Cuadrados Mínimos

Determinación indirecta de la velocidad de un móvil:

$$v = \frac{D}{T}$$

→ Se obtiene la velocidad media

→ Para obtener v, se asume MRU

Pero, es MRU??

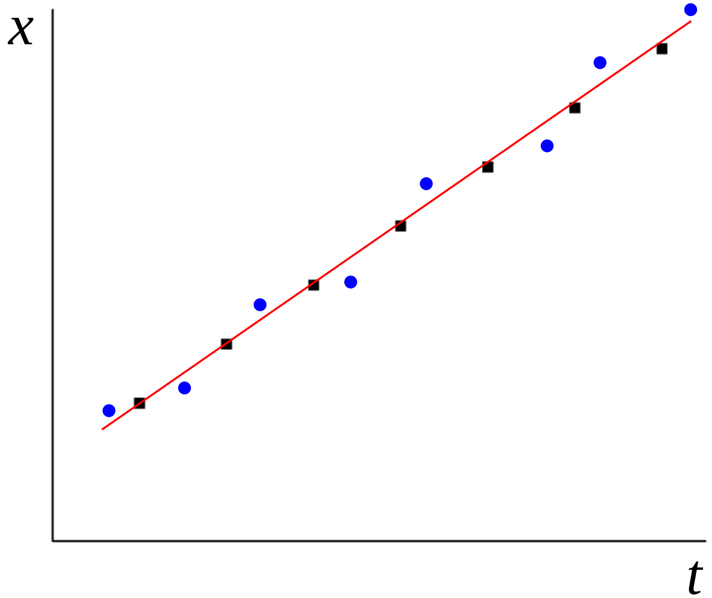
Si medimos la distancia (o la posición) para distintos instantes de tiempo, tenemos pares ordenados $(t; x)$

Se puede analizar la relación funcional: Si los puntos están alineados en una recta: → MRU

Los puntos obtenidos de forma experimental no están "matemáticamente" alineados

Se busca la recta que mejor se "ajusta" a los puntos medidos

$$x(t) = x_0 + vt$$



La pendiente de la recta es la velocidad

La ordenada es la posición a $t = 0$

Cuadrados Mínimos

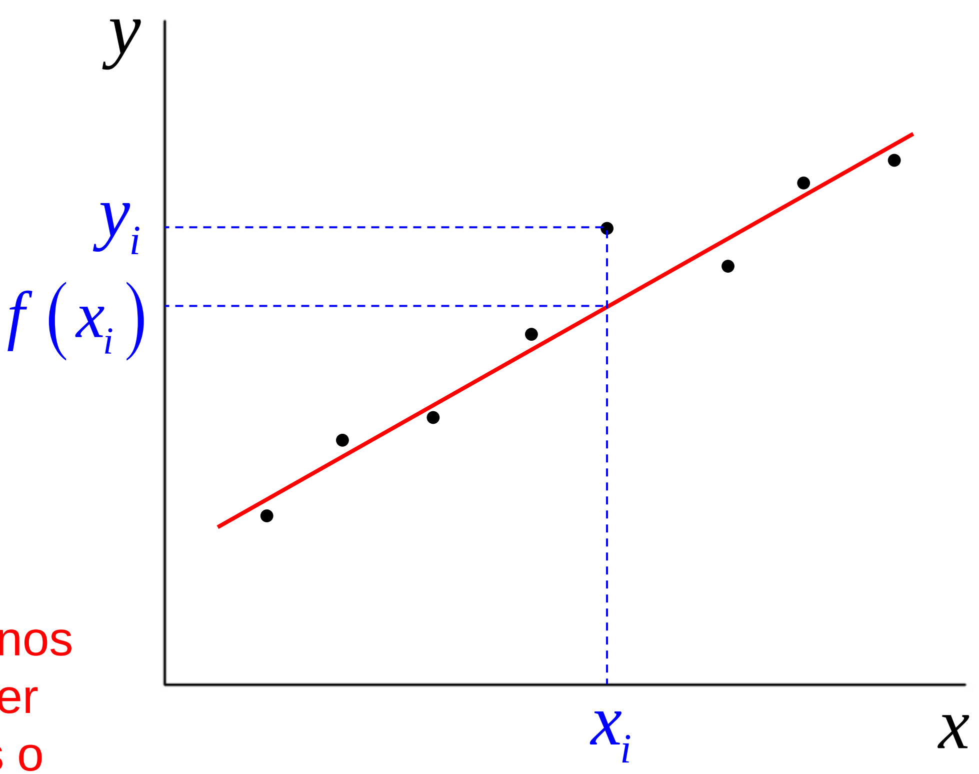
Medimos N pares $\left(x_i ; y_i\right)$

Modelo teórico: $y = f\left(x\right)$

Relación lineal: $y = a + bx$

Buscamos la ecuación de la recta (a y b) que mejor se ajusta a los datos

→ La que minimiza la “distancia” de los puntos a la recta



$$\sum_{i=1}^{N}\left(f\left(x_i\right)-y_i\right)$$

Los términos pueden ser negativos o positivos

$$\sum_{i=1}^{N}\left|f\left(x_i\right)-y_i\right|$$

Módulos mínimos

$$\sum_{i=1}^{N}\left(f\left(x_i\right)-y_i\right)^2$$

Cuadrados mínimos

Cuadrados Mínimos

Buscamos minimizar S:
$$S = \sum_{i=1}^{N} \left(f\left(x_i\right) - y_i \right)^2$$

Para una relación lineal:
$$S = \sum_{i=1}^{N} \left(a + b x_i - y_i \right)^2$$

Notemos que: $S = S\left(a, b\right)$

Para buscar el mínimo, pedimos:
$$\underbrace{\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = 0}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= 2\sum_{i=1}^{N} \left(a + b x_i - y_i \right) \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= 2\sum_{i=1}^{N} \left(a + b x_i - y_i \right) x_i \end{aligned}\right\}$$

$$aN + b\sum x_i - \sum y_i = 0$$
$$a\sum x_i + b\sum x_i^2 - \sum y_i x_i = 0$$

2 ecuaciones con
2 incógnitas!

Se pueden obtener a y b

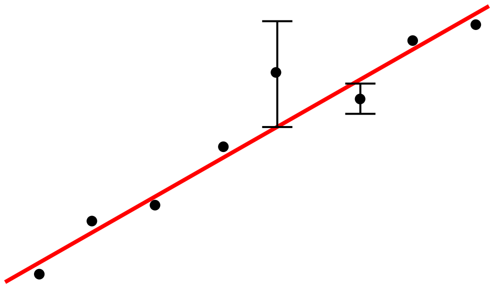
Los errores Δa y Δb se obtienen a partir de la dispersión de los puntos alrededor de la recta

Cuadrados Mínimos

Hay algo que no tuvimos en cuenta… → Los errores en las mediciones de x_i, y_i

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left(a + bx_i - y_i \right)^2 \longrightarrow S = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{a + bx_i - y_i}{\Delta y_i} \right)^2$$

Cuadrados mínimos ponderados



- Se asume que x_i no tiene error
- Cada término es "pesado" por el error Δy_i
- El sistema de ecuaciones para minimizar es similar:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{N} \frac{\left(a + bx_i - y_i \right)}{\left(\Delta y_i \right)^2} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{N} \frac{\left(a + bx_i - y_i \right)}{\left(\Delta y_i \right)^2} x_i = 0$$

$$a\sum \frac{1}{\left(\Delta y_i \right)^2} + b\sum \frac{x_i}{\left(\Delta y_i \right)^2} - \sum \frac{y_i}{\left(\Delta y_i \right)^2} = 0$$

$$a\sum \frac{x_i}{\left(\Delta y_i \right)^2} + b\sum \frac{x_i^2}{\left(\Delta y_i \right)^2} - \sum \frac{y_i x_i}{\left(\Delta y_i \right)^2} = 0$$

2 ecuaciones con 2 incógnitas!

Se pueden obtener a y b

Ahora, los errores Δa y Δb provienen de la dispersión de los puntos y de la propagación de errores

Cuadrados Mínimos

Cuando se puede asumir que las x_i no tienen error?

→ Cuando el efecto de Δx es despreciable frente al de Δy

$\cancel{\Delta x << \Delta y}$ → En general, no se pueden comparar

$\cancel{\varepsilon_x << \varepsilon_y}$ → Se pueden comparar, pero esta comparación no necesariamente compara el impacto de cada error

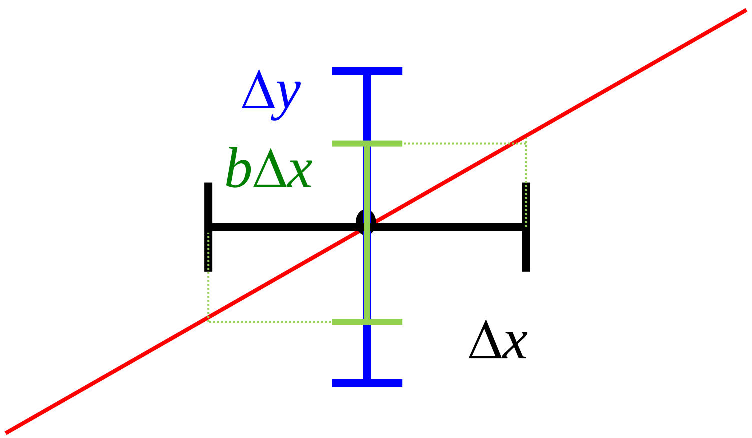
$\boxed{b\Delta x << \Delta y}$

↓

$b\Delta x$ mide cuánto "pesa" Δx en el eje y

Si $b\Delta x >> \Delta y$ hay que invertir los ejes (función inversa)

$$x = \frac{1}{b}y - \frac{a}{b}$$



Cuadrados Mínimos

Qué pasa cuando la relación no es lineal?

→ Se pueden hacer ajustes no-lineales

→ Muchas veces, puede hacerse un cambio de variable que permita realizar un ajuste lineal

Ejemplos	$\tilde{y} = a + b\tilde{x}$
$y = A + Bx^2$	$y = A + Bx^2$
$y = B\sqrt{x}$	$y = B\sqrt{x}$ $y^2 = B^2 x$ $\log y = \log B + \frac{1}{2}\log x$
$y = B\sqrt{x + A}$	$y^2 = B^2 A + B^2 x$
$y = A\exp(Bx)$	$\ln y = \ln A + Bx$
$y = A\exp(Bx) + y_0$	$\ln(y - y_0) = \ln A + Bx$ Tiene que conocerse y_0
$y = Ax^B$	$\log y = \log A + B\log x$