Problema 1

a) Movimiento en el plano de la mesa (visto desde "arriba")

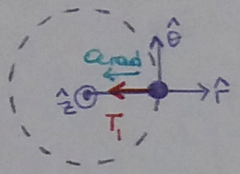
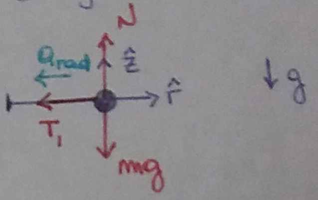


Diagrama de cuerpo libre para la masa



Ecuaciones de Newton para la masa

$\hat{r}$) $-T_1 = -m\,a_{rad}$ (1) a_{rad}: aceleración radial

$\hat{z}$) $-mg + N = 0$ (no hay movimiento en $\hat{z}$)

b) Me piden calcular la fuerza que la soga ejerce sobre el eje →

T_1 es la fuerza que la soga ejerce sobre la masa. Sobre el eje la soga ejerce una fuerza radial T_2. Si la soga tiene masa despreciable ($m_{soga} \approx 0$) ⇒

$T_2 - T_1 = 0 \Rightarrow T_2 = T_1$

∴ La fuerza que la soga ejerce sobre el eje es igual (en módulo) a $\vec{T}_1$.

la masa gira en torno a un eje a 30 revoluciones por minuto ⇒

60 s → 30 vueltas

1 s → 0,5 vueltas ⇒ $f = 0{,}5\ Hz$

$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = \pi\ 1/s$

Como la masa realiza un movimiento circular uniforme ⇒ $a_{rad} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$

$R = 0{,}5\ m$ (largo de la soga)

De (1) tenemos que $T_1 = m\,a_{rad}$

$T_1 = m\,\omega^2 R$

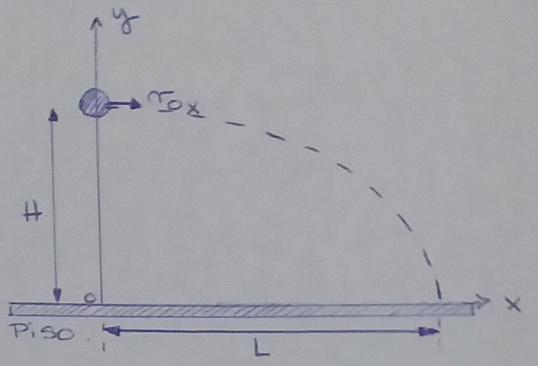
Con los datos del problema: $T_1 = 0{,}4\,kg \cdot \pi^2 \frac{1}{s^2} \cdot 0{,}5\,m = 1{,}97\,N \Rightarrow T_1 = 1{,}97\,N$

∴ $\boxed{T_2 = 1{,}97\ N}$ ó $\vec{T}_2 = 1{,}97\,\hat{r}$

Fuerza que la soga ejerce sobre el eje.

c) Cuando la masa se suelta de la soga, desaparece la fuerza centrípeta que actuaba sobre la masa. Ahora la masa se moverá tangente a la circunferencia siguiendo una trayectoria oblicua hasta alcanzar el piso.

$g = 10\ m/s^2$



Ecuaciones de movimiento

$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0)$

$y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x(t) = \omega R t \\ y(t) = H - \frac{1}{2} g t^2 \end{array}}$

De acuerdo a mi sistema de referencia: $x_0 = 0$ $y_0 = H$ Además dijo $t_0 = 0$

v_{0x} corresponde a la velocidad tangencial que tenía la masa justo antes de soltarse de la soga $\Rightarrow$ $v_{0x} = \omega R$. Además la aceleración $a = -g$

La masa no tiene velocidad inicial en $\hat{y}$ $\therefore$ $v_{0y} = 0$.

Queremos determinar la distancia L $\Rightarrow$ tenemos que calcular el tiempo t_p que la masa tarda en llegar al piso $\Rightarrow$ $y(t_p) = 0$

$\Rightarrow H - \frac{1}{2} g t_p^2 = 0 \Rightarrow t_p = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ $H = 0{,}8\ m$

$t_p = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}8\ \cancel{m}}{10\ \cancel{m}/s^2}} = 0{,}4\ s$

$\Rightarrow \boxed{x(t_p) = \omega R \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}} = L$ expresión para la distancia L.

Con los datos del problema $\rightarrow$ $L = \pi \frac{1}{5} \cdot 0{,}5\ m \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}8\ \cancel{m}}{10\ \cancel{m}/s^2}} = \pi \frac{1}{\cancel{s}} \cdot 0{,}5\ m \cdot 0{,}4\ \cancel{s}$

$= 0{,}63\ m$

$\boxed{L = 0{,}63\ m}$ $\rightarrow$ distancia que viajó la masa desde que se suelta de la soga y llega al piso.

PROBLEMA 2

Datos

$m_1 = 3\ kg$

$L = 1{,}20\ m$

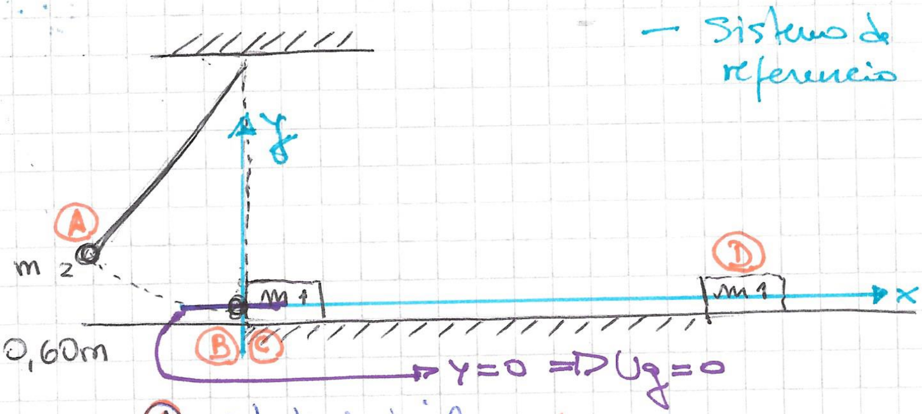
$\theta = 23°$

$m_2 = 1\ kg$

$\Delta x = 60\ cm = 0{,}60\ m$

$\mu = 0{,}34$

Se pierde K
el choque es inelástico



(A) estado inicial

(B) justo antes del choque

(C) justo después del choque

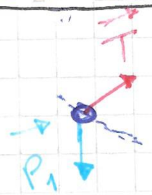
(D) hasta donde llega m2

Choque inelástico

a) ¿Con qué velocidad llega m_1 a la posición más baja?

Analizo entre (A) y (B) para m_1:

DCL. sobre m_1:



- Como T es perpendicular a la trayectoria el trabajo de T entre A y B $\rightarrow W_{T_{AB}} = 0$
- El peso P_1 realiza un trabajo $W_{P_{1AB}} \neq 0$

Como P_1 es una fuerza conservativa, la energía mecánica entre A y B se conserva. Además tomo como nivel cero de energía potencial en la posición más baja $(y=0)$

Planteo:

$$E_{M_A} = E_{M_B}$$

$$K_A + U_{g_A} = K_A + U_{g_B}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} m_1 v_{1A}^2 + m_1 g y_{1A} = \frac{1}{2} m_1 v_{1B}^2 + m_1 g y_{1B}} \quad (1)$$

E_M = energía mecánica
K = energía cinética
U_g = energía potencial gravitatoria

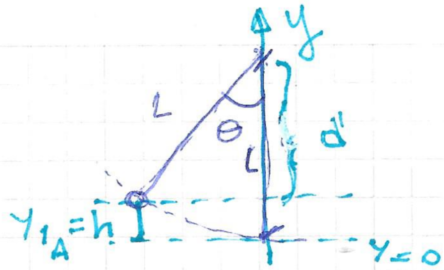
$v_{1A} = 0$ porque la masa m_1 se suelta en A

$v_{1B} = ?$ es lo que quiero determinar

$y_{1B} = 0$ de acuerdo al sistema de referencia

y_{1A} → se puede determinar de la siguiente manera

por trigonometría se cumple



$$L = h + d \qquad \text{con } d = L\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad h = L - d = L - L\cos\theta = L.(1-\cos\theta)$$

$$y_1 = h = L.(1-\cos\theta)$$

Entonces reemplazo en 1

$$\frac{1}{2} m_1 \cancelto{0}{v_{1A}^2} + m_1 g y_{1A} = \frac{1}{2} m_1 v_{1B}^2 + m_1 g \cancelto{0}{y_{1B}}$$

$$m_1 g L(1-\cos\theta) = \frac{1}{2} m_1 v_{1B}^2$$

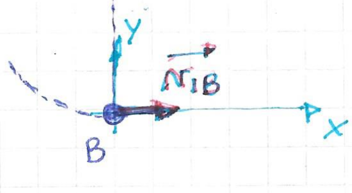
divido todo por m1 y despejo v_{1B}:

$$v_{1B} = \sqrt{2 g L (1-\cos\theta)}$$

$$v_{1B} = \sqrt{2 \times 10 \frac{m}{s^2} \times 1{,}20\, m \,(1-\cos 23°)}$$

$$v_{1B} = 1{,}38 \text{ m/s} \qquad \text{en módulo}$$

Esta velocidad es tangente a la trayectoria que describe m_1, por lo que en la posición más baja v_{1B} es horizontal y según el sistema de referencia considerado resulta:

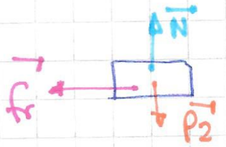


$$\boxed{\vec{v}_{1B} = 1{,}38 \text{ m/s } \hat{x}}$$

b) ¿Cual es el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento sobre la masa m_2?

Analizo entre Ⓒ y Ⓓ para m_2:

D.C.L. para m_2



Como entre Ⓒ y Ⓓ m_2 se mueve la fuerza de roce es dinámico:

$$fr = \mu N$$

Por la segunda ley de Newton en la dirección y, para el mismo sistema de referencia utilizado en a)

$$\sum_{m_2} F_y = N - m_2 g = 0 \Rightarrow N = m_2 g$$

Reemplazando en la expresión para fr se tiene:

$$fr = \mu m_2 g$$

Como esta fuerza es constante puedo calcular el trabajo como:

$$W_{fr} = \vec{fr} \cdot \vec{\Delta r}$$

$$W_{fr} = |\vec{fr}| |\vec{\Delta r}| \cos \beta$$

$\vec{\Delta r}$ = desplazamiento

β = ángulo entre ambos vectores

Como el desplazamiento $\vec{\Delta r}$ es opuesto a $\vec{fr}$ $\Rightarrow \beta = \pi$

El módulo $|\vec{\Delta r}| = \Delta X_{CD} = 0{,}60 m$

$$\Rightarrow W_{fr} = \mu m_2 g \Delta X_{CD} \cos \pi$$

$$W_{fr} = - \mu m_2 g \Delta X_{CD}$$

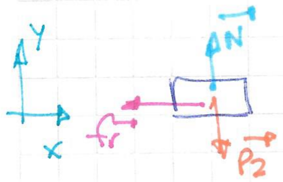
$$W_{fr} = - 0{,}34 \times 1 kg \times 10 \frac{m}{s^2} \times 0{,}60 m$$

$$\boxed{W_{fr} = -2{,}04 Nm = -2{,}04 J}$$

c) ¿Con qué velocidad empieza a moverse m_2?

Analizo nuevamente entre Ⓒ y Ⓓ para m_2.

D.C.L de m_2



Planteo teorema de trabajo y energía

$$W_{Neto_{CD}} = \Delta K_{CD}$$

$$\underbrace{W_{fr_{CD}} + W_{N_{CD}} + W_{P_{2_{CD}}} = K_D - K_C}$$ ②

Como $\vec{N}$ y $\vec{P_2}$ son perpendiculares a la trayectoria de m_2:

$$\Rightarrow W_N = 0 \quad y \quad W_{P_2} = 0$$

$\Rightarrow$ la ecuación ② queda:

$$W_{fr_{CD}} = \frac{1}{2} m_2 v_{2D}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2C}^2$$

Como en Ⓓ la masa m_2 se detiene $\Rightarrow v_{2D} = 0$

$$\Rightarrow \quad W_{fr_{CD}} = -\frac{1}{2} m_2 v_{2C}^2$$

Despejo v_C:

$$v_{2C} = \sqrt{-\frac{2 \times W_{fr}}{m_2}}$$

$W_f = -2{,}04\ J$ calculado en b)

$$v_{2C} = \sqrt{-\frac{2 \times (-2{,}04\ J)}{1\ kg}} = \sqrt{4{,}08\ \frac{\cancel{kg}\ m\ m}{s^2\ \cancel{kg}}}$$

$$v_{2C} = 2{,}02\ m/s$$

Esta velocidad está en la dirección positiva de las x

$$\boxed{\vec{v_{2C}} = 2{,}02\ m/s\ \hat{x}}$$

d) ¿ Cuál es la velocidad de m_1 después del choque?

Analizo entre Ⓑ y Ⓒ, durante el choque (es inelástico)

El sistema está formado por m_1 y m_2, en este sistema durante el choque se cumple:

$$\underbrace{\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}}$$

$$\vec{P}_B = \vec{P}_C$$ ← Se conserva la cantidad de movimiento

$$\vec{P}_{1B} + \vec{P}_{2B} = \vec{P}_{1C} + \vec{P}_{2C}$$

$$\underbrace{m_1 \vec{v}_{1B} + m_2 \vec{v}_{2B} = m_1 \vec{v}_{1C} + m_2 \vec{v}_{2C}} \quad (3)$$

$\vec{v}_{2B} = \vec{0}$ porque justo antes del choque m_2 está en reposo

$\vec{v}_{1B} = 1{,}38\,m/s\,\hat{x}$ (calculado en a))

$\vec{v}_{2C} = 2{,}02\,m/s\,\hat{x}$ (calculado en c))

La (3) queda:

$$m_1 \vec{v}_{1B} = m_1 \vec{v}_{1C} + m_2 \vec{v}_{2C}$$

Despejo $\vec{v}_{1C}$:

$$\vec{v}_{1C} = \frac{m_1 \vec{v}_{1B} - m_2 \vec{v}_{2C}}{m_1}$$

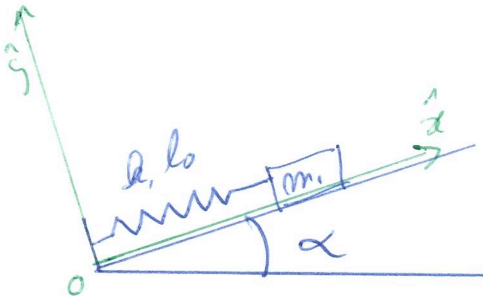
Reemplazo:

$$\vec{v}_{1C} = \frac{3\,kg \cdot 1{,}38\,m/s\,\hat{x} - 1\,kg\ 2{,}02\,m/s\,\hat{x}}{3\,kg}$$

$$\boxed{\vec{v}_{1C} = 0{,}71\,m/s\,\hat{x}}$$

Mecánica y Termodinámica 2019C1

Primer parcial, Problema 3



$\downarrow \vec{g}$

$k = 400\ N/m$

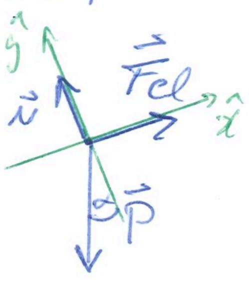
$l_0 = 20\,cm = 0{,}2\,m$

$\alpha = 30°$

$m_1 = 5\ Kg$

El origen del sistema de coordenadas está en la base del plano inclinado.

Diagrama de Cuerpo Libre



$\vec{P} = -m_1 g \operatorname{sen}\alpha\ \hat{x} - m_1 g \cos\alpha\ \hat{y}$

$\vec{N} = N\ \hat{y}$

$\vec{F}_{el} = -k(x - l_0)\ \hat{x}$ → Fuerza elástica restitutiva

$\vec{a} = a_x\ \hat{x}$ → El movimiento está restringido al eje x. $a_y = 0$

2^{da} Ley de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\hat{x})\quad \underbrace{-k(x - l_0)}_{Fel_x} \underbrace{- m_1 g \operatorname{sen}\alpha}_{P_x} = m_1 a_x$

$-k(x - l_0) - m_1 g \operatorname{sen}\alpha = m_1 \ddot{x}$

$\hat{y})\quad -m_1 g \cos\alpha + N =$

$N = m_1 g \cos\alpha$

En la posición de equilibrio X_{eq}, $\vec{a} = 0 \Rightarrow a_x = \ddot{x} = 0$

$-k(X_{eq} - l_0) - m_1 g \operatorname{sen}\alpha = 0$

$-k(X_{eq} - l_0) = m_1 g \operatorname{sen}\alpha$

$X_{eq} - l_0 = -\dfrac{m_1 g \operatorname{sen}\alpha}{k}$

$\underline{X_{eq}} = -\dfrac{m_1 g \operatorname{sen}\alpha}{k} + l_0 = -\dfrac{5\,Kg\ 10\,m/s^2\ \operatorname{sen}(30°)}{400\ N/m} + 0{,}2 = \underline{0{,}137}$

RTA: La posición de equil[ibrio] es $X_{eq} = 0{,}1375\ m$ con respecto al principio del plano inclinado.

Como vimos, la dinámica de la masa está dada por la siguiente ecuación diferencial

$$-k(x-l_0) - m_1 g \,\text{sen}\,\alpha = m_1 \ddot{x}$$

→ Intento llevar esta ecuación a la forma de $\ddot{x} = -\omega^2(x-x_0)$ ya que conozco la solución de esa ecuación diferencial.

$$-kx + kl_0 - m_1 g \,\text{sen}\,\alpha = m_1 \ddot{x}$$

$$-k\left(x - \frac{m_1 g \,\text{sen}\,\alpha}{k} + l_0\right) = m_1 \ddot{x}$$

$$-\underbrace{\frac{k}{m_1}}_{\omega^2}\left(x - \underbrace{\left(\frac{m_1 g \,\text{sen}\,\alpha}{k} - l_0\right)}_{x_0}\right) = \ddot{x}$$

→ Identifico ω^2 y x_0 en términos de los parámetros de mi sistema.

$$x_0 = \frac{m_1 g \,\text{sen}\,\alpha}{k} - l_0 = x_{eq}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m_1} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{\frac{400\ N/m}{5\ Kg}} = 8{,}94\ s^{-1}$$

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = 1{,}42\ Hz}$$

La frecuencia de oscilación es de 1,42 Hz.

b) La solución a la ecuación diferencial $\ddot{x} = -\omega^2(x-x_0)$ es $x(t) = x_0 + A\cos(\omega t + \phi)$

Tengo que definir los parámetros A y ϕ en base a las condiciones iniciales.

$$x(t=0) = x_0 + 10\ cm = x_{eq} + 0{,}1\,m = 0{,}1375\,m + 0{,}1\,m = 0{,}2375\ m$$

$$v(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0$$ ya que parte del reposo.

Derivando $x(t)$ obtenemos

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi)$$

Por lo tanto,

$$X(t=0) = A\cos(\omega \cdot 0 + \phi) + X_0 = 0{,}2378\,m$$

$$v(t=0) = -A\omega\,\mathrm{Sen}(\omega \cdot 0 + \phi) = 0$$

Busco solución con $A > 0 \Rightarrow \mathrm{Sen}(\phi) = 0 \Rightarrow$

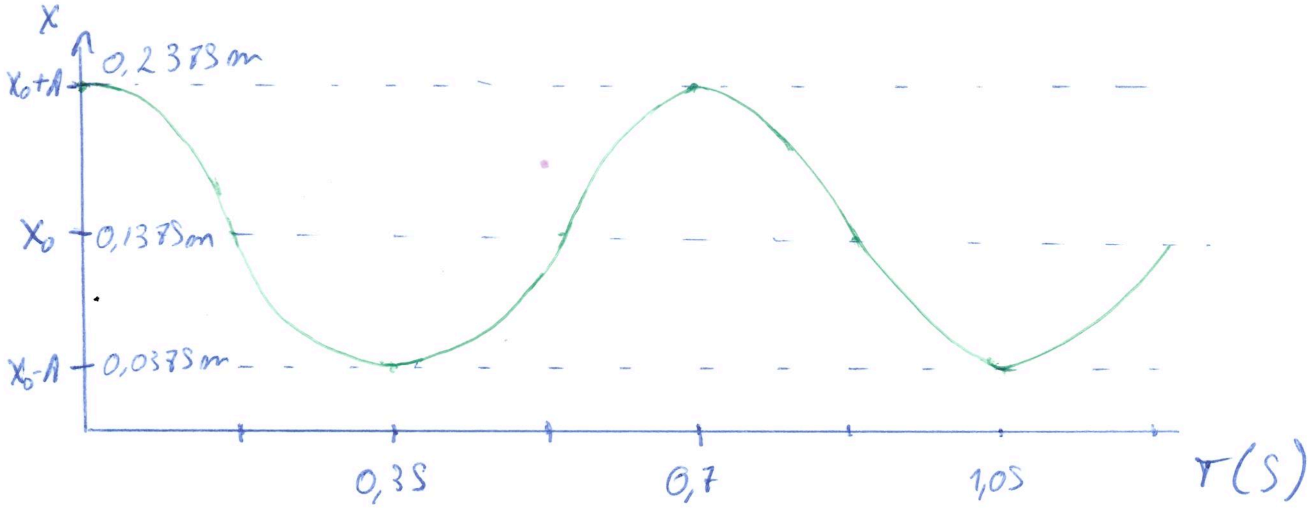
$\phi = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}_0$. Voy a usar $\boxed{\phi = 0}$

$$X(t=0) = A\underbrace{\cos(0)}_{1} + X_0 = 0{,}2378\,m \Rightarrow A = 0{,}2378\,m - 0{,}1378$$

$$\boxed{A = 0{,}1\,m}$$

$$X(t) = 0{,}1378\,m + 0{,}1\,m\cos\left(8{,}94\,\tfrac{1}{s}\,t\right)$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}7$$



c) Como el bloque 2 no resbala, ambos bloques se van a mover juntos, es decir que

$$\underbrace{X_1}_{\text{Posición del bloque 1}} = \underbrace{X_2}_{\text{Posición del bloque 2}} \Rightarrow \dot{X}_1 = \dot{X}_2 \Rightarrow \ddot{X}_1 = \ddot{X}_2$$

La posición del centro de masa del sistema compuesto por ambos bloques es, en el eje x

$$X_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \overset{x_1 = x_2}{=} \frac{(m_1 + m_2)\, x_1}{m_1 + m_2} = x_1 = x_2 \Rightarrow \ddot{X}_{cm} = \ddot{X}_1 = \ddot{X}_2$$

Las fuerzas de rozamiento entre el bloque 1 y 2 son fuerzas internas de mi sistema, por lo que no necesito considerarlas para calcular la dinámica del centro de masa.

$$\underbrace{\sum F_{ext,x}}_{\text{Suma de fuerzas externas en x}} = \underbrace{m_{TOT}}_{\text{masa total}} \underbrace{a_{cm,x}}_{\text{Aceleración del centro de masa en x}}$$

Las fuerzas externas son las planteadas en a: $\vec{F}el$, $\vec{N}$, $\vec{P}$

Por lo tanto puedo usar la solución obtenida en a), reemplazando la masa por la masa total de mi sistema.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_{TOT}}} = \sqrt{\frac{400\ N/m}{5Kg + 3Kg}} = 7{,}07\ \frac{1}{s}$$

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = 1{,}125\ Hz}$$

rta: La frecuencia de oscilación se redujo a $f = 1{,}125\ Hz$ al agregar el cuerpo 2