Mediciones indirectas

- Quiero medir una magnitud Z pero no tengo un instrumento para medirla de forma directa

- Conozco la relación funcional $Z = f\left(X, Y\right)$

- Puedo medir X e Y de forma directa $X = \overline{X} \pm \Delta X$ $Y = \overline{Y} \pm \Delta Y$

→Puedo determinar Z de forma indirecta $\overline{Z} = f\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$ **Pero, cómo estimar ΔZ?**

Ejemplos: área $A = b \cdot h$ velocidad $v = \dfrac{d}{t}$

Valor más probable $\overline{A} = \overline{b} \cdot \overline{h}$ $\overline{v} = \dfrac{\overline{d}}{\overline{t}}$

Una forma de acotar el intervalo:

$$A_{\max} = \left(\overline{b} + \Delta b\right)\left(\overline{h} + \Delta h\right)$$

$$A_{\min} = \left(\overline{b} - \Delta b\right)\left(\overline{h} - \Delta h\right)$$

$$v_{\max} = \frac{\overline{d} + \Delta d}{\overline{t} - \Delta t} \qquad v_{\min} = \frac{\overline{d} - \Delta d}{\overline{t} + \Delta t}$$

Qué desventaja presentan estos intervalos?

Analicemos un caso con una sola variable: $Y = f(X)$

Por ejemplo, área de un cuadrado: $A = b^2$ $\quad Y = X^2$

El intervalo

$$\left[f\left(\bar{X} - \Delta X\right), f\left(\bar{X} + \Delta X\right) \right]$$

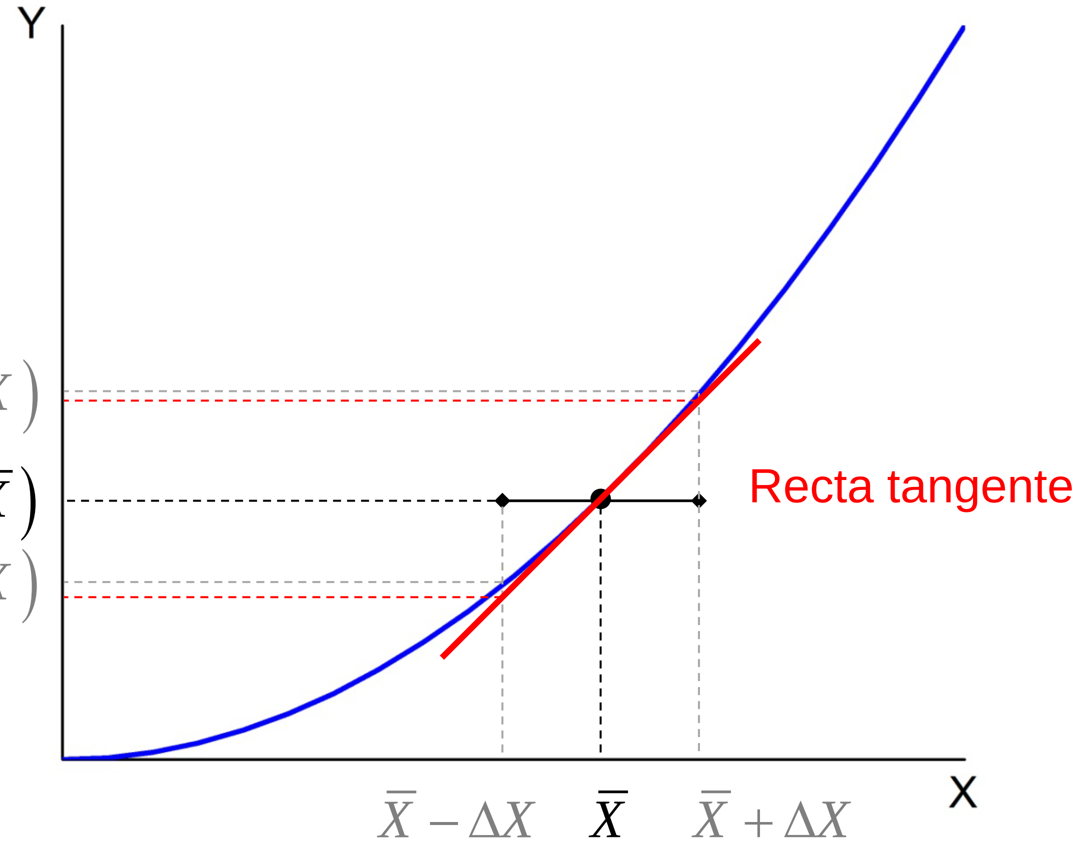
no está centrado en $\bar{Y} = f\left(\bar{X}\right)$

$$f\left(\bar{X}\right) + f'\left(\bar{X}\right)\Delta X \qquad f\left(\bar{X} + \Delta X\right)$$

Taylor de primer orden

$$f\left(\bar{X}\right)$$

$$f\left(\bar{X}\right) - f'\left(\bar{X}\right)\Delta X \qquad f\left(\bar{X} - \Delta X\right)$$



$$\Downarrow$$

$$Y = f\left(\bar{X}\right) \pm f'\left(\bar{X}\right)\Delta X$$

$$Y = \bar{Y} \pm \Delta Y$$

Para una variable:

$$Y = f(X) \longrightarrow \bar{Y} = f(\bar{X}) \qquad \Delta Y = \left|\frac{df}{dX}\right|_{\bar{X}} \Delta X$$

Para N variables (ejemplo con 2):

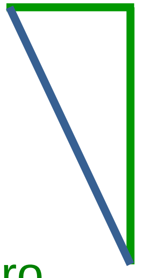
$$Z = f(X,Y) \longrightarrow \bar{Z} = f(\bar{X},\bar{Y})$$

$$\Delta Z = \sqrt{\left(\left|\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{\bar{X},\bar{Y}} \Delta X\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{\bar{X},\bar{Y}} \Delta Y\right)^2}$$

Fórmula de propagación de errores

Fórmula simplificada (aproximación)

$$\Delta Z = \left|\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{\bar{X},\bar{Y}} \Delta X + \left|\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{\bar{X},\bar{Y}} \Delta Y$$



Sobreestima el error pero simplifica las cuentas

Propagación de errores - Ejemplos

$$\Delta Z = \left|\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{\bar{X},\bar{Y}} \Delta X + \left|\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{\bar{X},\bar{Y}} \Delta Y$$

Suma

$$Z = X + Y \qquad \Delta Z = |1|\,\Delta X + |1|\,\Delta Y$$

Resta

$$Z = X - Y \qquad \Delta Z = |1|\,\Delta X + |-1|\,\Delta Y$$

$$\Delta Z = \Delta X + \Delta Y$$

Multiplicación

$$Z = XY \qquad \frac{\Delta Z}{\bar{Z}} = \frac{|\bar{Y}|\,\Delta X + |\bar{X}|\,\Delta Y}{\bar{X}\bar{Y}}$$

División

$$Z = \frac{X}{Y} \qquad \frac{\Delta Z}{\bar{Z}} = \frac{\left|\frac{1}{\bar{Y}}\right|\Delta X + \left|-\frac{\bar{X}}{\bar{Y}^2}\right|\Delta Y}{\frac{\bar{X}}{\bar{Y}}}$$

$$\frac{\Delta Z}{\bar{Z}} = \frac{\Delta X}{\bar{X}} + \frac{\Delta Y}{\bar{Y}}$$

$$\varepsilon_Z = \varepsilon_X + \varepsilon_Y$$

$$\Delta Z = \left(\frac{\Delta X}{\bar{X}} + \frac{\Delta Y}{\bar{Y}}\right)\bar{Z}$$

Propagación de errores - Ejemplos

$$Z = X^2 Y \longrightarrow \Delta Z = \left(2\frac{\Delta X}{\overline{X}} + \frac{\Delta Y}{\overline{Y}} \right) \overline{Z}$$

$$W = \frac{kX^a Y^b}{Z^c} \longrightarrow \Delta W = \left(a\frac{\Delta X}{\overline{X}} + b\frac{\Delta Y}{\overline{Y}} + c\frac{\Delta Z}{\overline{Z}} \right) \overline{W}$$

En algunos casos habrá que plantear las derivadas parciales

$$\Delta Z = \left| \frac{\partial Z}{\partial X} \right|_{\overline{X},\overline{Y}} \Delta X + \left| \frac{\partial Z}{\partial Y} \right|_{\overline{X},\overline{Y}} \Delta Y$$

Ejemplo:

$$Z = X^2 \ln Y \longrightarrow \Delta Z = \left| 2\overline{X} \ln \overline{Y} \right| \Delta X + \left| \frac{\overline{X}^2}{\overline{Y}} \right| \Delta Y$$

$$\Delta Z = \left(2\frac{\Delta X}{\overline{X}} + \frac{\Delta Y}{\overline{Y} \ln \overline{Y}} \right) \overline{Z}$$