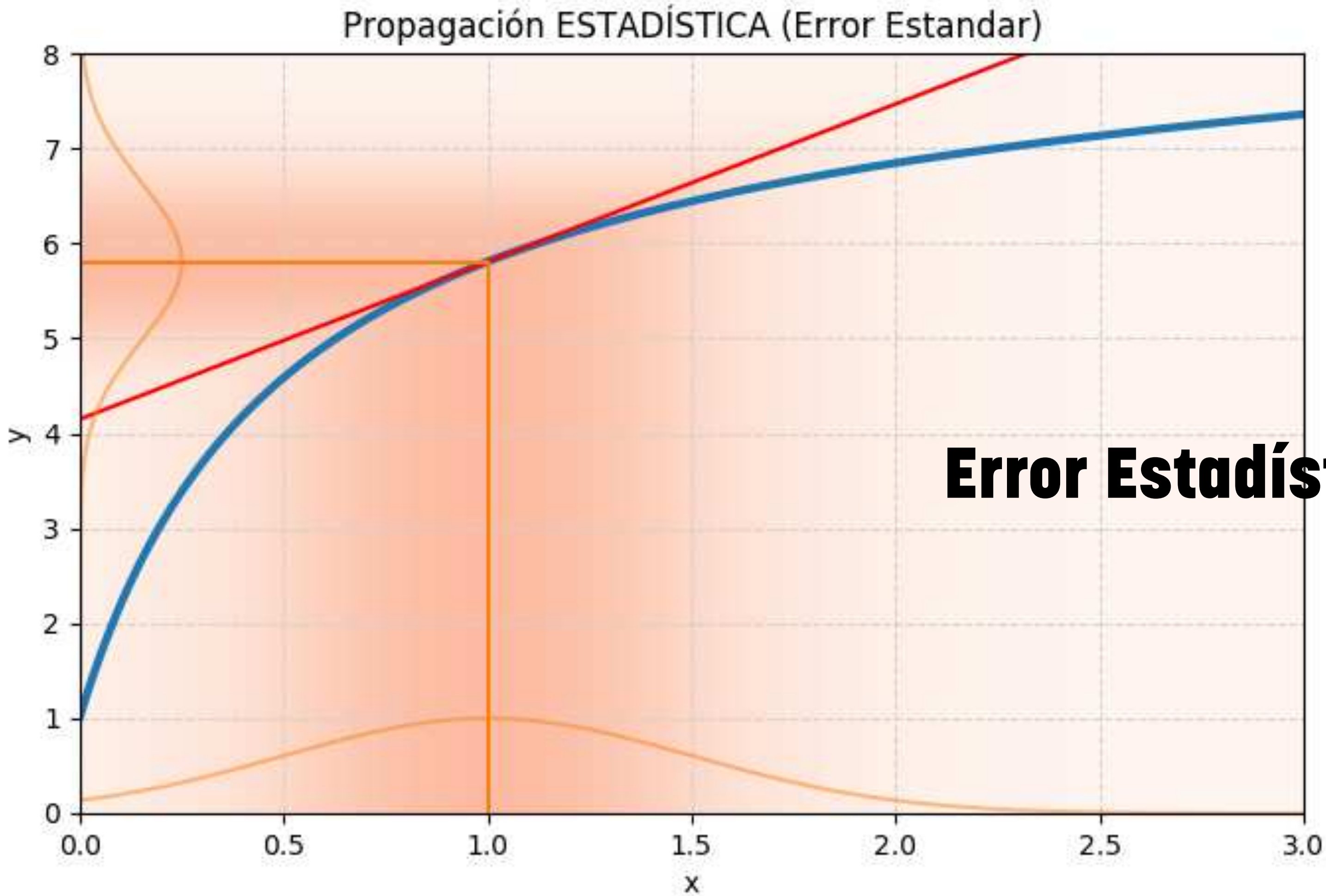
Propagación de errores

$$\sigma_x^2 = \mathrm{VAR}(x) \qquad \sigma_y^2 = \mathrm{VAR}(y) = m^2 \cdot \mathrm{VAR}(x)$$

$$y = m \cdot x + c$$

Aproximando a primer orden (recta)

$$\sigma_y = |m| \cdot \sigma_x$$



Error Estadístico

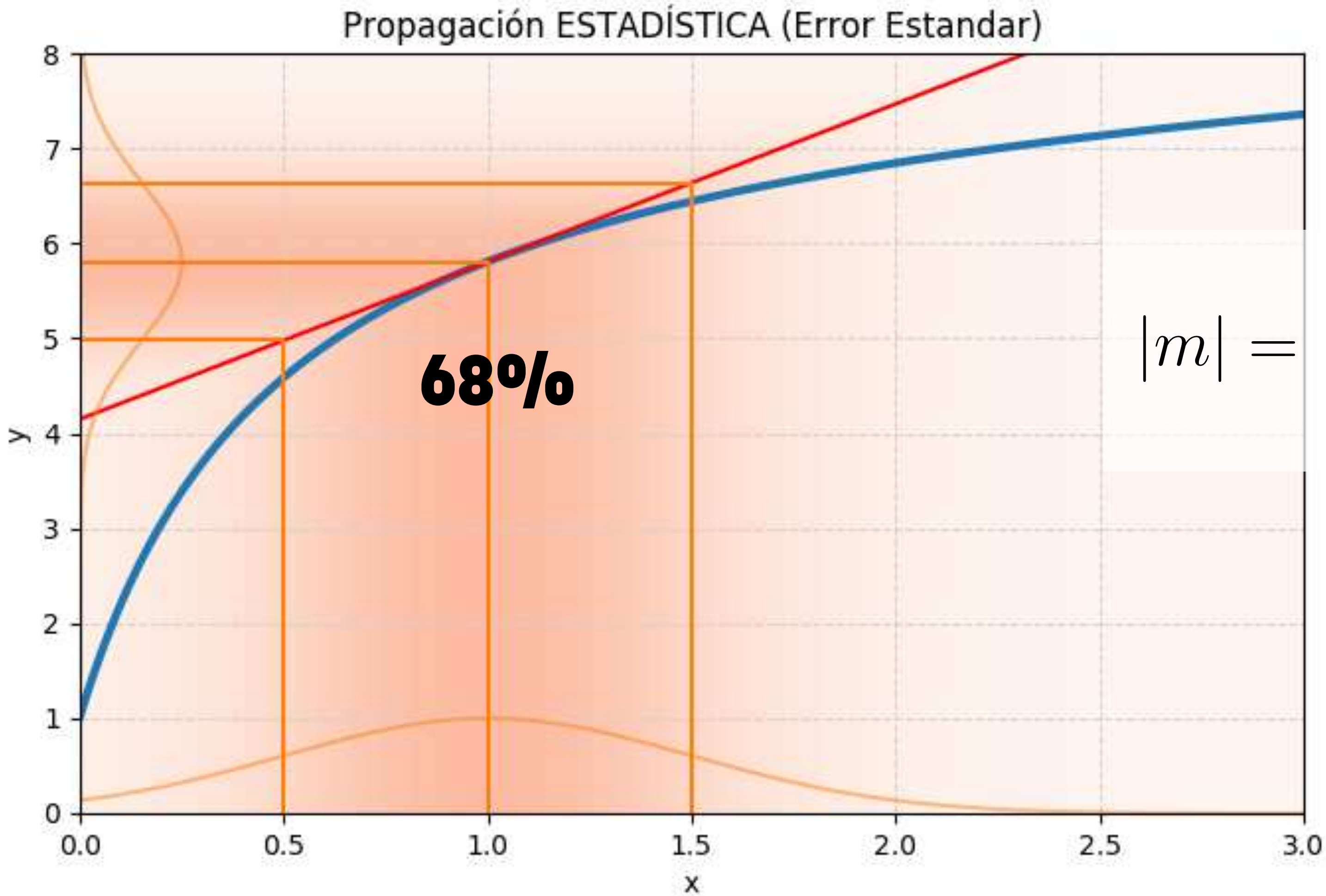
Propagación de errores

$$\sigma_x^2 = \mathrm{VAR}(x) \qquad \sigma_y^2 = \mathrm{VAR}(y) = m^2 \cdot \mathrm{VAR}(x)$$

$$y = m \cdot x + c$$

Aproximando a primer orden (recta)

$$\sigma_y = |m| \cdot \sigma_x$$



$$|m| = \left|\frac{df}{dx}\right| x = x_0$$

Propagación de errores en varias variables

$$z = f(x, y)$$

$$(x_0, \Delta x)$$

$$(y_0, \Delta y)$$

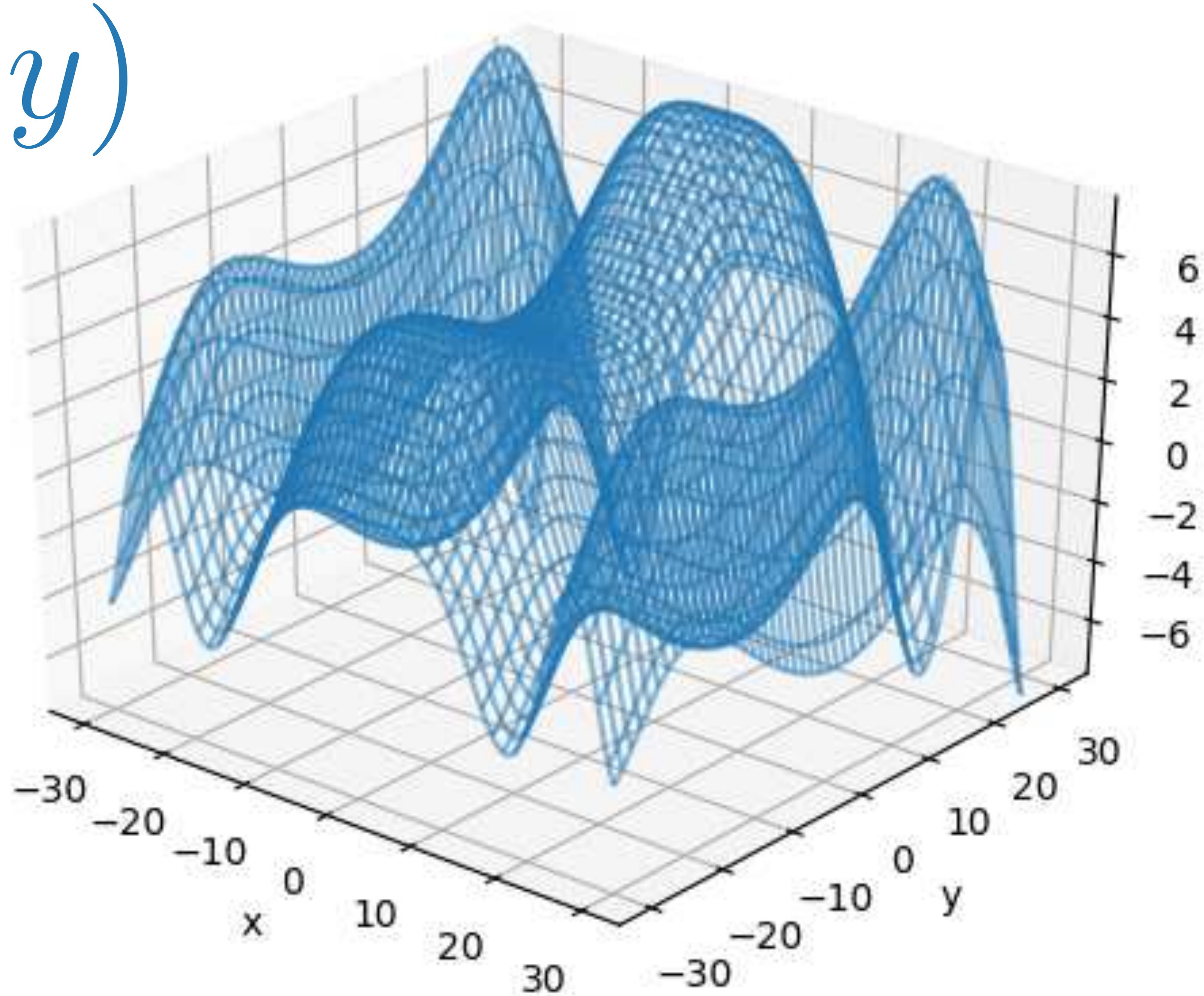
$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

$$\Delta z?$$

Propagación de errores en varias variables

Dos variables: representación como superficie

$$z = f(x, y)$$



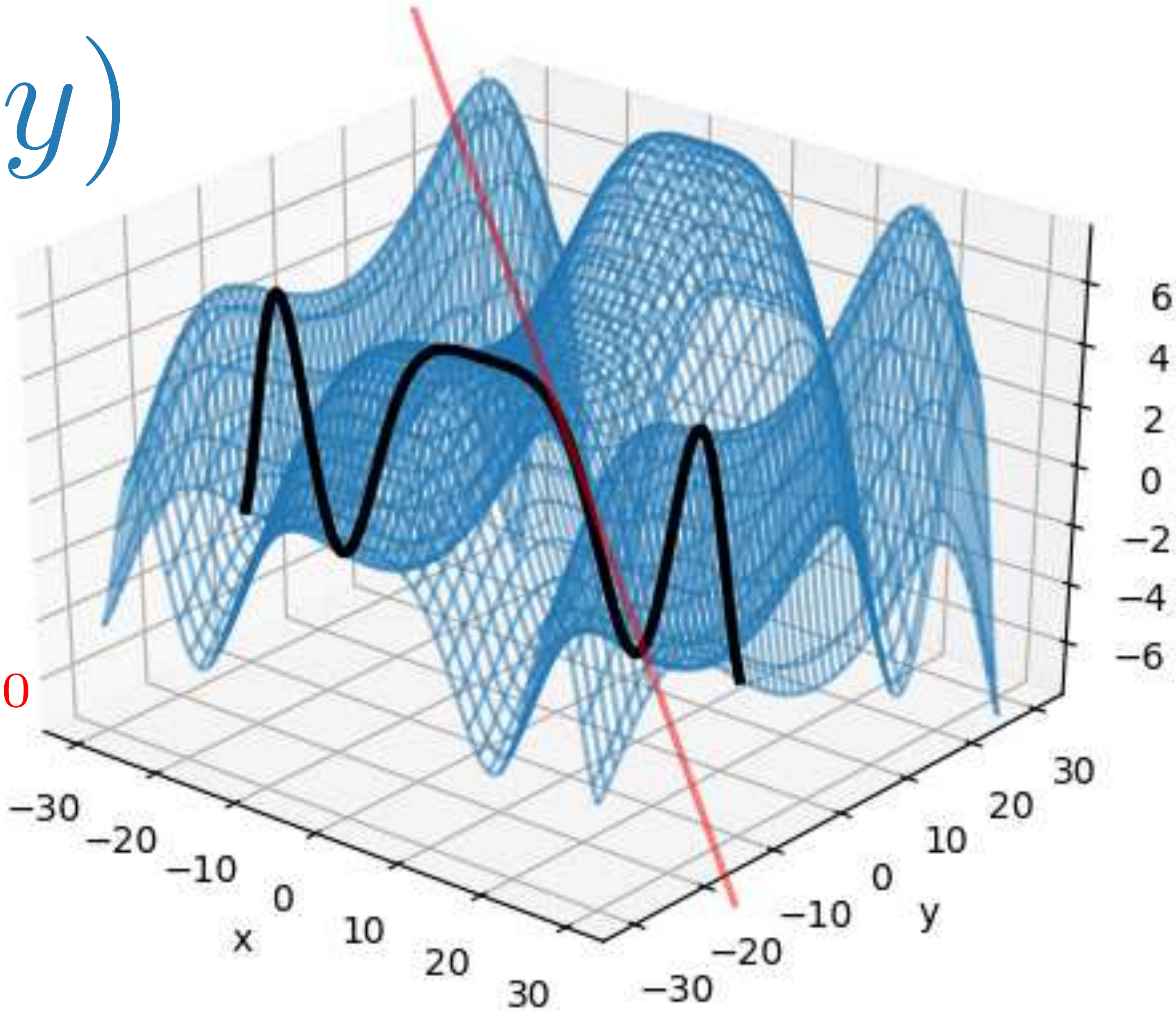
Propagación de errores en varias variables

Se utilizan derivadas parciales para hallar la pendiente en cada varaible

$$z = f(x, y)$$

Pendiente recta:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \underbrace{y_0}_{\text{Constante}}) \right|_{x=x_0}$$



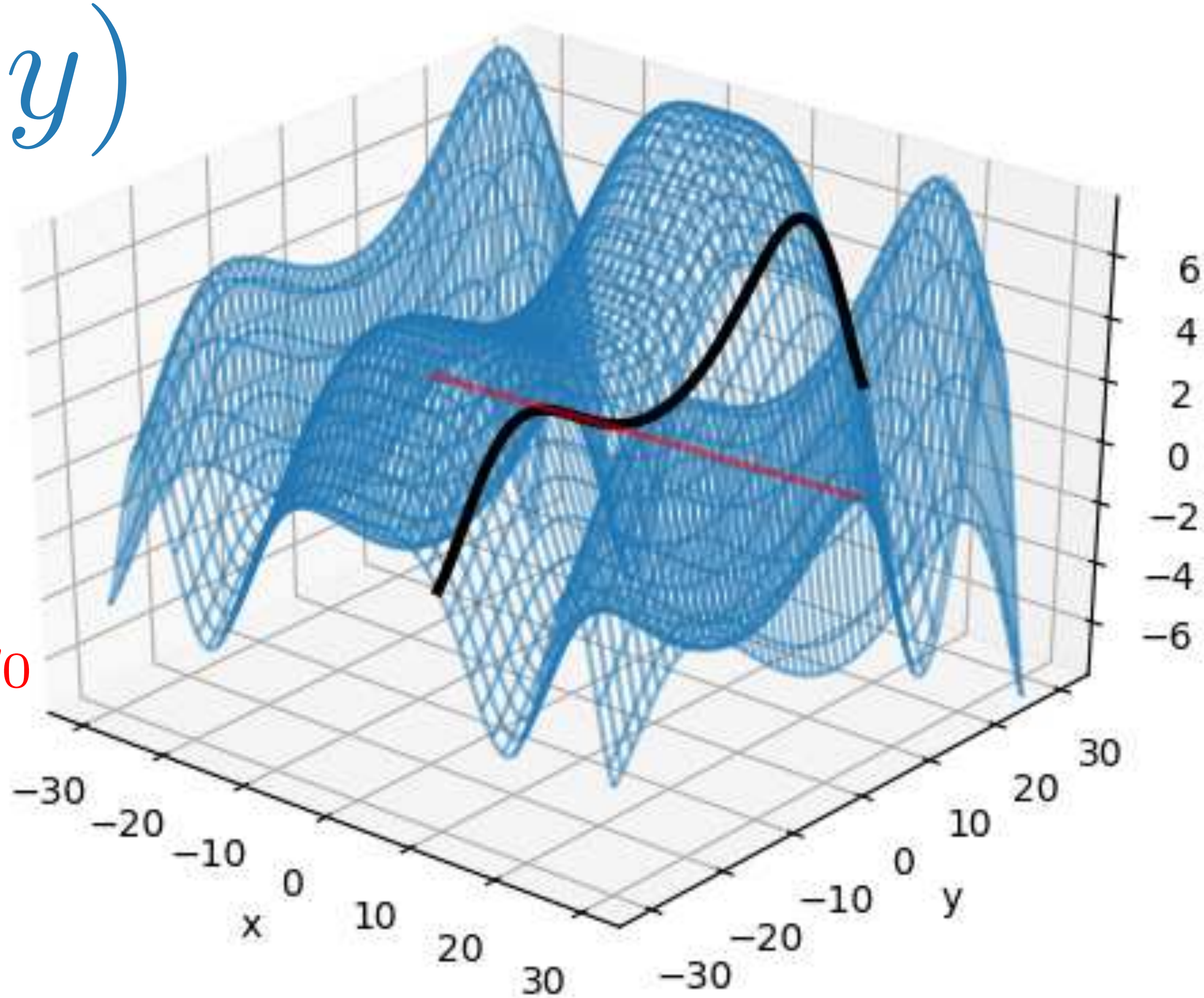
Propagación de errores en varias variables

Se utilizan derivadas parciales para hallar la pendiente en cada varaible

$$z = f(x, y)$$

Pendiente recta:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(\underbrace{x_0}_{\text{Constante}}, y) \right|_{y=y_0}$$



Propagación de errores en varias variables

Propagación de errores estadísticos

"La varianza de la variable calculada es la suma de las varianzas"

$$\Delta Z = \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, w_0, \ldots) \cdot \Delta x\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, w_0, \ldots) \cdot \Delta y\right]^2 + \ldots}$$

Propagación de errores absolutos

"Suma de errores multiplicados por el módulo de la derivada parcial"

$$\Delta Z = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, w_0, \ldots)\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, w_0, \ldots)\right| \cdot \Delta y + \ldots$$

Propagación de errores en varias variables

Propagación de errores estadísticos

"La varianza de la variable calculada es la suma de las varianzas"

$$\Delta Z = \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, w_0, \ldots)\cdot \Delta x\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, w_0, \ldots)\cdot \Delta y\right]^2 + \ldots}$$

ANTE LA DUDA

~~Propagación de errores absolutos~~

~~"Suma de errores multiplicados por el módulo de la derivada parcial"~~

$$\cancel{\Delta Z = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, w_0, \ldots)\right|\cdot \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, w_0, \ldots)\right|\cdot \Delta y + \ldots}$$

Discrepancias

Discrepancia

- Medición 1: $X_1 = \overline{X_1} \pm \Delta X_1$
- Medición 2: $X_2 = \overline{X_2} \pm \Delta X_2$

Definimos $\Delta X = \sqrt{\Delta X_1^2 + \Delta X_2^2}$

$|\overline{X_2} - \overline{X_1}| \geq \Delta X$

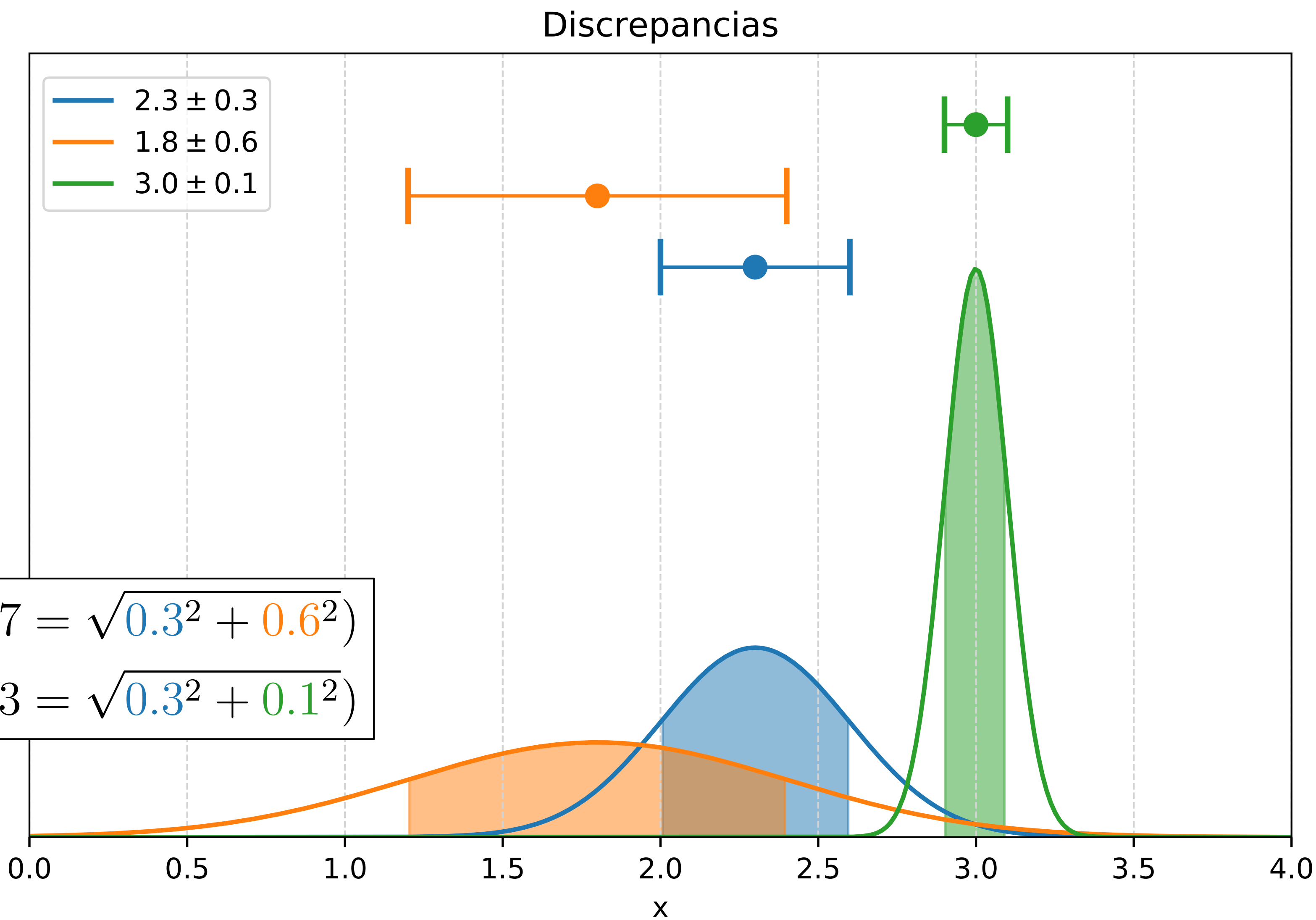
Mediciones distintas entre sí con un límite de confianza del 68%

$|\overline{X_2} - \overline{X_1}| \geq 2\Delta X$

Mediciones distintas entre sí con un límite de confianza del 95%

$$|2.3 - 1.8| = 0.50 < 0.7 = \sqrt{0.3^2 + 0.6^2})$$

$$|2.3 - 3.0| = 0.70 > 0.3 = \sqrt{0.3^2 + 0.1^2})$$



Promedios pesados

Promedio pesados entre L mediciones independientes con su error

$$\boxed{\langle x \rangle_p = \sigma^2_{\langle x \rangle_p} \sum_{k=1}^{L} \frac{x_k}{\sigma_k^2}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sigma^2_{\langle x \rangle_p}} = \sum_{k=1}^{L} \frac{1}{\sigma_k^2}}$$

$\langle x \rangle_p$: promedio pesado de x

$\sigma_{\langle x \rangle_p}$: Error del promedio pesado