Guía 3: Movimiento oscilatorio armónico simple y amortiguado

Cátedra: Prof. Gustavo Lozano - Depto. Física, FCEyN, UBA.

Objetivo general: Esta práctica tiene como objetivo estudiar experimentalmente las características fundamentales del movimiento oscilatorio armónico, tanto simple como amortiguado.

Introducción

Todo sistema físico que se encuentra en equilibrio estable, oscila al ser apartado de su posición de equilibrio. En general, dichos sistemas oscilan además en forma armónica, siempre que la perturbación aplicada lo aparte levemente de su posición de equilibrio. En estas condiciones se puede definir una frecuencia de oscilación, que estará completamente determinada por los parámetros del sistema físico en consideración, y será independiente de las condiciones específicas en las que se pone a oscilar el sistema.

En el caso de un resorte, el movimiento de tensión y compresión muestra que la elongación del mismo aumenta proporcionalmente con la fuerza aplicada, dentro de ciertos límites. Esta observación se generaliza en la ley de Hooke

$$F = -k \cdot \Delta x \tag{1}$$

donde F es la fuerza aplicada, Δx el vector desplazamiento y k la constante elástica del resorte. El signo negativo indica que la fuerza del resorte es restitutiva u opuesta a la fuerza externa que lo deforma. Por otro lado, cuando el movimiento del resorte es armónico simple, la ecuación que lo describe está dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2}$$

cuya solución más general es

$$x(t) = a \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi) \tag{3}$$

siendo a la amplitud de oscilación o máxima elongación, ω_0 la frecuencia de oscilación, y ϕ la fase inicial. La frecuencia de oscilación tiene la siguiente forma

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4}$$

con m como la masa total efectiva oscilante [1]. Para unificar criterios, haremos distinción entre la *frecuencia angular* ω_0 y la *frecuencia* f_0 (a secas)

$$\omega_0 \;=\; 2\pi\, f_0 \;=\; \frac{2\pi}{T} \tag{5}$$

siendo T el periodo de oscilación.

En las oscilaciones de los sistemas reales el movimiento estará amortiguado debido a la acción de fuerzas disipativas. Por ejemplo, podemos considerar el caso de un sistema masa-resorte oscilando en el aire y luego en aceite. Dado que la viscosidad del fluido que rodea la masa oscilante en el último caso es mucho mayor que la del aire, esperamos que sus efectos disipativos sean también mayores.

Si bien la intuición nos dice que el movimiento oscilatorio se amortiguará más rápido en el aceite que en el aire, a priori, no sabemos si la amplitud de la oscilación decrecerá de forma lineal, cuadrática o logarítmicamente (por citar algunos ejemplos posibles) con el tiempo, ni cuánto tiempo tardará el movimiento en extinguirse. La forma en la que el movimiento se amortiguará depende de la relación funcional de la fuerza disipativa con las variables del problema.

Consideremos el caso de un cuerpo de masa m que se mueve en el seno de un fluido viscoso. Sabemos que la fuerza de rozamiento F_R es proporcional a la velocidad relativa v del cuerpo en el medio de la siguiente forma:

$$F_R = -b\, v \tag{6}$$

donde b es una constante que mide el grado de viscosidad del fluido.

Teniendo en cuenta las fuerzas actuantes, la ecuación de movimiento resulta:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\,\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\, x = 0 \tag{7}$$

cuya solución depende de los valores de los distintos parámetros involucrados, y de la relación entre ellos. Se define la constante de amortiguamiento del fluido [1] γ como:

$$\gamma = \frac{b}{2m} \tag{8}$$

En general, un movimiento oscilatorio amortiguado con una fuerza de este tipo admite, según estudiaron en sus clases teóricas, una clasificación en tres posibles casos: subamortiguado, amortiguado críticamente y sobreamortiguado, según los valores particulares que asuman los parámetros del problema considerado. Si $\gamma^2 < w_0^2$ nos encontramos en el caso de un oscilador subamortiguado; es decir, la fuerza elástica es más importante que la fricción, al menos en algún intervalo de tiempo. En este caso, la solución de la ecuación de movimiento es:

$$x(t) = a\, e^{-\gamma\, t}\, \cos(\omega\, t + \phi) \tag{9}$$

donde a y ϕ son constantes a determinar, y ω es la frecuencia de oscilación del sistema que puede expresarse como:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \tag{10}$$

Para el caso de un sistema masa-resorte $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. En la figura 1 se muestra cómo varía la amplitud de la oscilación en función del tiempo.

[1] Cuidado: En muchas referencias la notación de b y γ es distinta, y deberán volver a las ecuaciones de movimiento para interpretar correctamente los resultados.

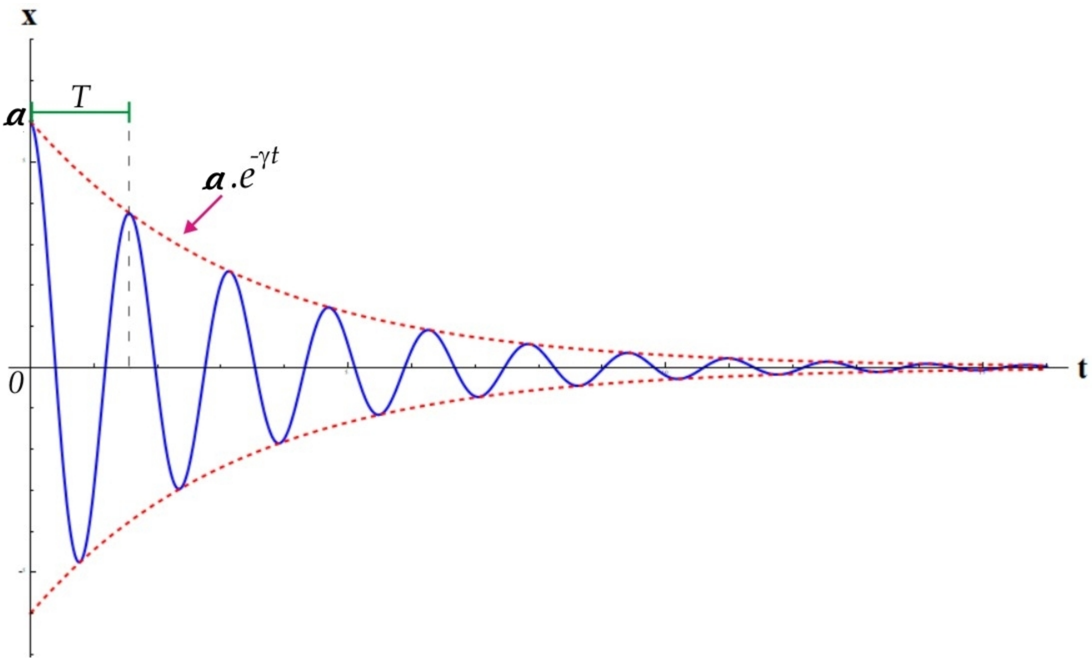

Figura 1: Movimiento oscilatorio amortiguado: la amplitud del movimiento disminuye según la función $A.e^{-\gamma t}$ siendo $\gamma = \frac{b}{2m}$. T representa el período de la oscilación.

Si la oscilación ocurre alrededor de una posición x_0, entonces

$$x(t) = a\, e^{-\gamma\, t}\ \cos(\omega\, t + \phi) + x_0. \tag{11}$$

Si medimos con el sensor de fuerza vinculado al resorte, podemos reescribir a la fuerza esperada en nuestras mediciones como dada teóricamente por la siguiente expresión ($F(t) = -k\, x(t)$)

$$F(t) = -k\ a\, e^{-\gamma\, t}\ \cos(\omega\, t + \phi) - k\, x_0. \tag{12}$$

Es decir,

$$F(t) = A\, e^{-\gamma\, t}\ \cos(\omega\, t + \phi) + F_0 \tag{13}$$

donde $A = -k\ a$.

Actividades

Actividad 1: Movimiento oscilatorio armónico simple: Determinación de la constante elástica de un resorte

Se propone determinar las características de un resorte simple empleando para ello dos métodos experimentales distintos: uno estático y otro dinámico. El protocolo experimental sugerido para implementar dichos métodos se describe a continuación.

A- Método estático

Hallar la posición de equilibrio X_{eq} de un sistema formado por un objeto que cuelga de un resorte, para diversas masas m del objeto suspendido. A partir de la dependencia de dicha posición de equilibrio como función de la masa del cuerpo se puede determinar la longitud natural del resorte (L_0) y la constante elástica del resorte (k) mediante un ajuste de los resultados.

1. Represente gráficamente la posición de equilibrio X_{eq} en función de la masa m que cuelga del resorte. ¿Qué relación encuentra entre estas magnitudes?
2. ¿qué representa la pendiente? ¿ y la ordenada al origen?
3. Determine el valor de la constante elástica k del resorte.

B- Método dinámico

Una vez determinadas las características del resorte, se lo va a suspender de un sensor de fuerzas que permite registrar una señal proporcional a la fuerza necesaria para sostener el sistema suspendido desde su soporte. En estas condiciones se procederá a ponerlo a oscilar con diferentes masas suspendidas para así registrar la lectura del sensor de fuerzas en función del tiempo. Tenga en cuenta no poner mas peso del que puede soportar el sensor.

1. Estudie la dependencia de la frecuencia de oscilación con la masa.
2. Represente sus resultados en un gráfico. ¿Qué relación encuentra entre ambas magnitudes? Determine la constante elástica del resorte también por este método.
3. Compare ambos métodos de medición en lo que hace a la exactitud y precisión de los valores obtenidos para la constante elástica del resorte. ¿Cuál de los dos métodos recomendaría a alguien que desease medir la elasticidad de un material?

Actividad 2: Movimiento oscilatorio armónico amortiguado

En esta segunda parte de la guía se propone estudiar las oscilaciones amortiguadas del sistema masa-resorte cuando la masa se encuentra sumergida en un fluido viscoso. Para ello, utilice el mismo resorte empleado en la Actividad 1. Adose una esfera de masa m al resorte, y utilice un recipiente apropiado lleno con algún fluido viscoso (por ejemplo, glicerina o agua con detergente) para sumergirla de modo tal que la masa quede totalmente inmersa dentro del líquido pero no así el resorte. Con este montaje simple se propone llevar a cabo un estudio experimental del movimiento oscilatorio resultante.

Utilizando el método dinámico tome registro del movimiento para una única masa.

Análisis: Determine el coeficiente de amortiguamiento γ de 3 maneras distintas:

1. Estudie si varía la frecuencia angular de este sistema respecto del sistema sin amortiguamiento. ¿Debería variar según fundamentos teóricos? ¿Es útil este método para determinar el coeficiente de amortiguamiento?
   Recuerde que la frecuencia angular es $\omega = \frac{2\pi}{T}$ donde ahora T es el período de la oscilación del sistema amortiguado. Entonces, para responder la pregunta de este ítem primero deberá calcular el período de la oscilación.

2. Identifique los picos de la función trigonométrica y grafíquelos por separado. ¿A qué función debería corresponder según el modelo? Observación 1: Para encontrar los picos puede utilizar la opción *Find Peaks* del Origin.
   Transforme las variables y partir de una regresión lineal obtenga el valor de γ correspondiente.
   Observación: Antes de transformar las variables recuerde restar el valor de F_0.

3. Finalmente, realice un ajuste no lineal de la señal amortiguada y determine a partir de los valores de los parámetros del ajuste la constante correspondiente (ver **tutorial-ajuste.pdf**).

Por último, estudie la precisión, exactitud y "utilidad" de cada uno de los métodos propuestos. Si se le ocurre otro, calcule también por ese método y compare.

Comentarios útiles

- La masa total efectiva del sistema es $m = \frac{m_r}{3} + m_d + m_p$, donde m_r representa la masa del resorte, m_d es la masa del dispositivo que oscila dentro del agua y m_p corresponde a masas que eventualmente pueden ser añadidas al sistema. Las masas m_p sugeridas son 0, 50 y 100 g.

- Las condiciones iniciales del movimiento deben garantizar que el movimiento dentro del líquido no se amortigüe en sólo uno o dos períodos. Al mismo tiempo, se debe poner especial atención para que el cambio de amplitud en cada oscilación no esté acompañado por una variación significativa en la porción de masa sumergida.

- Asegurarse que el pie donde se encuentra montado el sensor de fuerza no se mueva o vibre durante la oscilación. Este efecto puede influir en la medición y generar una señal ruidosa independientemente de la frecuencia de muestreo elegida. Si es necesario puede agregar pesas adicionales a la base.

- Notar que el gancho del sensor de fuerza se puede desenroscar. Asegurarse que el mismo esté bien enroscado antes de realizar la medición.

Referencias

[1] A. Arrieta, E.S. Arrieta, J.M. Tejeiros. Masa Efectiva para un Sistema de Muelle Real. Revista Colombiana de Física, vol. 41, No. 2, Abril 2009