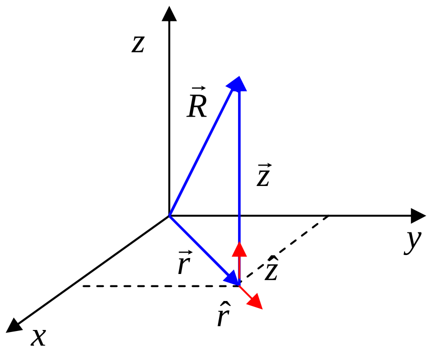
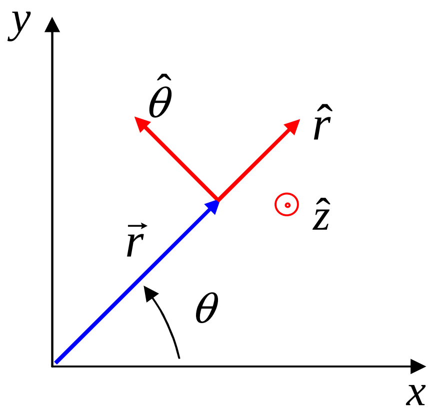
## *Posición, velocidad y aceleración en coordenadas polares*

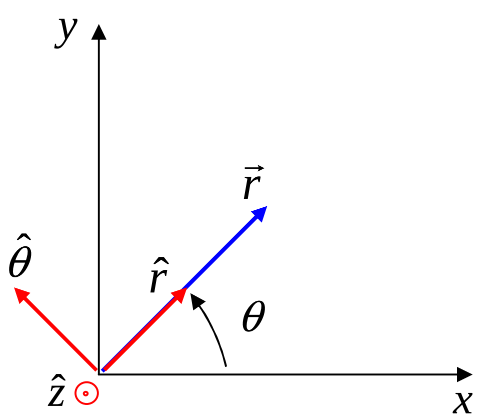
En movimientos curvilíneos en general es práctico el uso de *coordenadas polares*, más que el de coordenadas cartesianas. Este sistema de coordenadas es particularmente útil en el caso de movimientos en un plano. Se pueden definir de varias formas. Vamos a adoptar la siguiente (ver figuras):




- Definimos el versor $\hat{r}$ con la dirección de la proyección del vector posición $\vec{R}$ *en el plano*, $\vec{r}$, y sentido *saliente*. Notar que llamamos $\vec{r}$ a la proyección en el plano del vector posición $\vec{R}$. En caso de un movimiento plano, $\vec{r} \equiv \vec{R}$ (no hay componente en la dirección $z$)




- Definimos el versor $\hat{\theta}$ perpendicular a $\vec{r}$ y con el sentido definido por el ángulo $\theta$ creciente, donde $\theta$ es el ángulo entre el eje $x$ y el vector $\vec{r}$.
- La tercera dimensión queda definida por el versor $\hat{z}$ de tal manera que $(\hat{r},\hat{\theta},\hat{z})$ formen terna directa.




- Para encontrar la relación entre los versores polares y los versores cartesianos, corremos los versores polares al origen de las coordenadas cartesianas.

Proyectando:

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{r} &= \hat{x}\cos\theta + \hat{y}sen\theta \\ \hat{\theta} &= -\hat{x}sen\theta + \hat{y}\cos\theta \\ \hat{z} &= \hat{z}\end{aligned}}$$

*De acuerdo con esta elección*, el vector posición queda descrito en este sistema de coordenadas:

$\vec{R} = r\hat{r} + z\hat{z}$

Vamos a encontrar las expresiones de la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración $\vec{a}$ en este sistema de coordenadas, derivando la expresión de $\vec{R}$. Notar que $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$, a diferencia de los versores cartesianos, *no son versores fijos*, es decir, se mueven siguiendo el movimiento del vector posición. Por lo tanto, dependen del tiempo y deben derivarse.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d(r\hat{r} + z\hat{z})}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}} + \dot{z}\hat{z}$$

Tenemos que encontrar $\dot{\hat{r}}$. Para ello, derivemos las expresiones de los versores en cartesianas:

$$\dot{\hat{r}} = -\hat{x}\dot{\theta}sen\theta + \hat{y}\dot{\theta}\cos\theta = \dot{\theta}(-\hat{x}sen\theta + \hat{y}\cos\theta = \dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\hat{x}\dot{\theta}\cos\theta - \hat{y}\dot{\theta}sen\theta = -\dot{\theta}(\hat{x}\cos\theta + \hat{y}sen\theta) = -\dot{\theta}\hat{r}$$

Entonces:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z}}$$

La velocidad queda expresada como la suma de tres términos:

- $\dot{r}\hat{r}$ (velocidad radial), da cuenta del movimiento en la dirección radial ($\vec{r}$ puede variar en módulo).
- $r\dot{\theta}\hat{\theta}$ (velocidad en $\theta$), da cuenta de los cambios de dirección de $\vec{r}$
- $\dot{z}\hat{z}$ (velocidad en z), es idéntico a la componente de la velocidad en cartesianas. Este término es nulo si el movimiento es en un plano.

- Vamos a encontrar la aceleración, como siempre, derivando la expresión de la velocidad.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} + \ddot{z}\hat{z}$$

Teniendo en cuenta las expresiones de las derivadas de los versores:

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r} + \ddot{z}\hat{z}$$

Agrupando los términos:

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z}}$$

En el caso que el movimiento sea en un plano, no hay componente en la dirección $z$, y entonces resulta:

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{R} = r\hat{r} \\ &\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \\ &\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta} \end{aligned}}$$

-----------------⏭ ⚡ ⏮--------------------