Ajuste de datos y adquisición digital

<u>Docentes del Laboratorio</u>

Gustavo Grinblat

Jorge Alliende

Federico Petrovich

Laboratorio de Mecánica y Termodinámica

Cátedra: Prof. Ana Amador

Planteo del problema

- Se tiene un conjunto de mediciones $\{x_\mathrm{i}\}_{\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{N}}$
- Se tiene otro conjunto de mediciones $\{\mathrm{y_i}\}_{\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{N}}$

Planteo del problema

- Se tiene un conjunto de mediciones $\{x_\mathrm{i}\}_{\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{N}}$
- Se tiene otro conjunto de mediciones $\{\mathrm{y}_\mathrm{i}\}_{\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{N}}$
- Hipótesis: Existe una relación funcional entre las mediciones x e y de la forma $y = f(x) \rightarrow$ **modelo teórico**.

Planteo del problema

- Se tiene un conjunto de mediciones $\{x_i\}_{i=1,\ldots,N}$
- Se tiene otro conjunto de mediciones $\{y_i\}_{i=1,\ldots,N}$
- Hipótesis: Existe una relación funcional entre las mediciones x e y de la forma $y = f(x) \rightarrow$ **modelo teórico**.
- Por ejemplo:

  $y = f(x) = mx + q$ es una relación **lineal** entre x e y

Planteo del problema

- Se tiene un conjunto de mediciones $\{x_i\}_{i=1,\ldots,N}$
- Se tiene otro conjunto de mediciones $\{y_i\}_{i=1,\ldots,N}$
- Hipótesis: Existe una relación funcional entre las mediciones x e y de la forma $y = f(x) \rightarrow$ **modelo teórico**.
- Por ejemplo:

  $y = f(x) = mx + q$ es una relación **lineal** entre x e y

Asumiendo un cierto modelo teórico (por ej. $y = mx + q$) ¿Cómo se encuentran los parámetros del modelo (por ej. m y q) que **mejor ajustan** los datos experimentales?

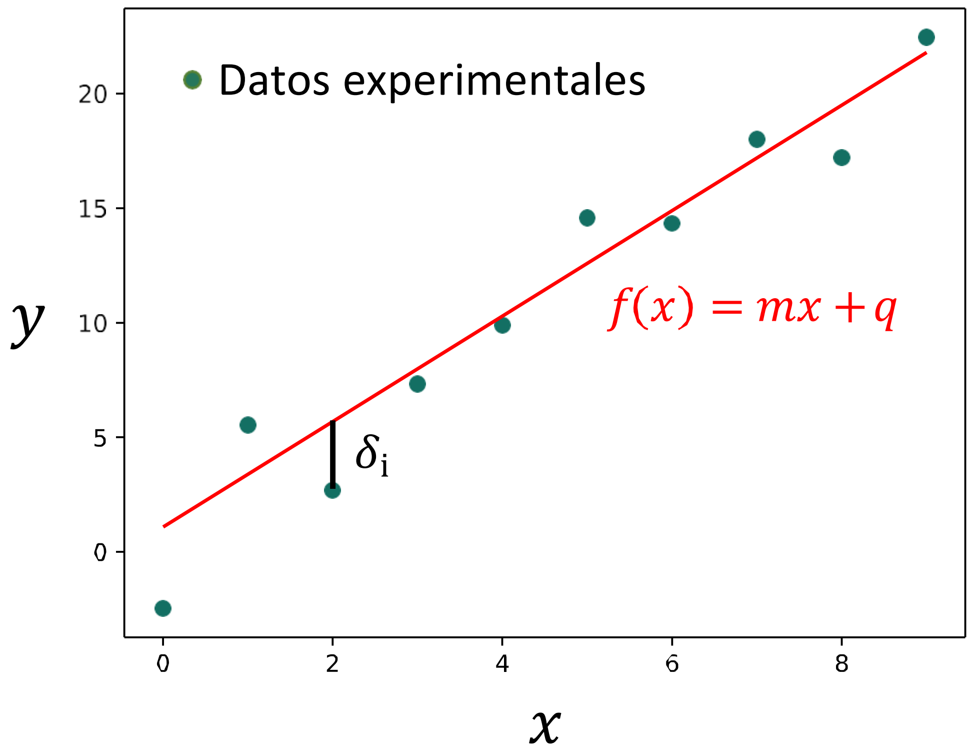
Método de cuadrados mínimos

- Encontrar la función $f(x)$ que minimice la suma de las diferencias al cuadrado entre la predicción $f(x_i)$ y la medición y_i.

Método de cuadrados mínimos

- Encontrar la función $f(x)$ que minimice la suma de las diferencias al cuadrado entre la predicción $f(x_\mathrm{i})$ y la medición y_i.

$$S = \sum_{i=1}^{N} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(f\left(x_i\right) - y_i\right)^2$$

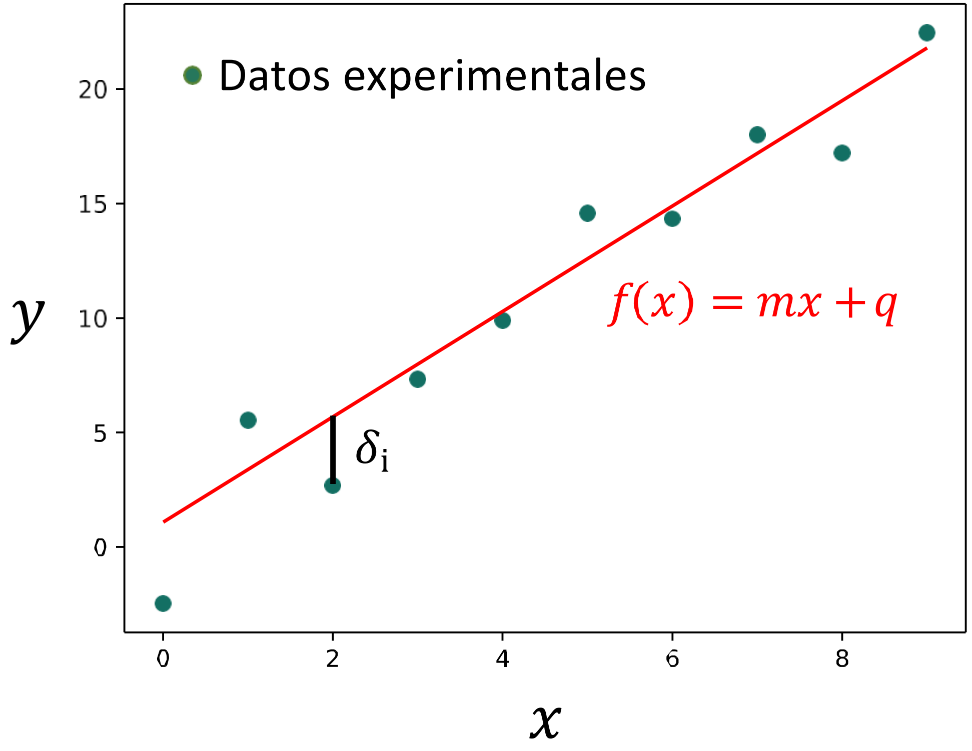


Método de cuadrados mínimos

- Encontrar la función $f(x)$ que minimice la suma de las diferencias al cuadrado entre la predicción $f(x_i)$ y la medición y_i.

$$S = \sum_{i=1}^{N} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(f\left(x_i\right) - y_i\right)^2$$

- Hipótesis: La variable y tiene distribución gaussiana con valor medio $f(x)$. El error relativo en x es mucho menor al de y.



Método de cuadrados mínimos

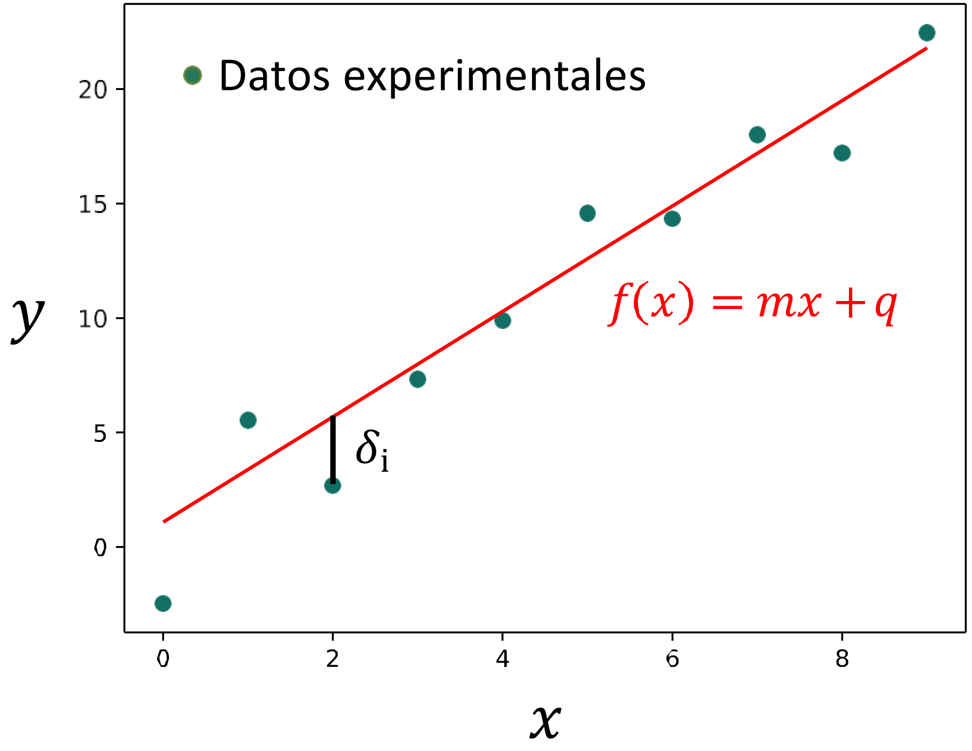
- Encontrar la función $f(x)$ que minimice la suma de las diferencias al cuadrado entre la predicción $f(x_i)$ y la medición y_i.

$$S = \sum_{i=1}^{N} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(f\left(x_i\right) - y_i\right)^2$$

- Hipótesis: La variable y tiene distribución gaussiana con valor medio $f(x)$. El error relativo en x es mucho menor al de y.

- Caso lineal ($y = f(x) = mx + q$)

$$S = \sum_{i=1}^{N} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left|(mx_i + q) - y_i\right|^2$$



Método de cuadrados mínimos

$$S\left(m,q\right)=\sum_{i=1}^{N}\left|(mx_i+q)-y_i\right|^2 \;=\sum_{i=1}^{N}y_i^2+m^2\sum_{i=1}^{N}x_i^2+Nq^2+2mq\sum_{i=1}^{N}x_i-2m\sum_{i=1}^{N}x_iy_i-2q\sum_{i=1}^{N}y_i$$

Método de cuadrados mínimos

$$S\left(m,q\right)=\sum_{i=1}^{N}\left|\left(mx_i+q\right)-y_i\right|^2=\sum_{i=1}^{N}y_i^2+m^2\sum_{i=1}^{N}x_i^2+Nq^2+2mq\sum_{i=1}^{N}x_i-2m\sum_{i=1}^{N}x_iy_i-2q\sum_{i=1}^{N}y_i$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial S\left(m,q\right)}{\partial m}&=0\\[2ex]\frac{\partial S\left(m,q\right)}{\partial q}&=0\end{aligned}\right]$$

Minimización de *S*
en función de *m* y *q*

Método de cuadrados mínimos

$$S(m,q) = \sum_{i=1}^{N} \left|(mx_i + q) - y_i\right|^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2 + m^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + Nq^2 + 2mq \sum_{i=1}^{N} x_i - 2m \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - 2q \sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial S(m,q)}{\partial m} = 0 \\[2em] \dfrac{\partial S(m,q)}{\partial q} = 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{l} 2m \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + 2q \sum_{i=1}^{N} x_i - 2 \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = 0 \\[2em] 2Nq + 2m \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i - 2 \sum_{i=1}^{N} y_i = 0 \end{array}$$

Minimización de *S*
en función de *m* y *q*

Método de cuadrados mínimos

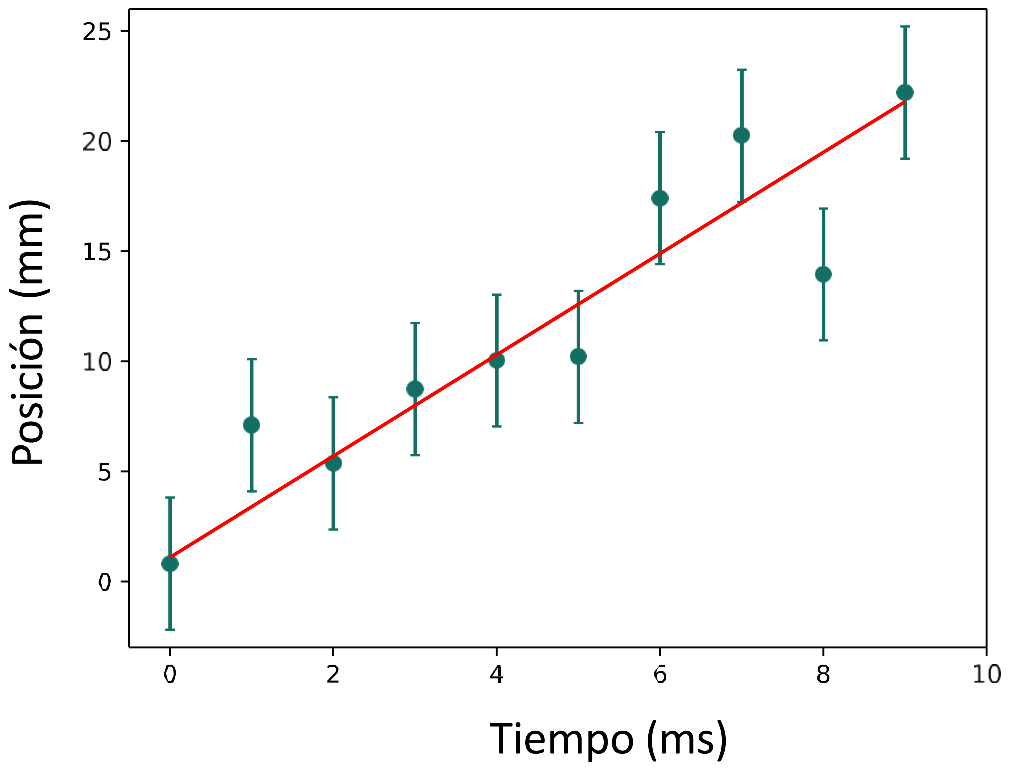
$$S(m,q) = \sum_{i=1}^{N} |(mx_i + q) - y_i|^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2 + m^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + Nq^2 + 2mq \sum_{i=1}^{N} x_i - 2m \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - 2q \sum_{i=1}^{N} y_i$$

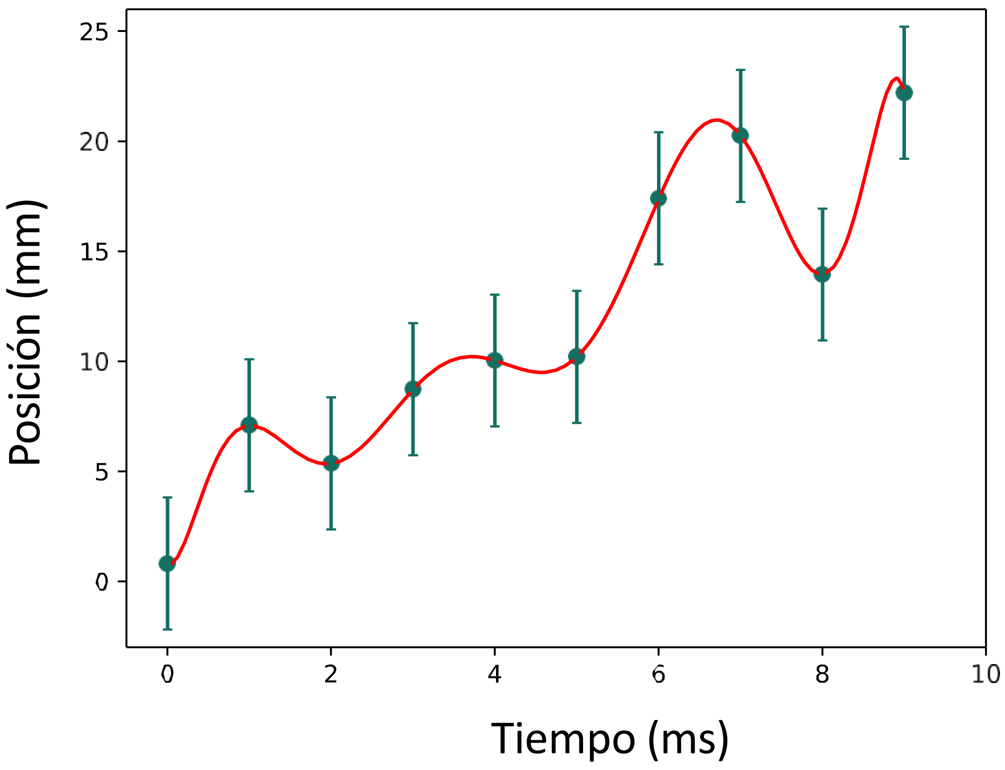
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S(m,q)}{\partial m} &= 0 \\ \frac{\partial S(m,q)}{\partial q} &= 0 \end{aligned}\right] \longrightarrow \left.\begin{aligned} 2m \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + 2q \sum_{i=1}^{N} x_i - 2 \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = 0 \\ 2Nq + 2m \sum_{i=1}^{N} x_i - 2 \sum_{i=1}^{N} y_i = 0 \end{aligned}\right] \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} m &= \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ q &= \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \end{aligned}}$$

Minimización de *S* en función de *m* y *q*

Encontramos los parámetros m y q que minimizan la suma cuadrática de las diferencias entre el modelo y los datos.

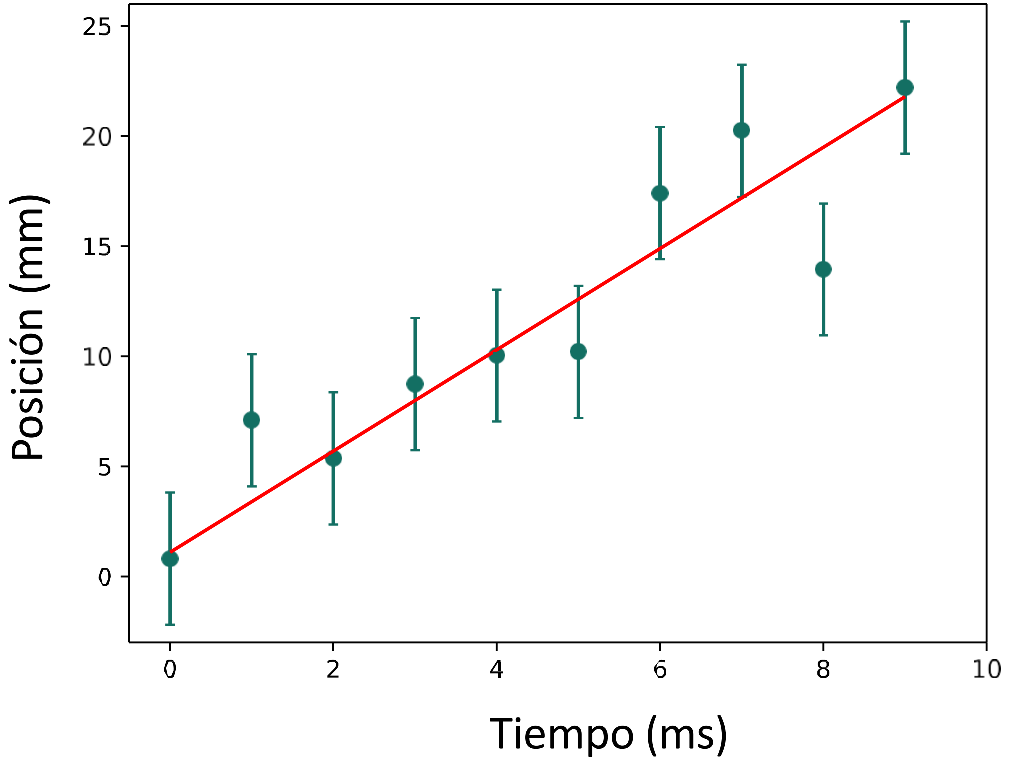
Criterios de ajuste

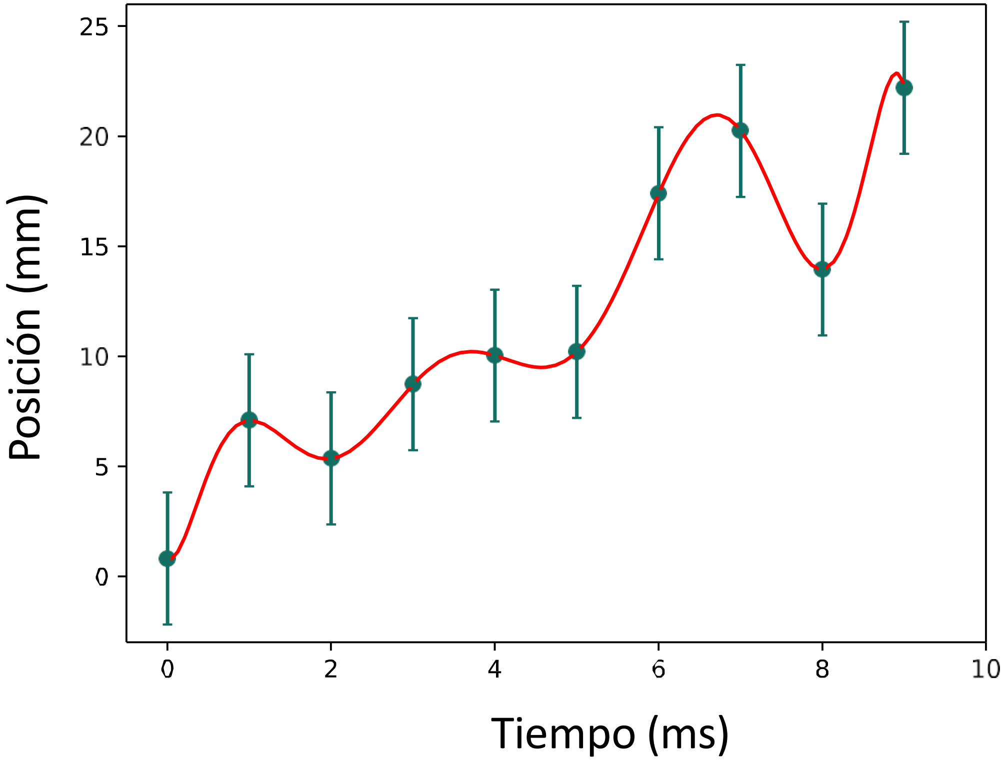




¿Qué ajuste elegirían? ¿Por qué?

Criterios de ajuste





¿Qué ajuste elegirían? ¿Por qué?

$$\boxed{d = d_0 + v * t}$$

Validez de un ajuste

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}$$

Validez de un ajuste

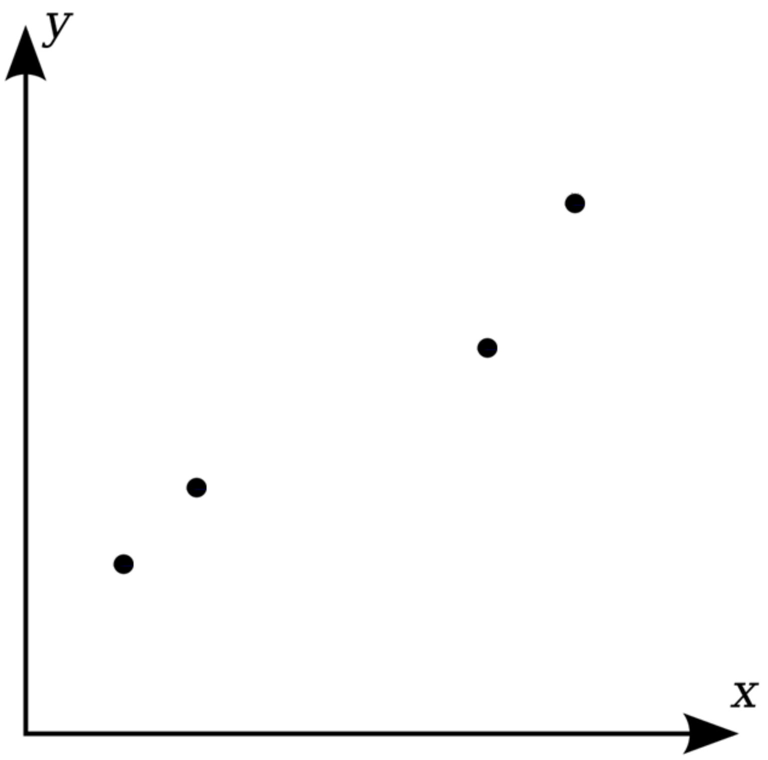
$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2} \Rightarrow$$

Mientras más cerca de 1, mejor es el ajuste

Validez de un ajuste

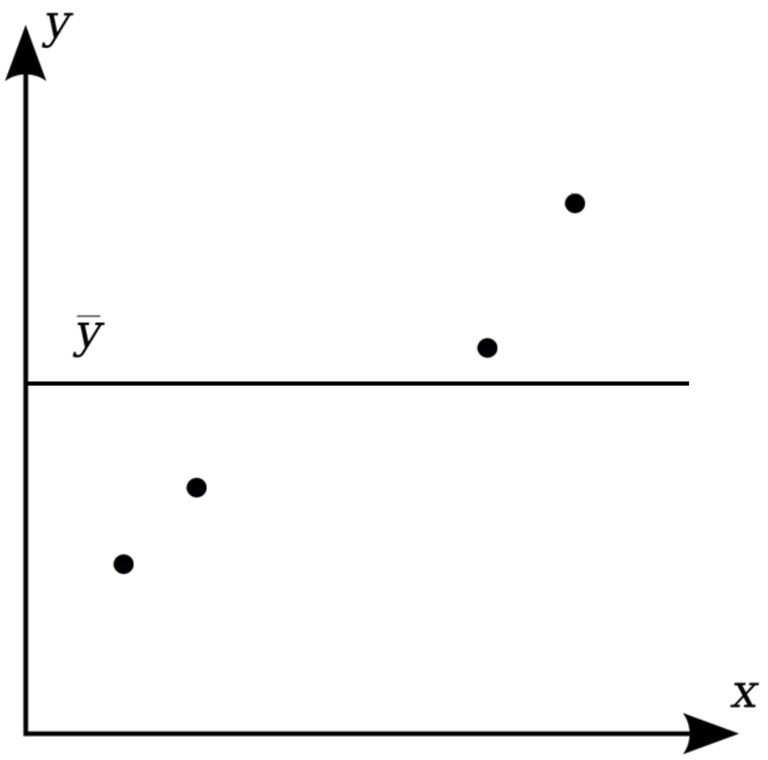
$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}$$

Mientras más cerca de 1, mejor es el ajuste



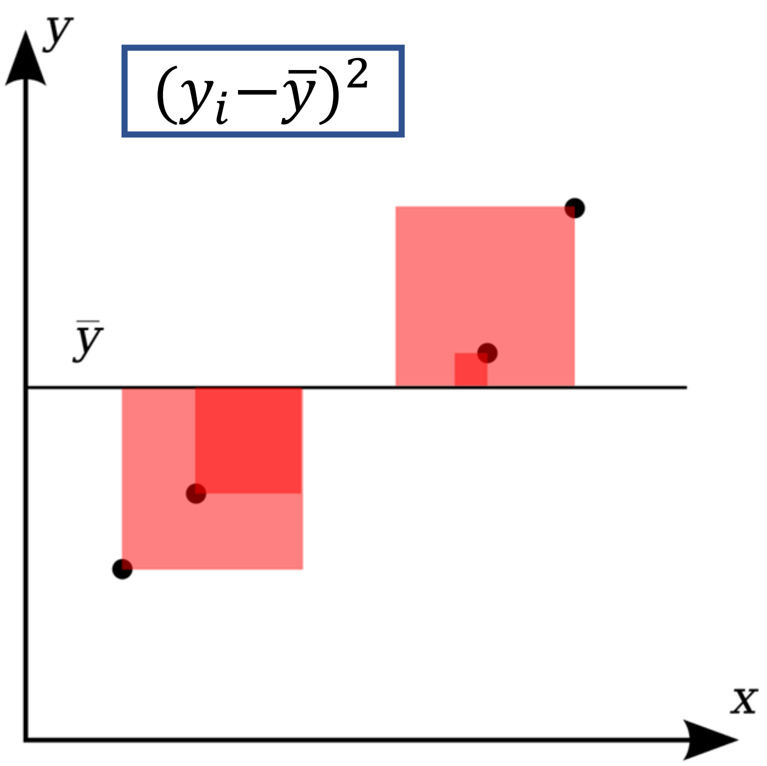
Validez de un ajuste

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}$$ $\Rightarrow$ Mientras más cerca de 1, mejor es el ajuste



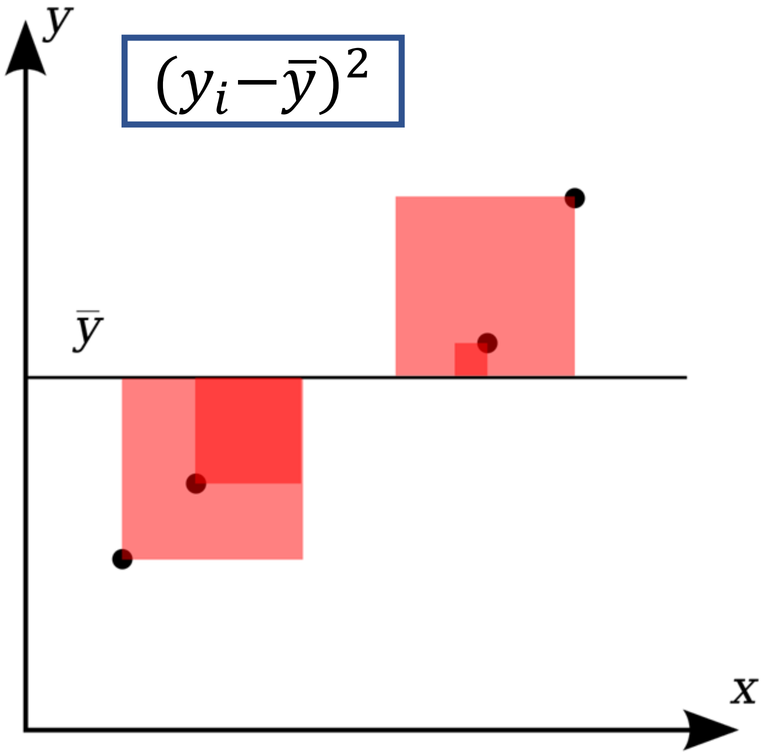
Validez de un ajuste

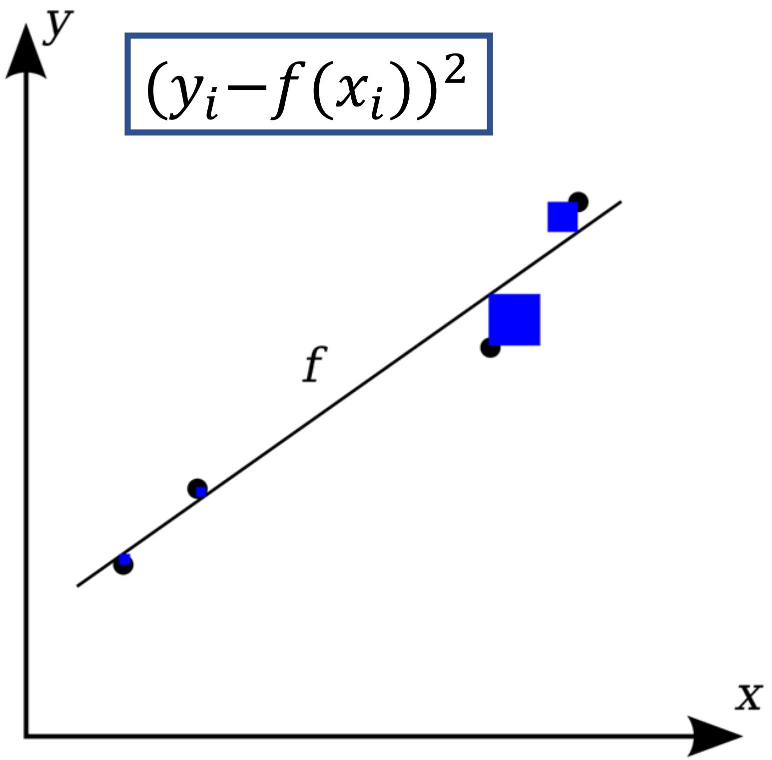
$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}$$ $\Rightarrow$ Mientras más cerca de 1, mejor es el ajuste



Validez de un ajuste

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}$$ → Mientras más cerca de 1, mejor es el ajuste





Validez de un ajuste

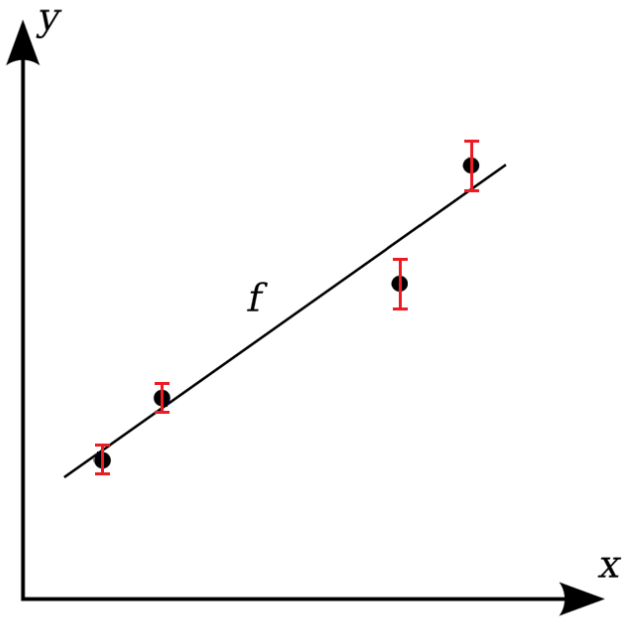
$$\chi^2_{N'} = \frac{1}{N'}\sum_{i=1}^{N}\frac{(y_i - f(x_i))^2}{\sigma_i^2}$$

$N' = \mathrm{N} - \ n_{par}$, grados de libertad

Validez de un ajuste

$$\chi^2_{N'} = \frac{1}{N'} \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - f(x_i))^2}{\sigma_i^2}$$

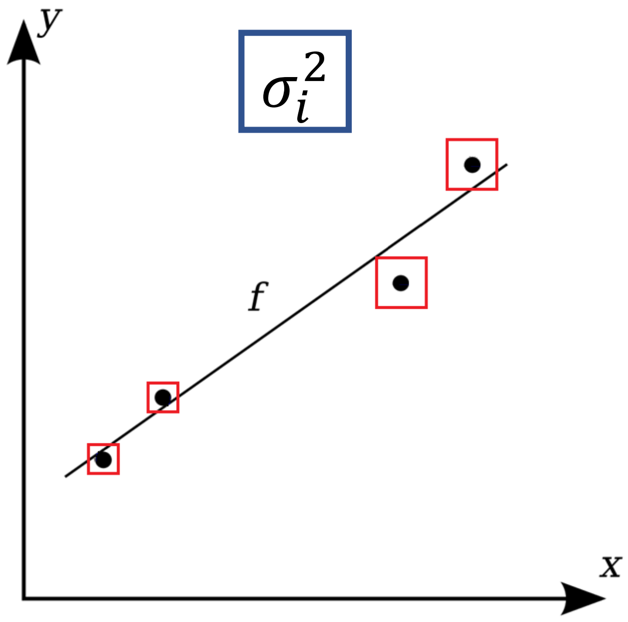
$N' = \mathrm{N} - n_{par}$, grados de libertad



Validez de un ajuste

$$\chi^2_{N'} = \frac{1}{N'} \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - f(x_i))^2}{\sigma_i^2}$$

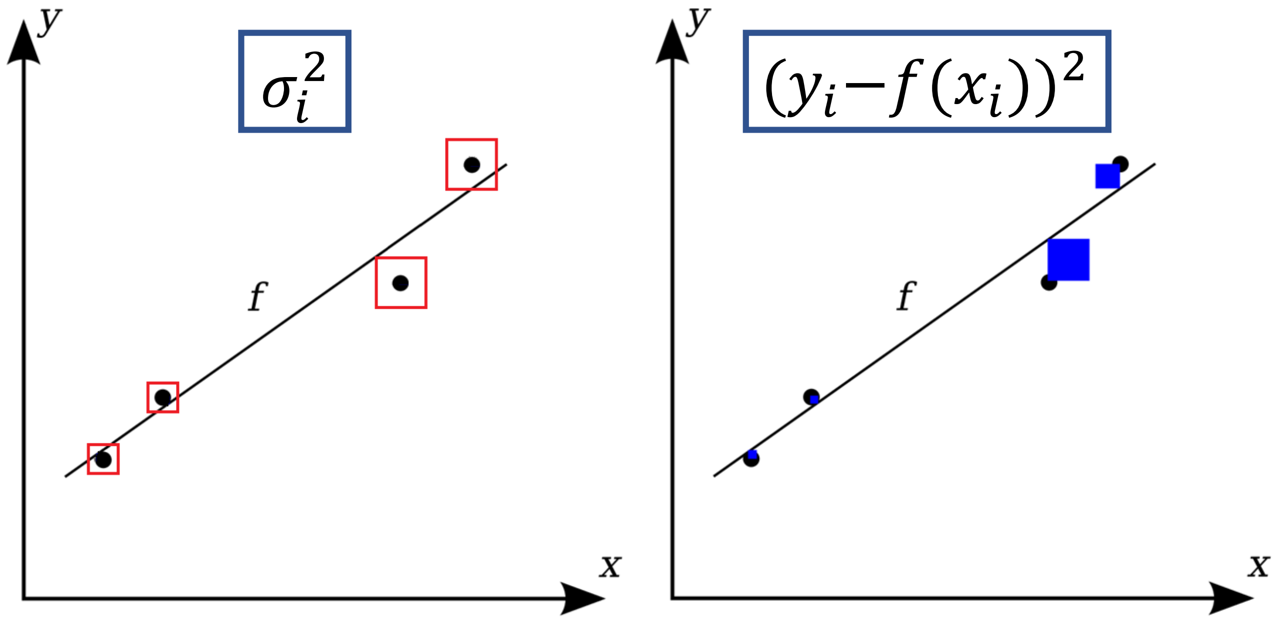
$N' = \mathrm{N} - n_{par}$, grados de libertad



Validez de un ajuste

$$\chi^2_{N'} = \frac{1}{N'}\sum_{i=1}^{N}\frac{(y_i - f(x_i))^2}{\sigma_i^2}$$

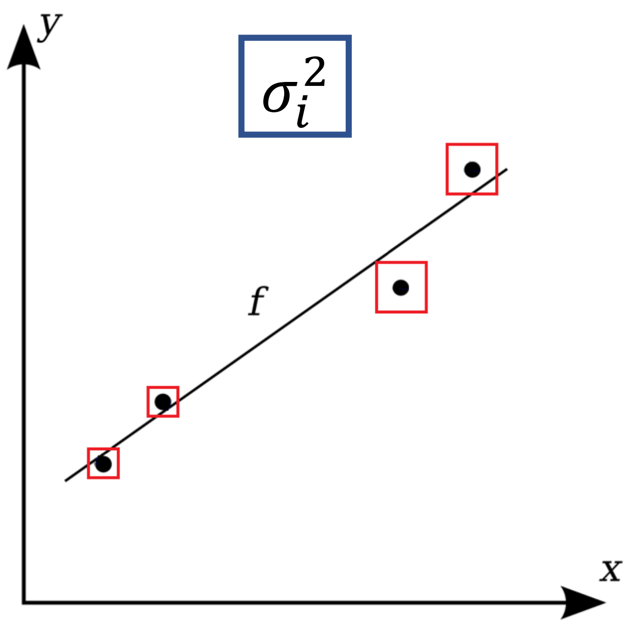
$N' = \mathrm{N} - \ n_{par}$, grados de libertad

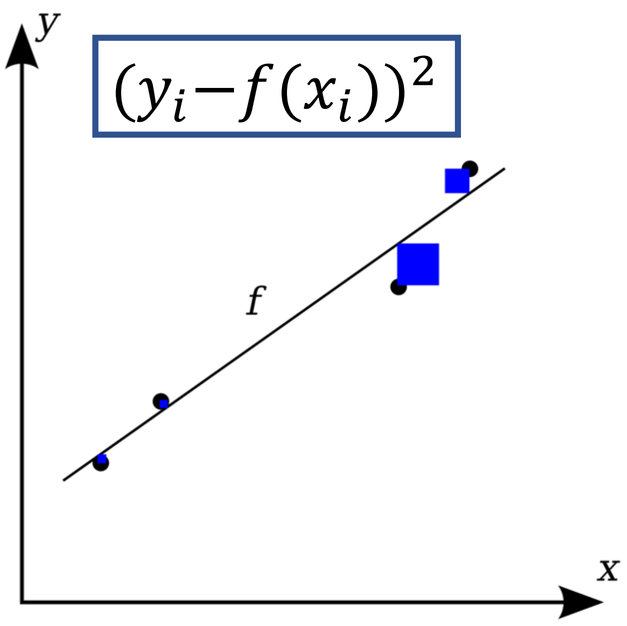


Validez de un ajuste

$$\chi^2_{N'} = \frac{1}{N'}\sum_{i=1}^{N}\frac{(y_i - f(x_i))^2}{\sigma_i^2}$$

$N' = \mathrm{N} - n_{par}$, grados de libertad

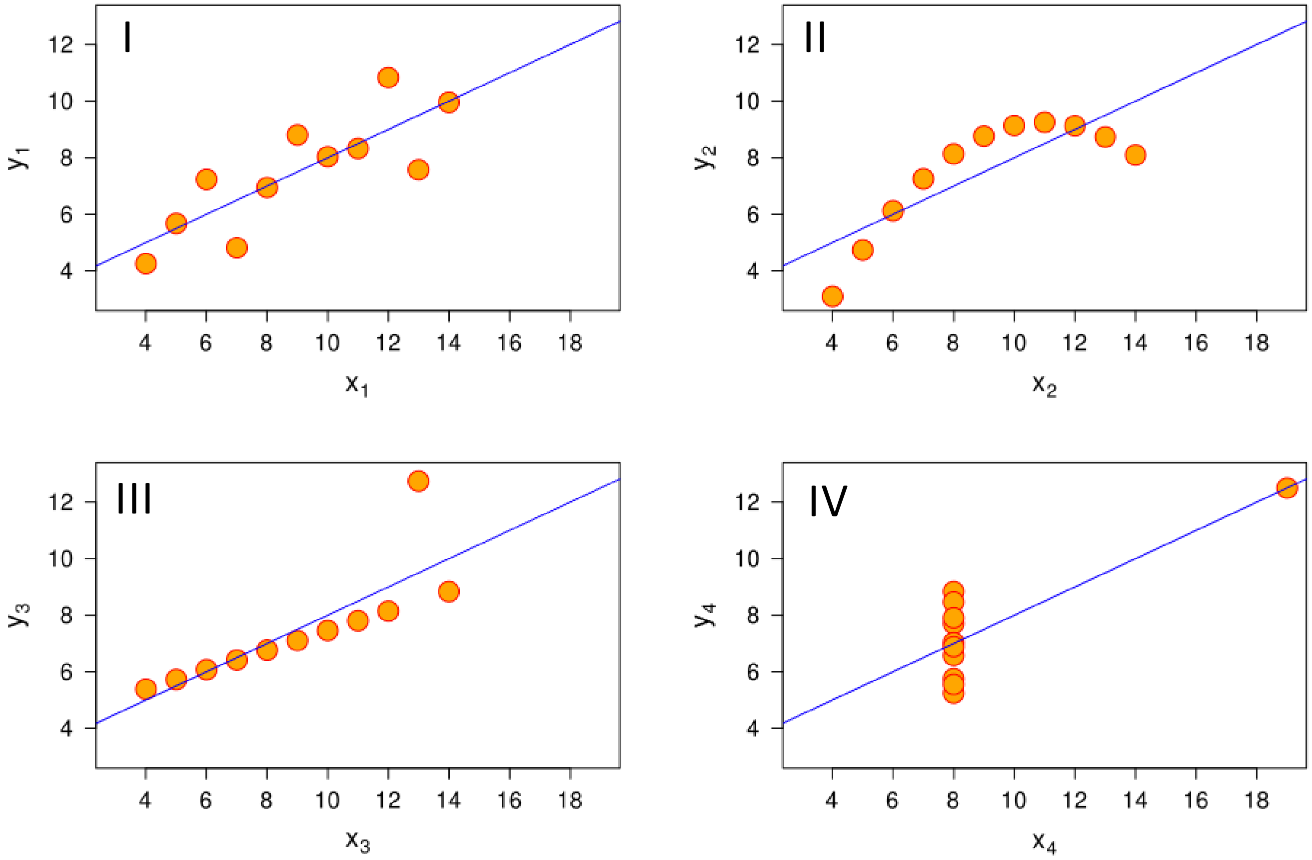




- $\boldsymbol{\chi^2_{N'}} \sim$ **1 o menor** $\rightarrow$ El modelo describe adecuadamente a las observaciones.
- $\boldsymbol{\chi^2_{N'}} \gg \mathbf{1} \rightarrow$ El modelo no representa una buena descripción de los datos.
- $\boldsymbol{\chi^2_{N'}} \ll \mathbf{1} \rightarrow$ El modelo es “demasiado bueno”, lo cual puede indicar que se sobreestimaron los errores.

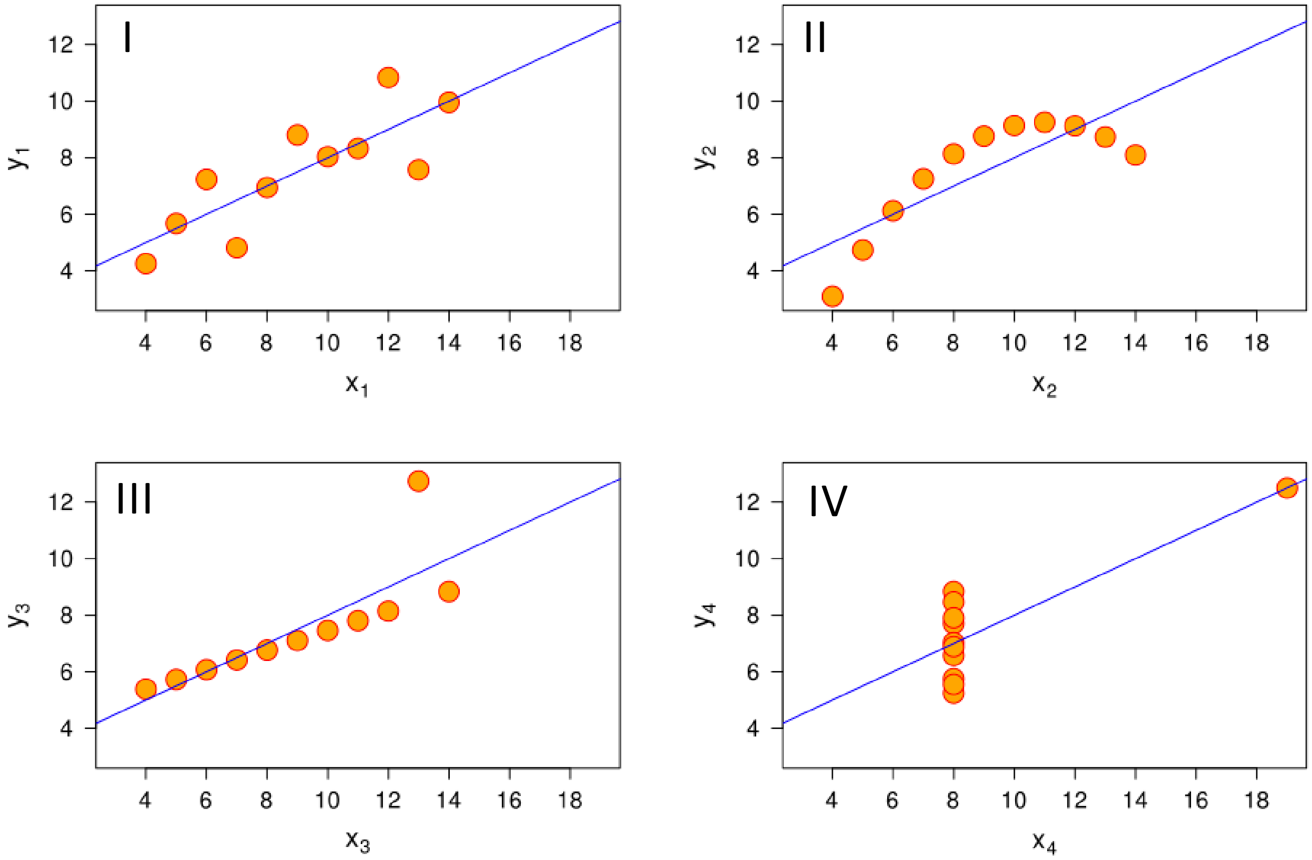
La estadística no nos dice todo

Cuarteto de Anscombe



La estadística no nos dice todo

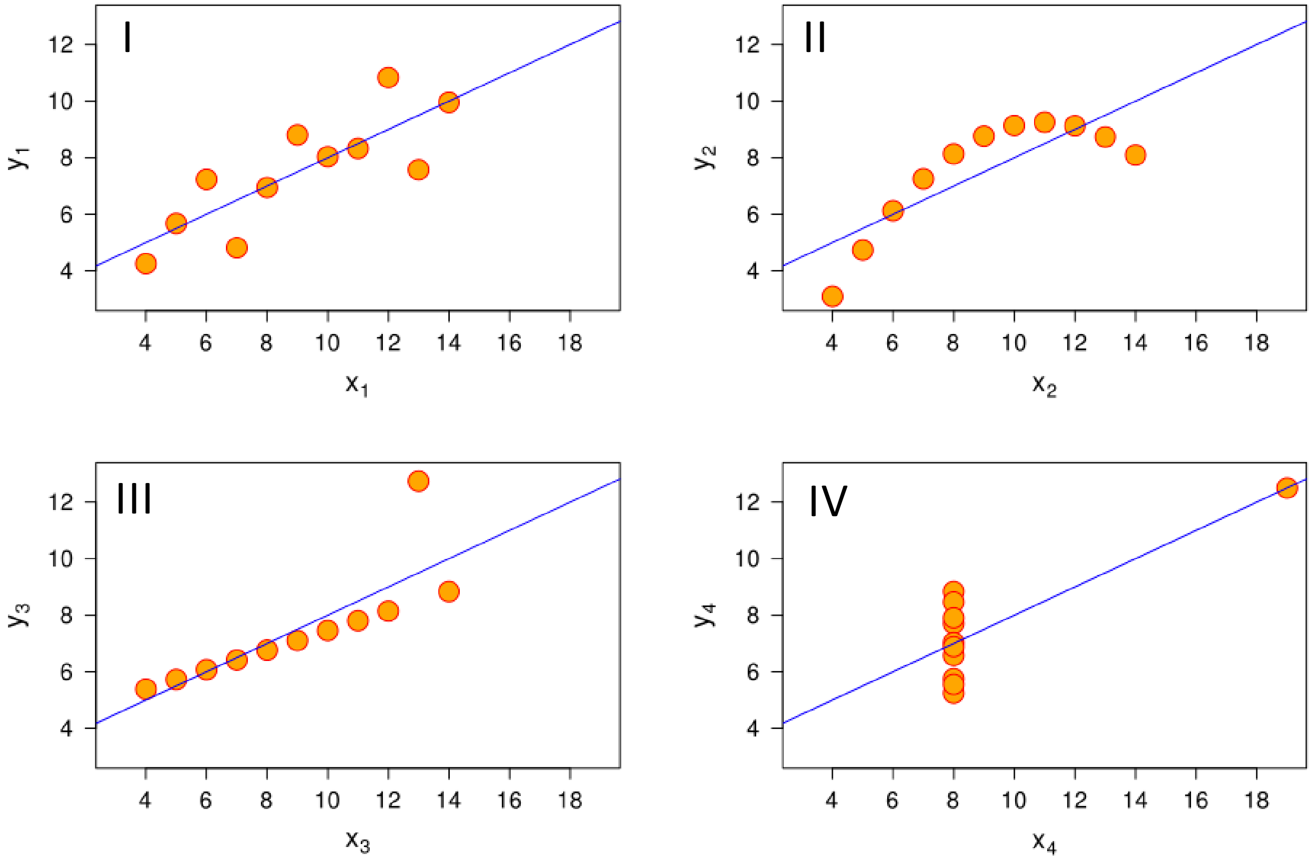
Cuarteto de Anscombe



Estos cuatro conjuntos de datos tienen una estadística idéntica ¡Pero se ven muy diferentes!

La estadística no nos dice todo

Cuarteto de Anscombe



Estos cuatro conjuntos de datos tienen una estadística idéntica ¡Pero se ven muy diferentes!

Es muy importante ver los datos antes de hacer un ajuste.

Linealización de ecuaciones

Cuando la ecuación de ajuste no es lineal → Muchas veces conviene linealizar la ecuación

Linealización de ecuaciones

Cuando la ecuación de ajuste no es lineal → Muchas veces conviene linealizar la ecuación

$y = A * b^x \rightarrow ln(y) = ln(A) + x * ln(b)$ → Se grafica $ln(\mathrm{y})$ vs. x

Linealización de ecuaciones

Cuando la ecuación de ajuste no es lineal → Muchas veces conviene linealizar la ecuación

$y = A * b^x \rightarrow ln(y) = ln(A) + x * ln(b)$ → Se grafica $ln(y)$ vs. x

$y = A * x^b \rightarrow ln(y) = ln(A) + b * ln(x)$ → Se grafica $ln(y)$ vs. $ln(x)$

Linealización de ecuaciones

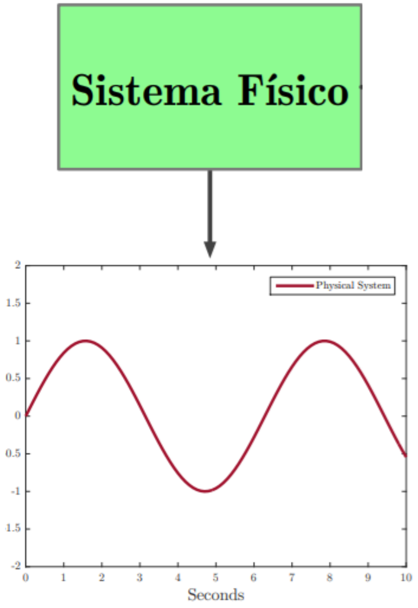
Cuando la ecuación de ajuste no es lineal $\Rightarrow$ Muchas veces conviene linealizar la ecuación

$y = A * b^x \rightarrow ln(y) = ln(A) + x * ln(b)$ $\Rightarrow$ Se grafica $ln(y)$ vs. x

$y = A * x^b \rightarrow ln(y) = ln(A) + b * ln(x)$ $\Rightarrow$ Se grafica $ln(y)$ vs. $ln(x)$

Esto permite evaluar más fácilmente la presencia de valores atípicos, y determinar si el modelo es adecuado.

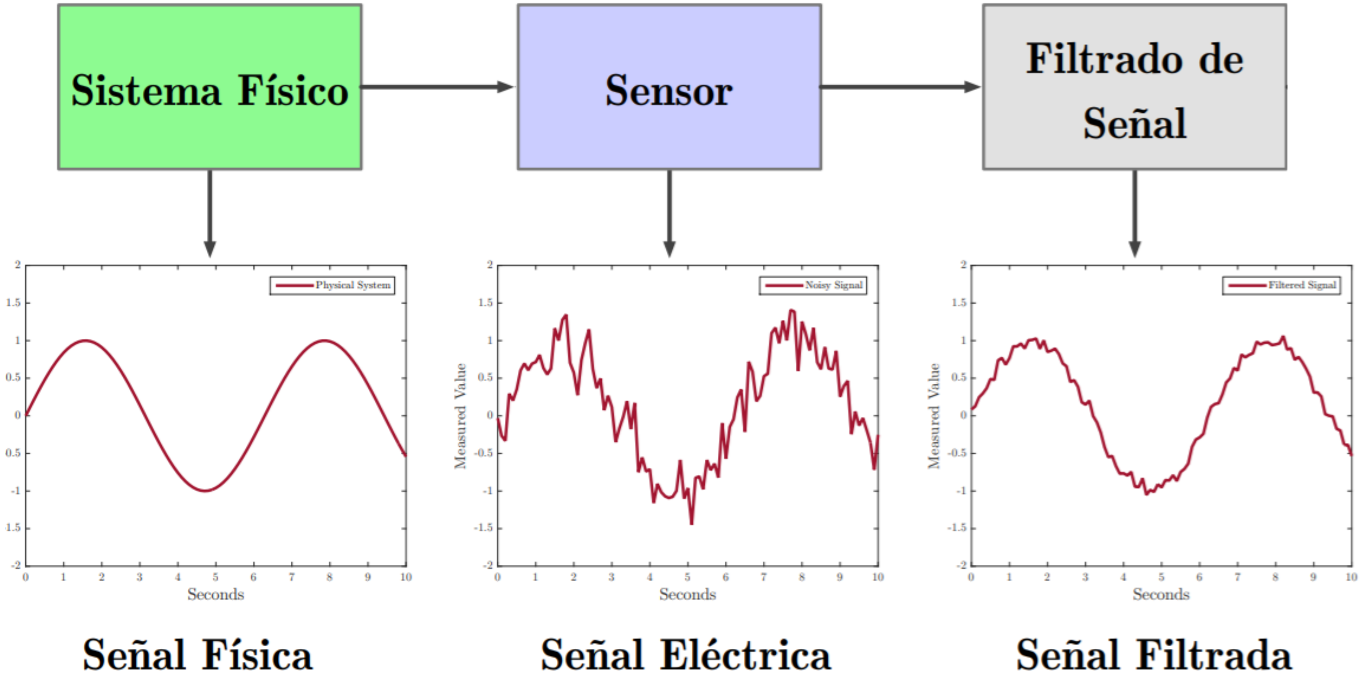
Adquisición digital de datos



Señal Física

https://es.wikipedia.org/wiki/Adquisici%C3%B3n_de_datos

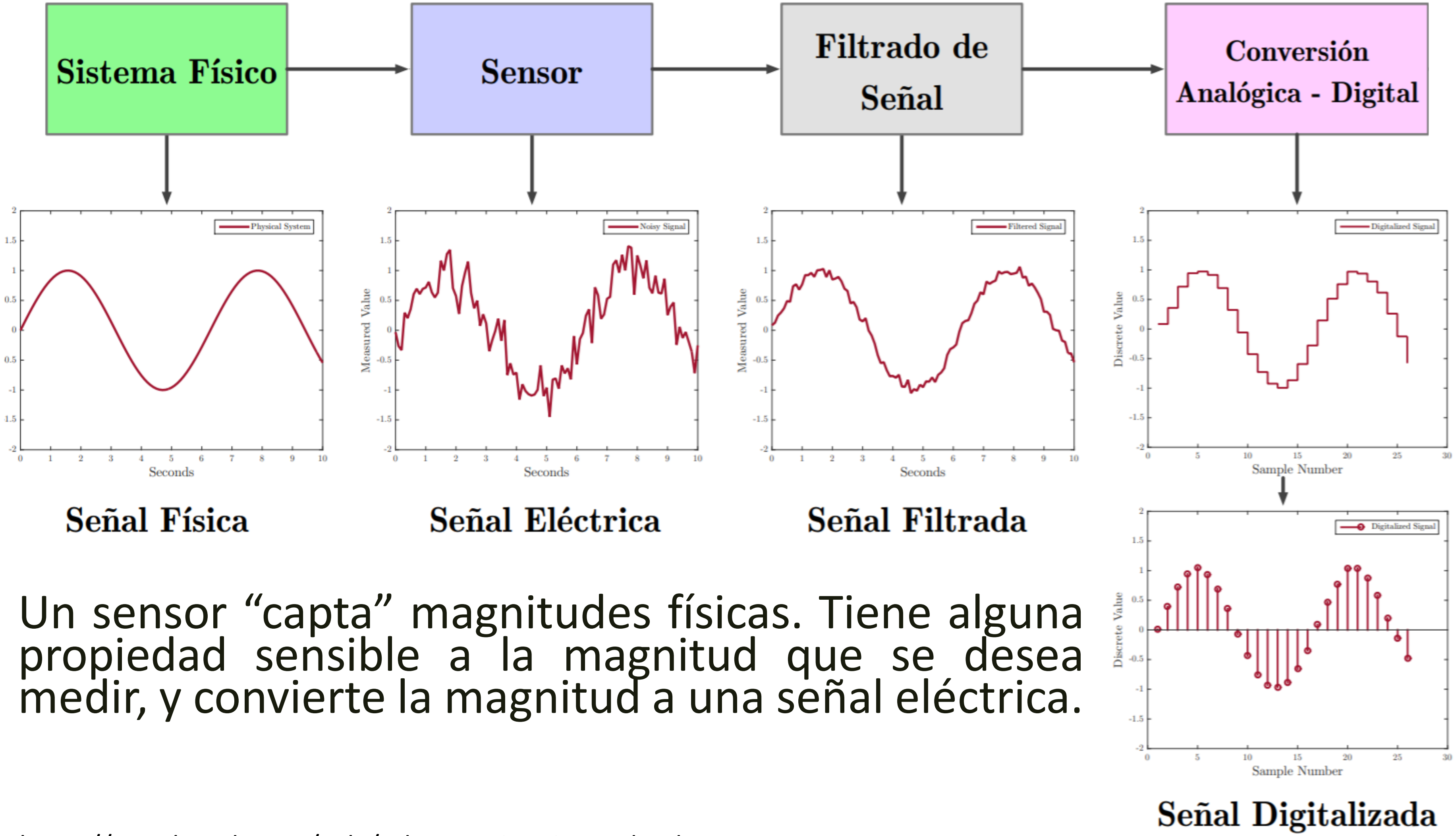
Adquisición digital de datos



Un sensor “capta” magnitudes físicas. Tiene alguna propiedad sensible a la magnitud que se desea medir, y convierte la magnitud a una señal eléctrica.

https://es.wikipedia.org/wiki/Adquisici%C3%B3n_de_datos

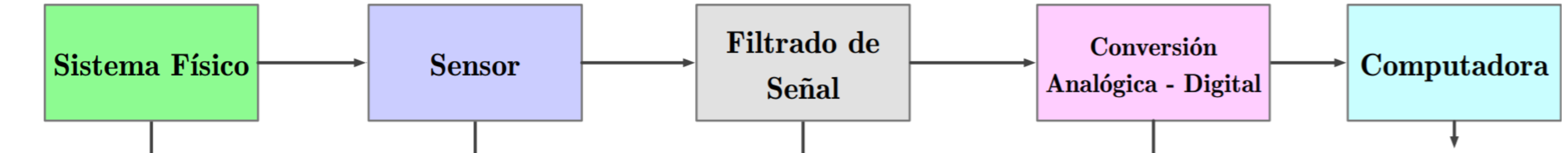
Adquisición digital de datos

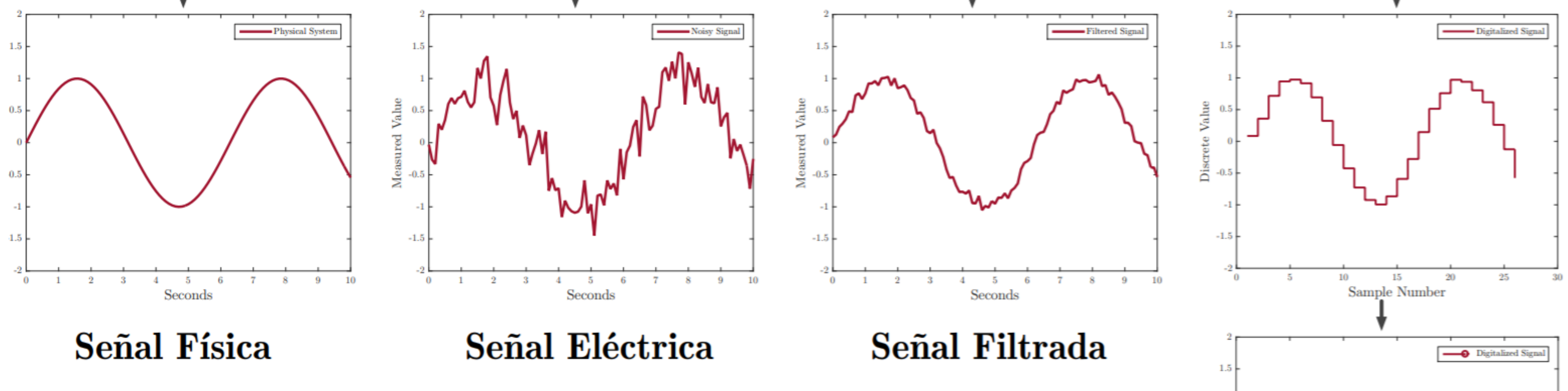


Un sensor "capta" magnitudes físicas. Tiene alguna propiedad sensible a la magnitud que se desea medir, y convierte la magnitud a una señal eléctrica.

https://es.wikipedia.org/wiki/Adquisici%C3%B3n_de_datos

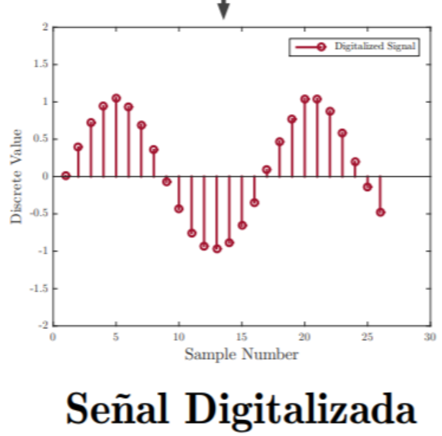
Adquisición digital de datos





Código de 8 Bits

0	1	1	1
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0
1	1	1	1
0	1	1	1
1	1	1	0
1	1	1	1
0	0	1	1
1	1	0	0
0	1	1	1
0	1	1	1
0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	0
0	0	0	1
1	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	0
0	0	1	1
1	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1
1	1	1	0



Un sensor “capta” magnitudes físicas. Tiene alguna propiedad sensible a la magnitud que se desea medir, y convierte la magnitud a una señal eléctrica.

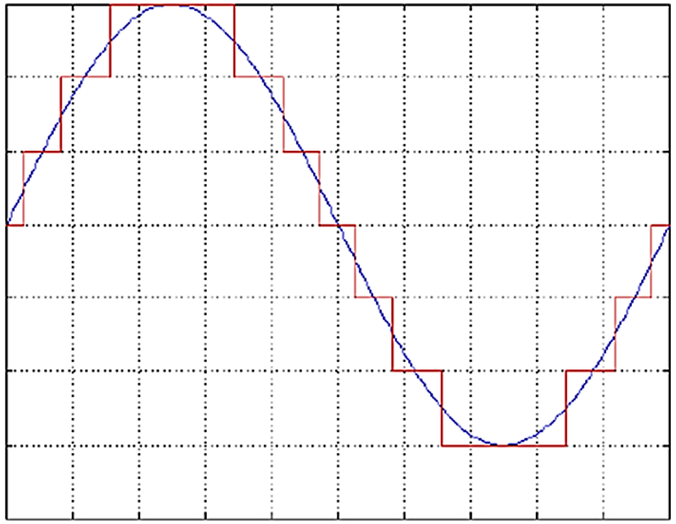
https://es.wikipedia.org/wiki/Adquisici%C3%B3n_de_datos

Conversor analógico-digital

- Tanto la calidad del sensor como del proceso de digitalización determinan la calidad de la señal adquirida.

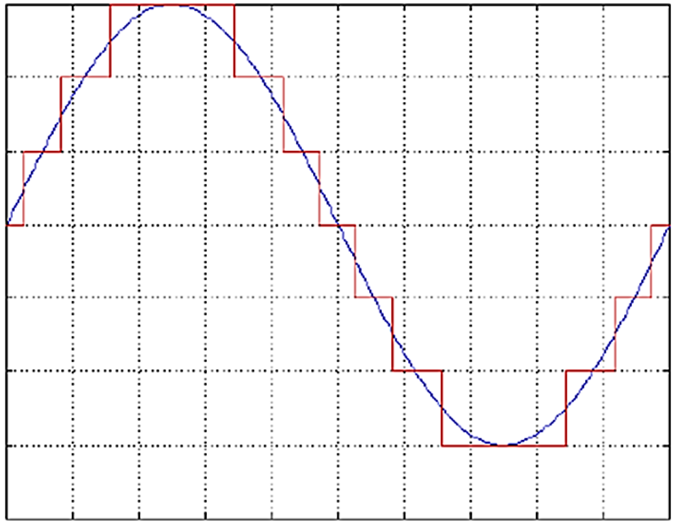
Conversor analógico-digital

- Tanto la calidad del sensor como del proceso de digitalización determinan la calidad de la señal adquirida.
- Digitalizar es discretizar una señal continua.



Conversor analógico-digital

- Tanto la calidad del sensor como del proceso de digitalización determinan la calidad de la señal adquirida.
- Digitalizar es discretizar una señal continua.



- La cantidad de bits de un conversor analógico-digital determina la resolución en voltaje, mientras que la frecuencia de muestreo determina la resolución temporal.
- A mayor # de bits y mayor frecuencia de muestreo, mayor el costo.

Conversor analógico-digital

- Resolución: Cada dato medido se representa utilizando una “x” cantidad de números binarios (bits).

Conversor analógico-digital

- Resolución: Cada dato medido se representa utilizando una “x” cantidad de números binarios (bits).

2 bits → 00, 10, 01, 11

3 bits → 000, 010, 001, 011, 100, 110, 101, 111

x bits → 2^x números

$$\text{Resolución} = \frac{\text{Rango}}{2^x}$$

Conversor analógico-digital

- Así como la cantidad de bits determina los niveles en los que se discretiza la señal, la frecuencia de muestreo determina cada cuánto se toma una muestra.

Conversor analógico-digital

- Así como la cantidad de bits determina los niveles en los que se discretiza la señal, la frecuencia de muestreo determina cada cuánto se toma una muestra.

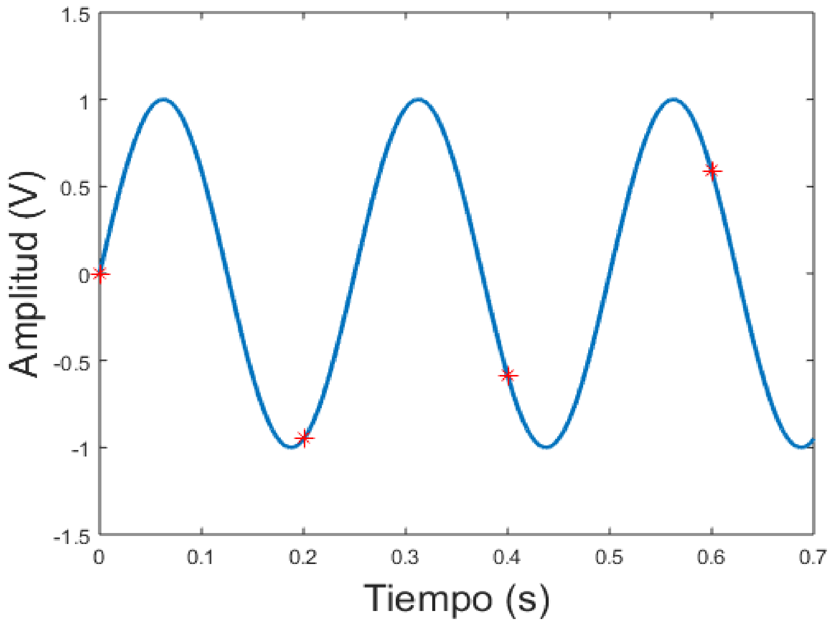
- Frecuencia de muestreo $= \frac{\#\, de\ muestras}{segundo}$

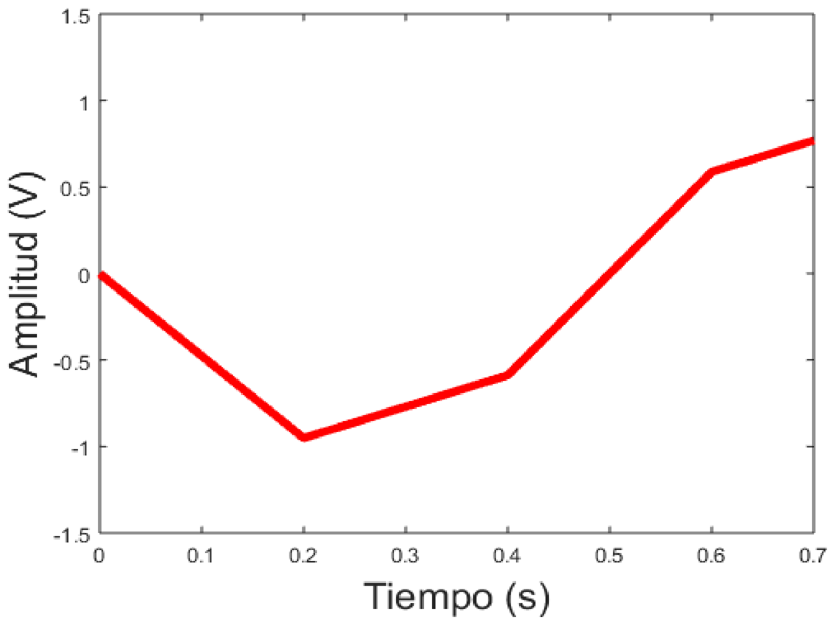
Conversor analógico-digital

- Así como la cantidad de bits determina los niveles en los que se discretiza la señal, la frecuencia de muestreo determina cada cuánto se toma una muestra.

- Frecuencia de muestreo $= \frac{\#\, de\ muestras}{segundo}$

- ¿Qué sucede si se hace un “mal muestreo”?





Conversor analógico-digital

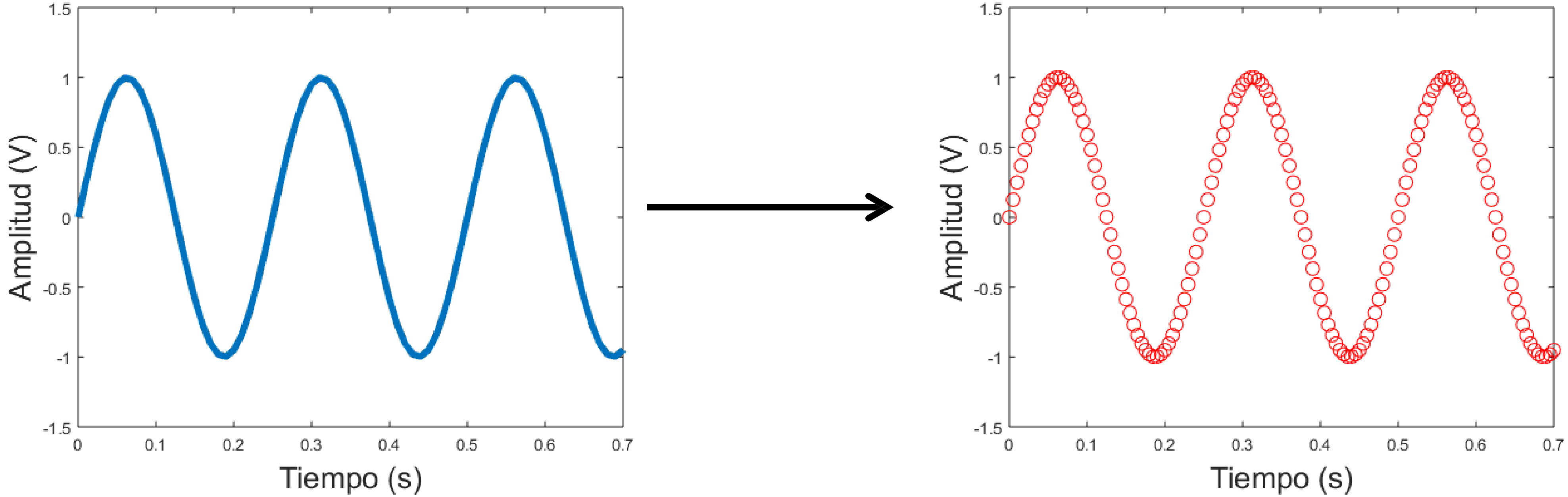
- La frecuencia de muestreo determina qué frecuencias de la señal original pueden ser recuperadas.

Conversor analógico-digital

- La frecuencia de muestreo determina qué frecuencias de la señal original pueden ser recuperadas.
- Para ver que existe una oscilación, es necesario una frecuencia de muestreo de al menos el doble de la que se quiere detectar.

Conversor analógico-digital

- La frecuencia de muestreo determina qué frecuencias de la señal original pueden ser recuperadas.
- Para ver que existe una oscilación, es necesario una frecuencia de muestreo de al menos el doble de la que se quiere detectar.
- Para definir una oscilación, se usa una frecuencia de muestreo de al menos diez veces la frecuencia que se quiere detectar.



Conversor analógico-digital

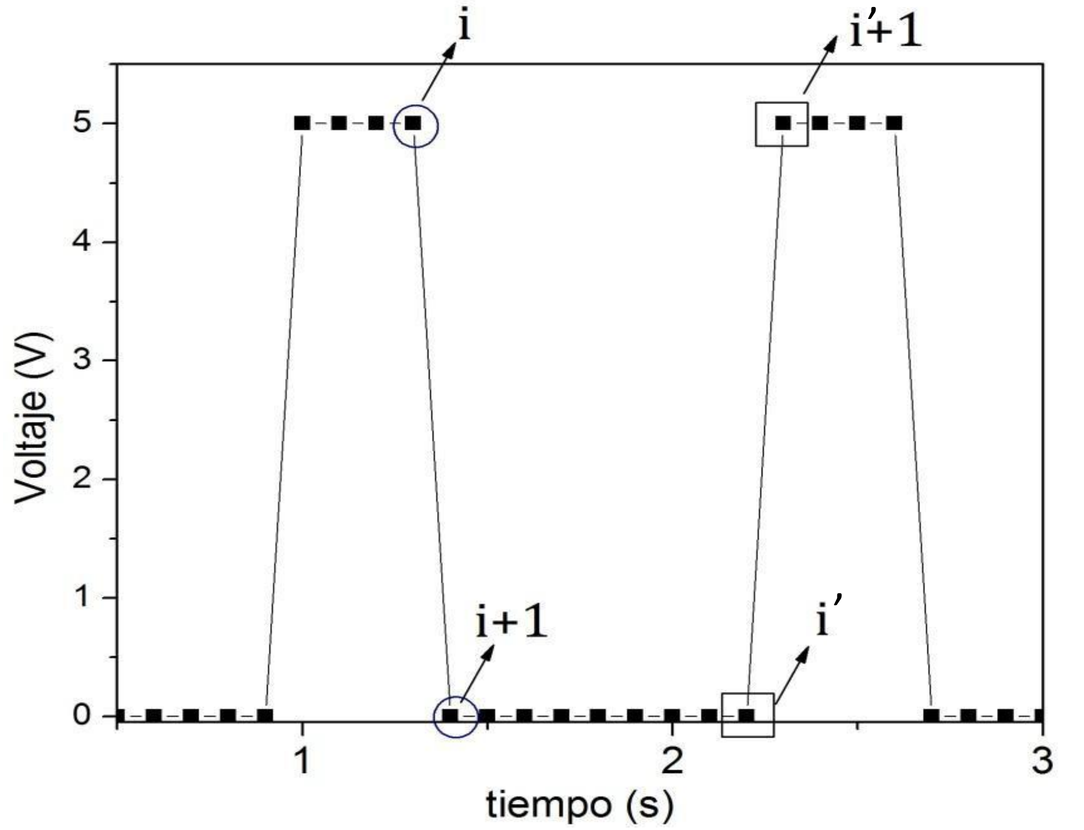
- Resolución (tensión): 13 bits
- Frecuencia de muestreo máxima: 48000 Hz
- 3 canales analógicos, 1 digital

Foto-interruptor

- Permite obtener señales muy precisas para determinar tiempo entre eventos.
- Principio de funcionamiento: en uno de los brazos se emite un haz infrarrojo (IR), que llega a un detector rápido IR en el brazo opuesto.
- Cuando el detector está recibiendo el haz, la señal de salida es de ~0V, mientras que si algo obtura al haz, la salida es de +5V (o viceversa).
- La salida es analógica. Para ser digitalizada, debe pasar por el conversor analógico/digital.

Foto-interruptor

- Medición de ejemplo



En este caso, lo que interesa son los tiempos en los que ocurre el evento, y no el valor de voltaje de salida.

Informes

<u>Informe</u>

- Título
- Objetivos
- Estructura

No tienen que ser los mismos que los de la guía, ni debe hacerse referencia a la guía en el informe.

Informes

Informe

- Título
- Objetivos
- Estructura

No tienen que ser los mismos que los de la guía, ni debe hacerse referencia a la guía en el informe.

Unidades: Deben estar presentes siempre

Ecuaciones

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{dg}{dl}\right)^2 . \Delta L^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 . \Delta t^2}$$

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{1}{\frac{T}{\sqrt{2\pi}}}\right)^2 . 0{,}003^2 + \left(\frac{-L\sqrt{2\pi}}{T}\right)^2 . 0{,}03^2}$$

Informes

Informe

- Título
- Objetivos
- Estructura

No tienen que ser los mismos que los de la guía, ni debe hacerse referencia a la guía en el informe.

Unidades: Deben estar presentes siempre

Ecuaciones

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{dg}{dl}\right)^2 . \Delta L^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 . \Delta t^2}$$

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{1}{\frac{T}{\sqrt{2\pi}}}\right)^2 . 0{,}003^2 + \left(\frac{-L\sqrt{2\pi}}{T}\right)^2 . 0{,}03^2}$$

Tablas

	N	Media	Error de la media
Exp. 1	20	2,03	0,01
Exp. 2	100	2,0432	0,0057
Exp. 3	100	1,653	0,007
Exp. 4	33	6	0,02

Informes

Informe

- Título
- Objetivos
- Estructura

No tienen que ser los mismos que los de la guía, ni debe hacerse referencia a la guía en el informe.

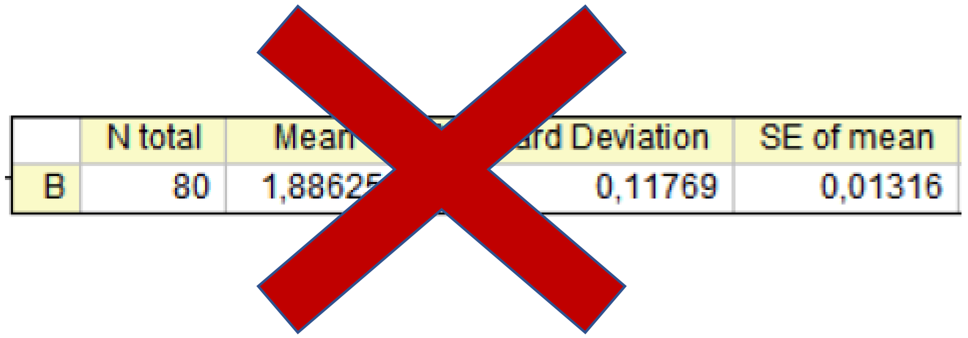
Unidades: Deben estar presentes siempre

Ecuaciones

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{dg}{dl}\right)^2 . \Delta L^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 . \Delta t^2}$$

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{1}{\frac{T}{\sqrt{2\pi}}}\right)^2 . 0{,}003^2 + \left(\frac{-L\sqrt{2\pi}}{T}\right)^2 . 0{,}03^2}$$

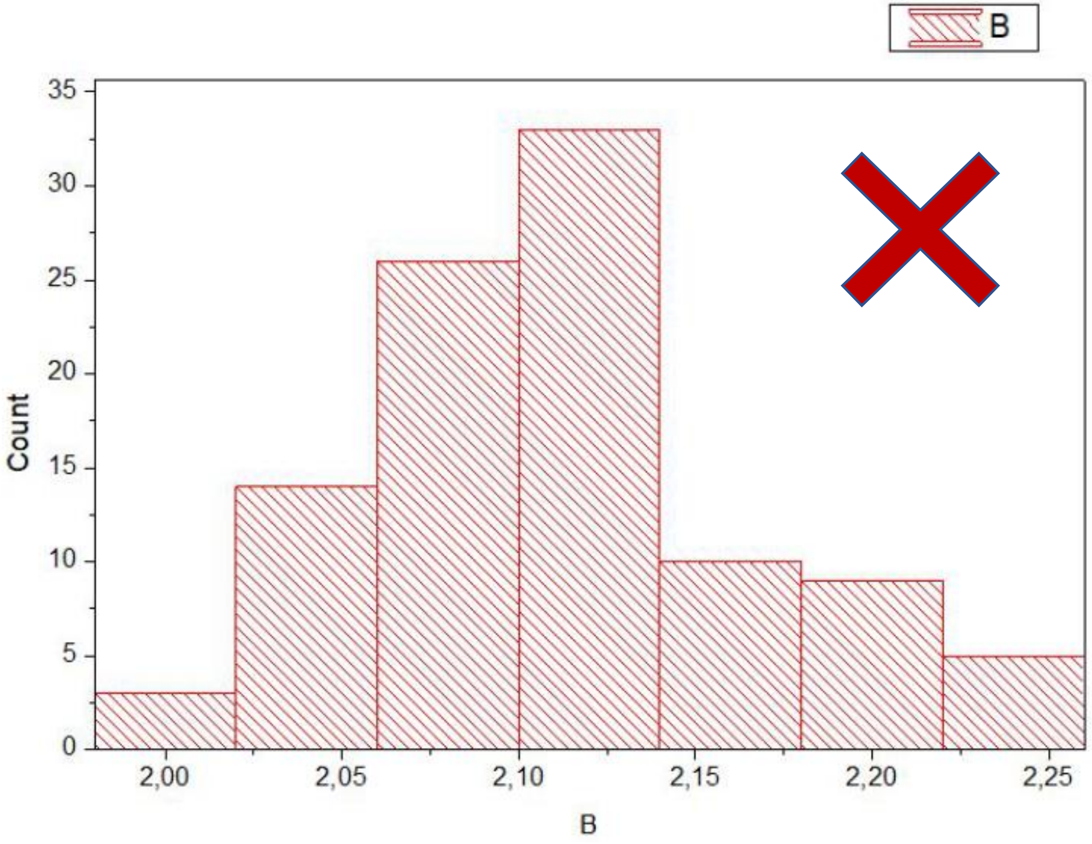
Tablas



	N total	Mean...	...rd Deviation	SE of mean
B	80	1,88625...	0,11769	0,01316

Informes

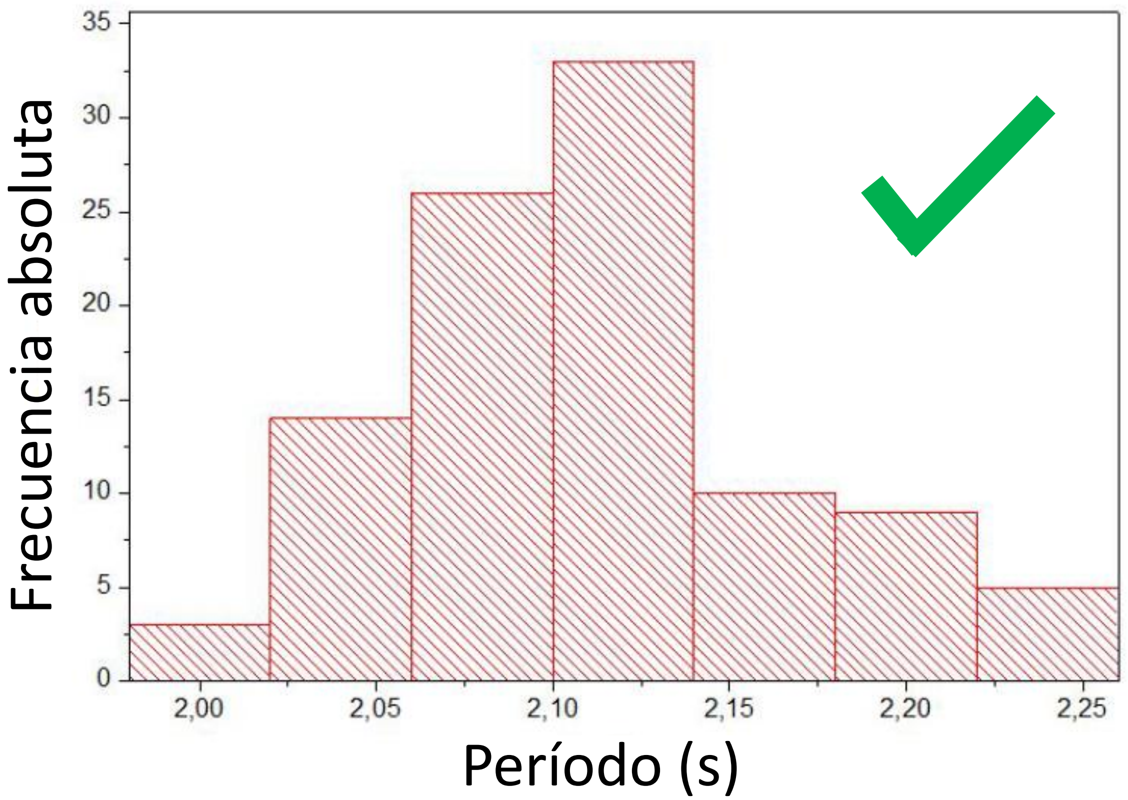
Figuras



Ejes correctos y en español. Verificar que el tamaño de letra sea adecuado. No poner información demás.

Informes

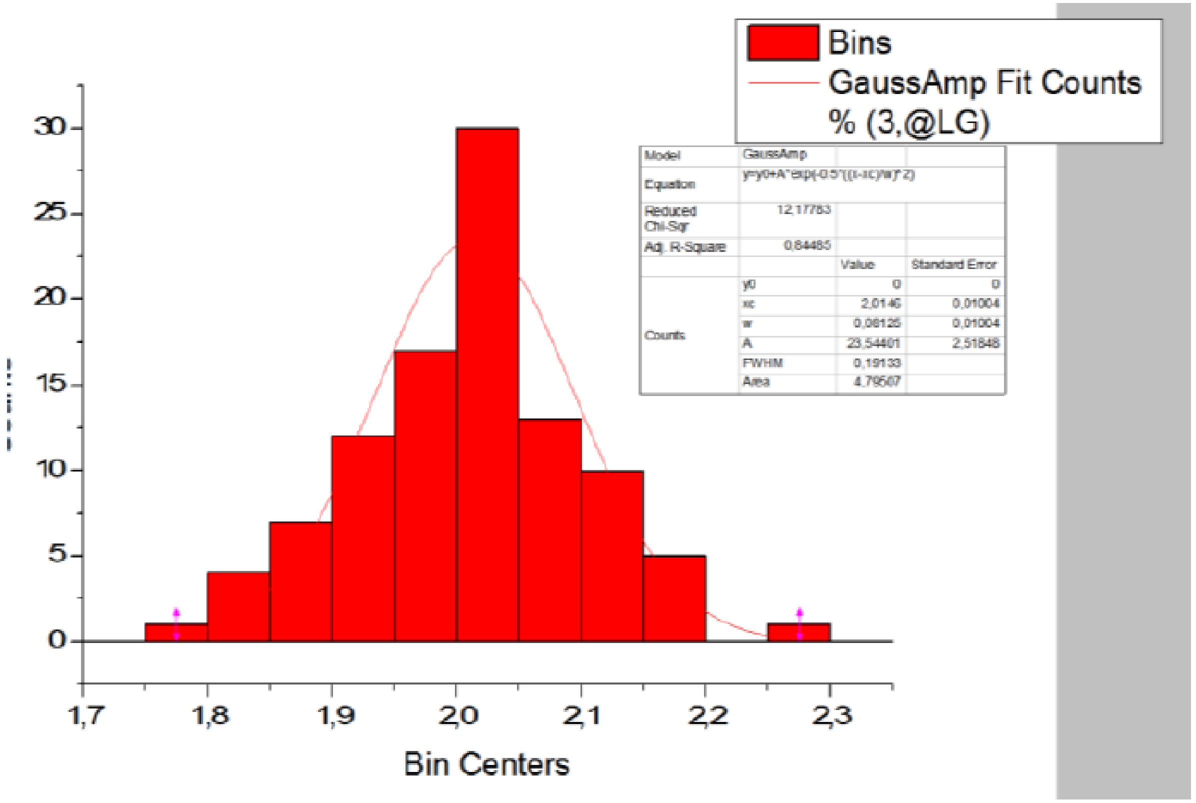
Figuras



Ejes correctos y en español. Verificar que el tamaño de letra sea adecuado. No poner información demás.

Informes

Figuras



Ejes correctos y en español. Verificar que el tamaño de letra sea adecuado. No poner información demás.

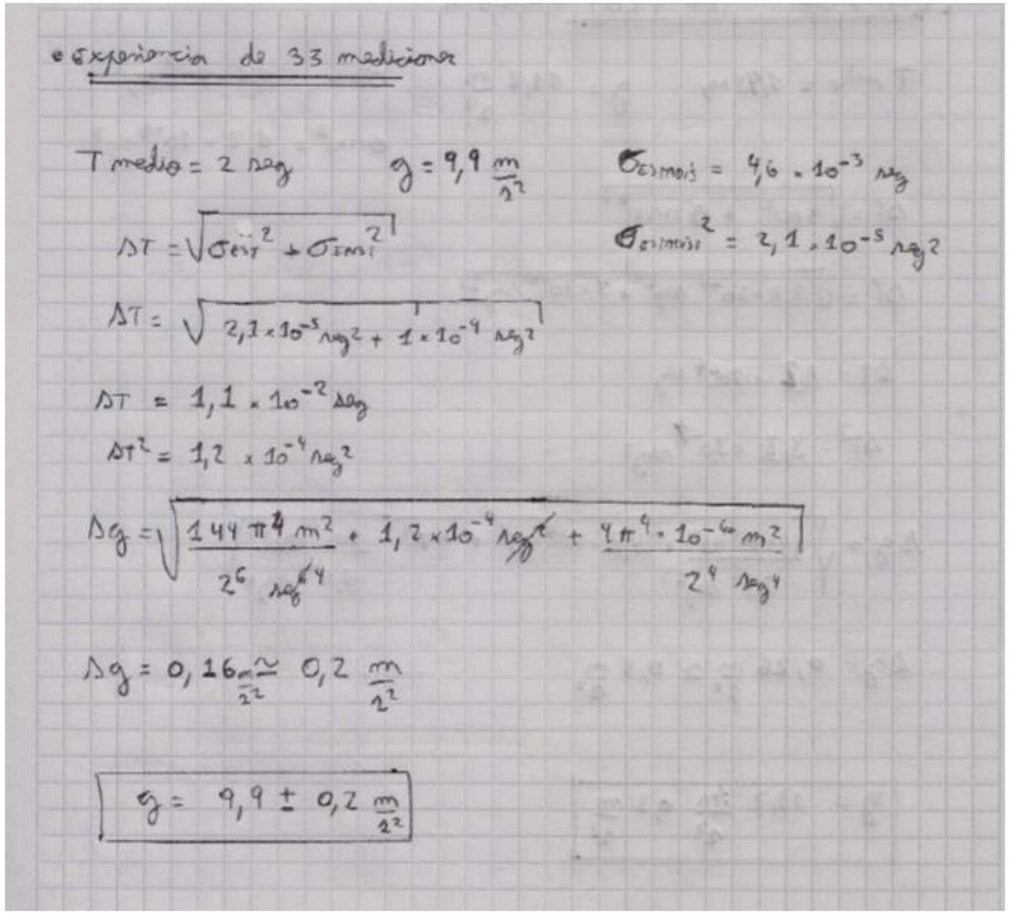
Informes

Figuras

Ejes correctos y en español. Verificar que el tamaño de letra sea adecuado. No poner información demás.

Informes

Cálculos



• experiencia de 33 mediciones

T medio $= 2$ seg $g = 9{,}9\ \frac{m}{s^2}$ $\sigma_{estad} = 4{,}6 \cdot 10^{-3}$ seg

$\Delta T = \sqrt{\sigma_{est}^2 + \sigma_{inst}^2}$ $\sigma_{estad}^2 = 2{,}1 \cdot 10^{-5}\ seg^2$

$\Delta T = \sqrt{2{,}1 \times 10^{-5}\ seg^2 + 1 \times 10^{-4}\ seg^2}$

$\Delta T = 1{,}1 \times 10^{-2}$ seg

$\Delta T^2 = 1{,}2 \times 10^{-4}\ seg^2$

$$\Delta g = \sqrt{\frac{144\,\pi^4\, m^2}{2^6\ seg^4} \cdot 1{,}2 \times 10^{-4}\ \cancel{seg^2} + \frac{4\pi^4 \cdot 10^{-6}\, m^2}{2^4\ seg^4}}$$

$\Delta g = 0{,}16\ \frac{m}{s^2} \simeq 0{,}2\ \frac{m}{s^2}$

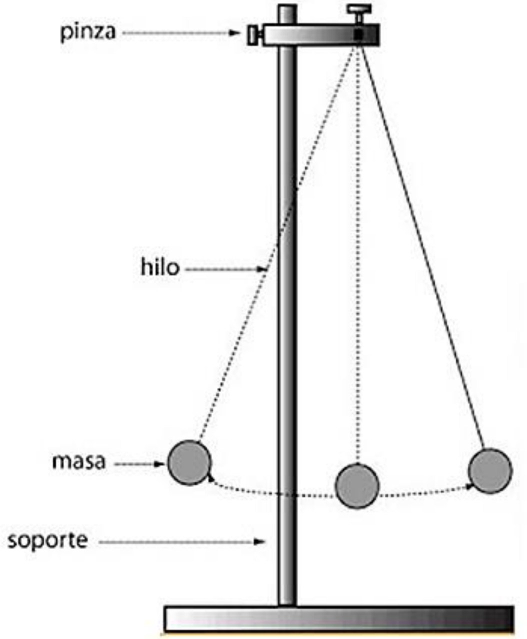
$\boxed{g = 9{,}9 \pm 0{,}2\ \frac{m}{s^2}}$

Si es posible, no incluir hojas escaneadas. Todos los cálculos y ecuaciones pueden también estar dentro del informe.

Informes

Metodología experimental

Es muy recomendable incluir un esquema. Si se incluye una fotografía, igual es útil además contar con el esquema.



Es preferible que el esquema sea de elaboración propia. Si no lo es, debe ponerse la referencia indicando de dónde se lo sacó.

Informes

A tener en cuenta

Las ecuaciones deben ser preferemente elaboradas en el procesador de textos y no pegadas como imagen en baja resolución. Lo mismo respecto a los esquemas que se incluyan.

Informes

A tener en cuenta

Las ecuaciones deben ser preferemente elaboradas en el procesador de textos y no pegadas como imagen en baja resolución. Lo mismo respecto a los esquemas que se incluyan.

Bibliografía

Las referencias deben estar citadas directamente en el texto, y no simplemente aparecer al final.

Ejemplo:

Un fotón generado por fluorescencia paramétrica puede emitirse en un amplio rango de longitudes de onda, siempre y cuando se cumplan las condiciones de conservación de la energía y el momento para el par de fotones, comúnmente referidas como condiciones de phase-matching [1]:

$$\hbar\omega_i + \hbar\omega_s = \hbar\omega_p \qquad (1)$$