Mediciones aleatorias

Laboratorio MyT
Verano 2024

Otros errores:

$$x = (x_0 \pm \epsilon)\text{unidad}$$

$$\epsilon^2 = \epsilon_{inst}^2 + \epsilon_{est}^2 + \epsilon_{sist}^2$$

Error sistemático:

- Causados por imperfecciones en los instrumentos de medida (reloj que atrasa o adelanta), el método experimental o por el observador.
- Tienden a desviar el valor de una medida en una sola dirección (dan valores siempre mayores o siempre menores que el valor verdadero).

Error estadístico (causal o aleatorio):

- Se producen al azar, por causas no controladas o desconocidas.
- Repito una medición varias veces (con el mismo instrumento y en las mismas condiciones) y los resultados no siempre se repiten.
- Estos errores pueden cometerse con igual probabilidad por defecto

Mediciones:

Mediciones:

Mediciones:

Mediciones:

Mediciones con fluctuaciones aleatorias::

Variable aleatoria: Resultado que no se reproduce al repetir el experimento:

- Por naturaleza de la variable que se mide
- Por el proceso de medición

Mediciones con fluctuaciones aleatorias::

Variable aleatoria: Resultado que no se reproduce al repetir el experimento:

- Por naturaleza de la variable que se mide
- Por el proceso de medición

¿Cuál es el valor que hay que informar?

Mediciones con fluctuaciones aleatorias::

Variable aleatoria: Resultado que no se reproduce al repetir el experimento:

- Por naturaleza de la variable que se mide
- Por el proceso de medición

¿Cuál es el valor a informar?

Mediciones con fluctuaciones aleatorias::

Variable aleatoria: Resultado que no se reproduce al repetir el experimento:

- Por naturaleza de la variable que se mide
- Por el proceso de medición

¿Cuál es el valor a informar?

HAY QUE ANALIZAR LA DISTRIBUCIÓN

Ejemplo:

Se mide N veces (50) la magnitud X. Se obtienen los siguientes resultados:

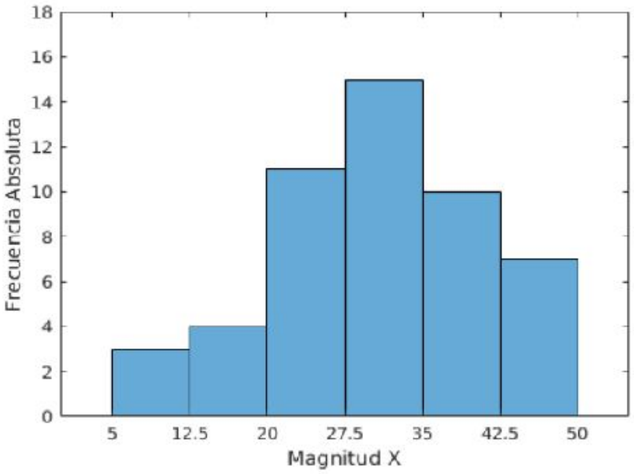
X = {37; 31; 39; 28; 45; 35; 25; 28; 27; 32; 27; 34; 47; 39; 38; 21; 24; 32; 28; 13; 14; 40; 22; 50; 7; 34; 30; 22; 34; 22; 38; 30; 13; 5; 27; 41; 31; 30; 36; 16; 44; 21;30; 26; 31; 10; 45; 35; 50; 44}

Ejemplo:

Histograma

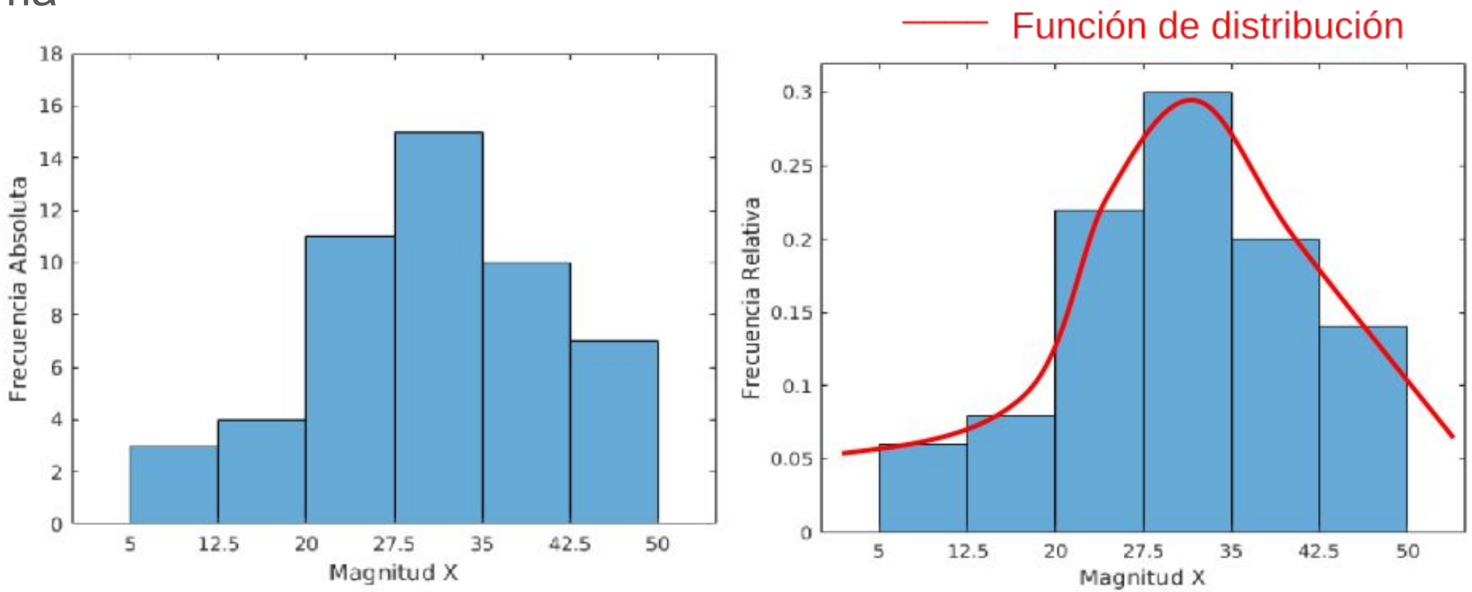
1. Se divide al eje x en n intervalos (bins) iguales
2. Se cuenta cuántas mediciones caen en cada bin (frecuencia)

Intervalo	Frecuencia
5 – 12,5	3
12,5 – 20	4
20 – 27,5	11
27,5 – 35	15
35 – 42,5	10
42,5 – 50	7



Mediciones con fluctuaciones aleatorias:

Histograma

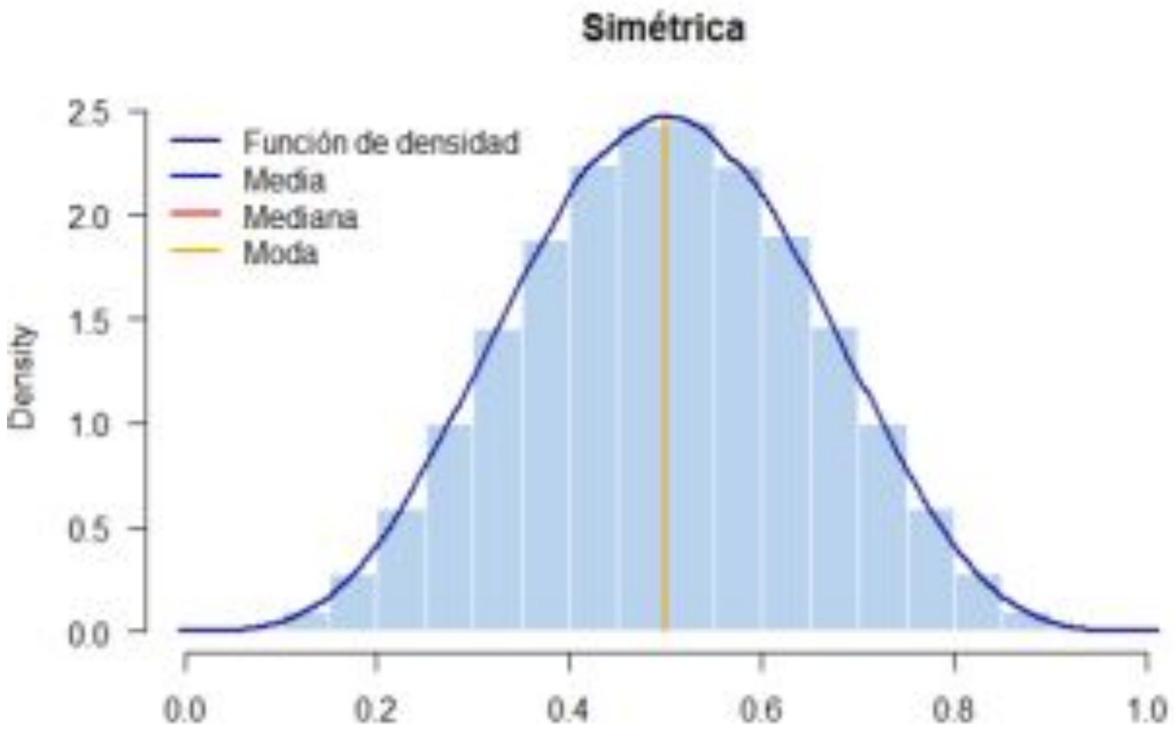


-Frecuencia o frecuencia absoluta: cantidad de datos en cada intervalo

-Frecuencia relativa: frecuencia absoluta / total de datos (N)

Parámetros característicos:

Valores representativos



<u>Media:</u> Promedio de los datos

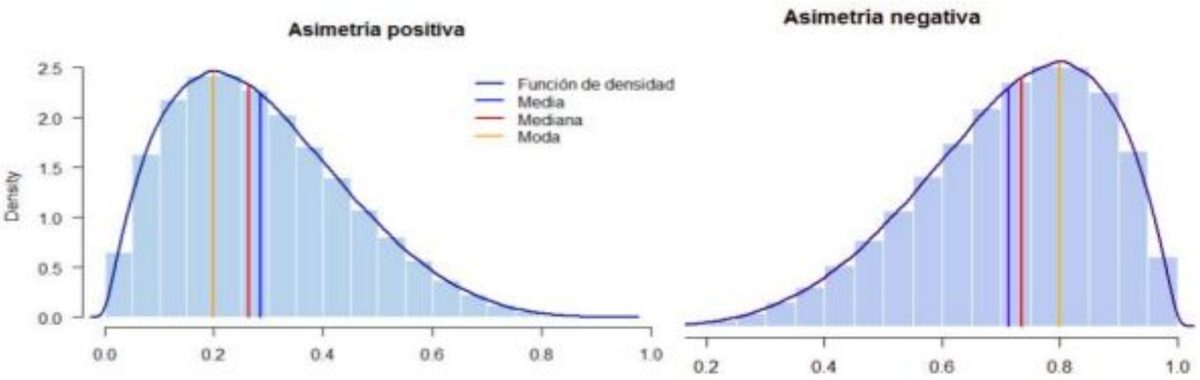
$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i}^{N} x_i$$

<u>Moda:</u> Valor más frecuente

<u>Mediana:</u> Valor que queda en el medio de los datos (ordenados de menor a mayor)

Parámetros característicos:

Valores representativos



<u>Media:</u> Promedio de los datos

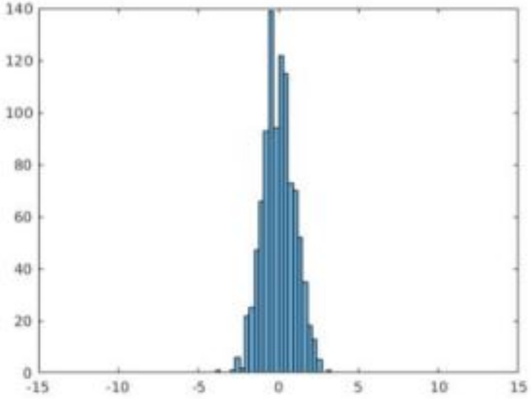
$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i}^{N} x_i$$

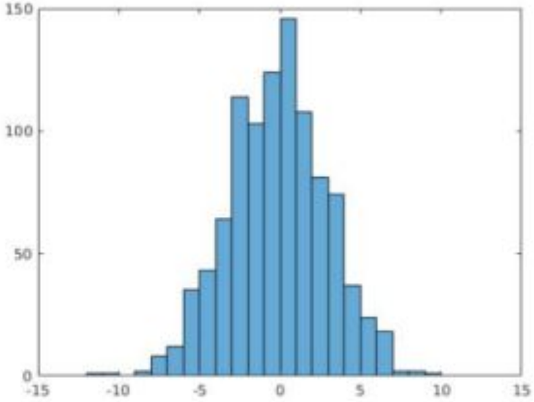
<u>Moda:</u> Valor más frecuente

<u>Mediana:</u> Valor que queda en el medio de los datos (ordenados de menor a mayor)

Parámetros característicos:

Dispersión





Varianza: distancia cuadrática media de los datos al valor medio

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i}^{N} (x_i - \bar{x})^2$$

Desvío Standard: raíz de la varianza

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$$

Distribución normal (Gausseana):

- Cuando se trata de errores casuales los histogramas pueden aproximarse por una función gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

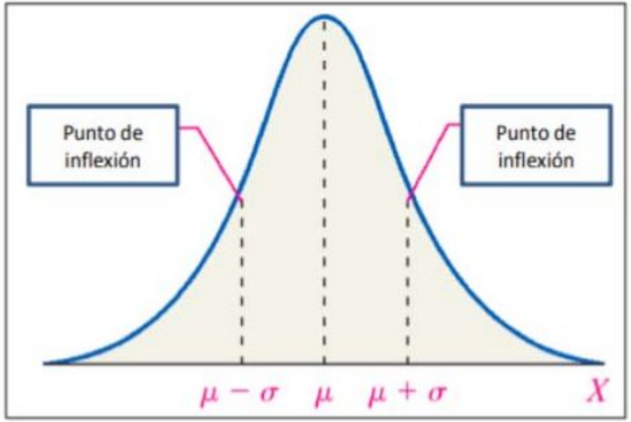
- Simétrica
- Depende de 2 parámetros: media y desvío estándar

- Cuanto mayor sea el número de mediciones mejor es la aproximación

- En teoría, si se midiera infinitas veces se obtendría una distribución gaussiana cuyo valor medio μ sería el "valor real" de la magnitud

- Probabilidad de que una medición se halle en el intervalo $(x_1; x_2)$:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$



Distribución normal (Gausseana):

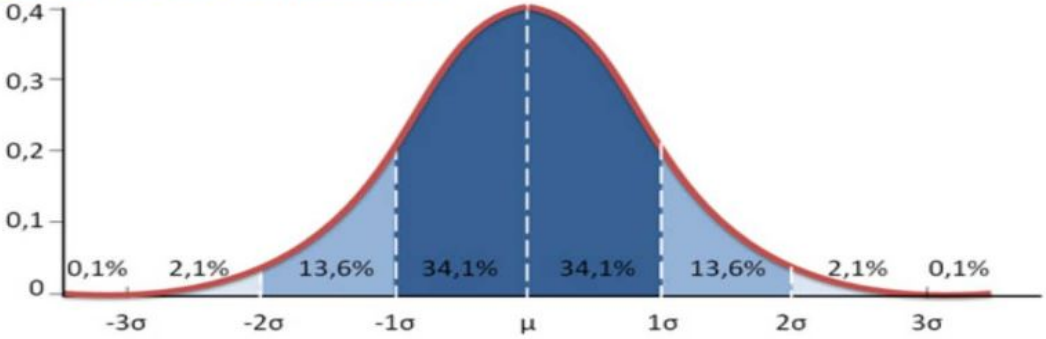
$$\int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} f(x)\,dx = 0,68$$ El 68% de los datos caen en el intervalo $(\bar{x}-\sigma;\bar{x}+\sigma)$

$$\int_{\bar{x}-2\sigma}^{\bar{x}+2\sigma} f(x)\,dx = 0,95$$ El 95% de los datos caen en el intervalo $(\bar{x}-2\sigma;\bar{x}+2\sigma)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$ El 100% de los datos caen en el intervalo $(-\infty;+\infty)$

Normalización

Los porcentajes representan la probabilidad de que una nueva medición caiga en el respectivo intervalo



Distribución de promedios:

Experimento 1: Se mide N veces la magnitud x $\longrightarrow$ $\bar{x}_1$ σ_1

Experimento 2: Se mide N veces la magnitud x $\longrightarrow$ $\bar{x}_2$ σ_2

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

Experimento M: Se mide N veces la magnitud x $\longrightarrow$ $\bar{x}_M$ σ_M

Promedio de los promedios $\bar{\bar{x}}$

Desvío de los promedios ξ

- Al medir una vez, hay un 68% de probabilidad de que el resultado x caiga en $\bar{x} \pm \sigma$

- Al medir **N veces**, hay un 68% de probabilidad de que el **promedio** $\bar{x}$ caiga en $\bar{\bar{x}} \pm \xi$

Cuando se reporta un promedio $\bar{x}$ el error se asocia a $\xi = \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$

Definición: $\boxed{\text{Error estadístico} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}}$

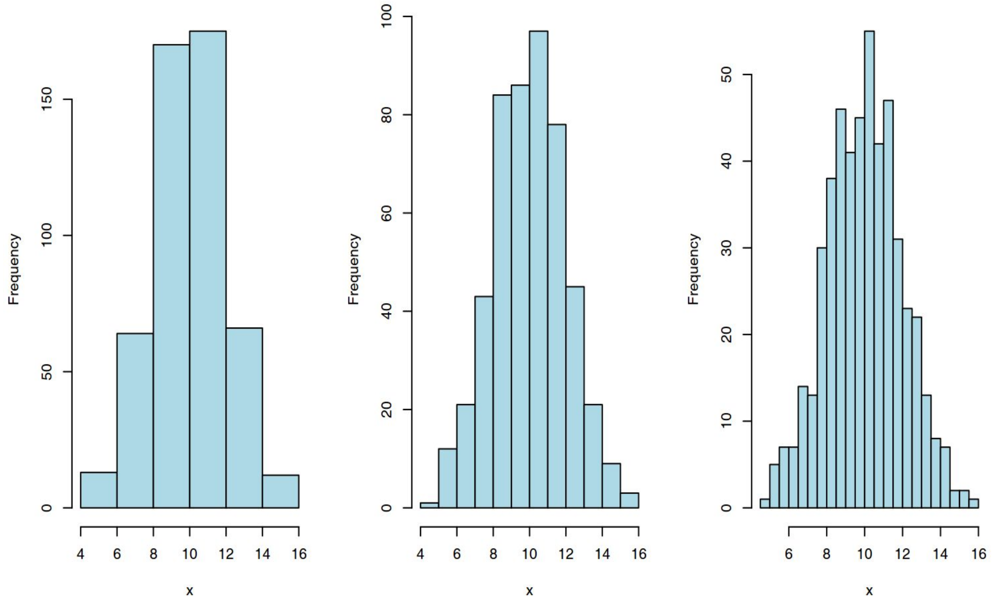
Número de intervalos

¿Cómo se decide?

- Depende del sistema de medición utilizado.

- Existen reglas. La más conocida es la regla de Sturge (si es simétrica):

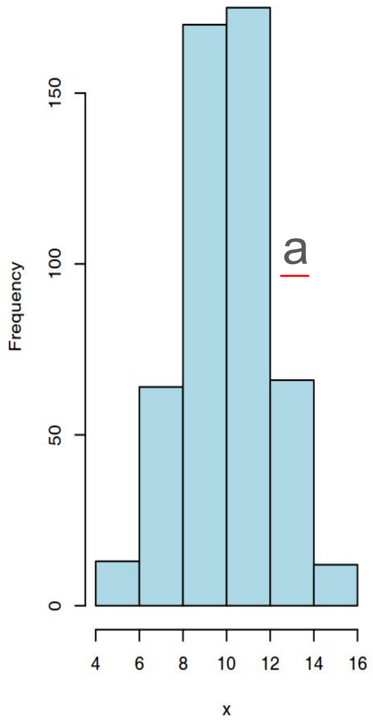
$$K = 1 + ln(N)$$



Ancho del intervalo

¿Cómo se decide?

$$a = \frac{x_{max} - x_{min}}{K}$$

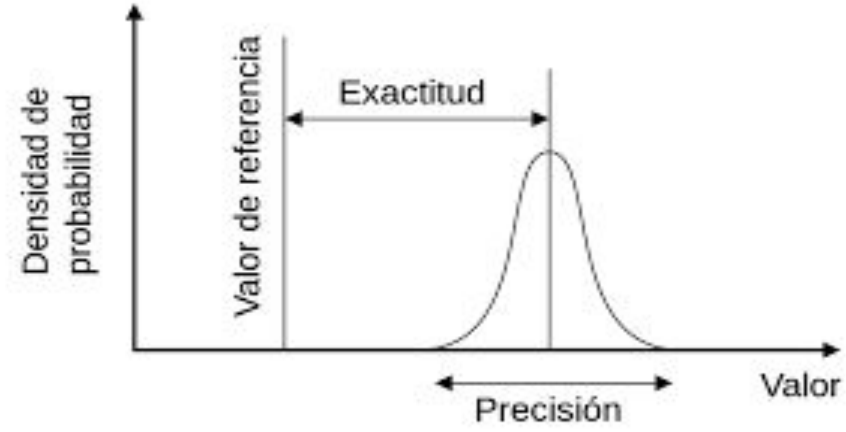


Comparación de mediciones

Laboratorio MyT
Verano 2024

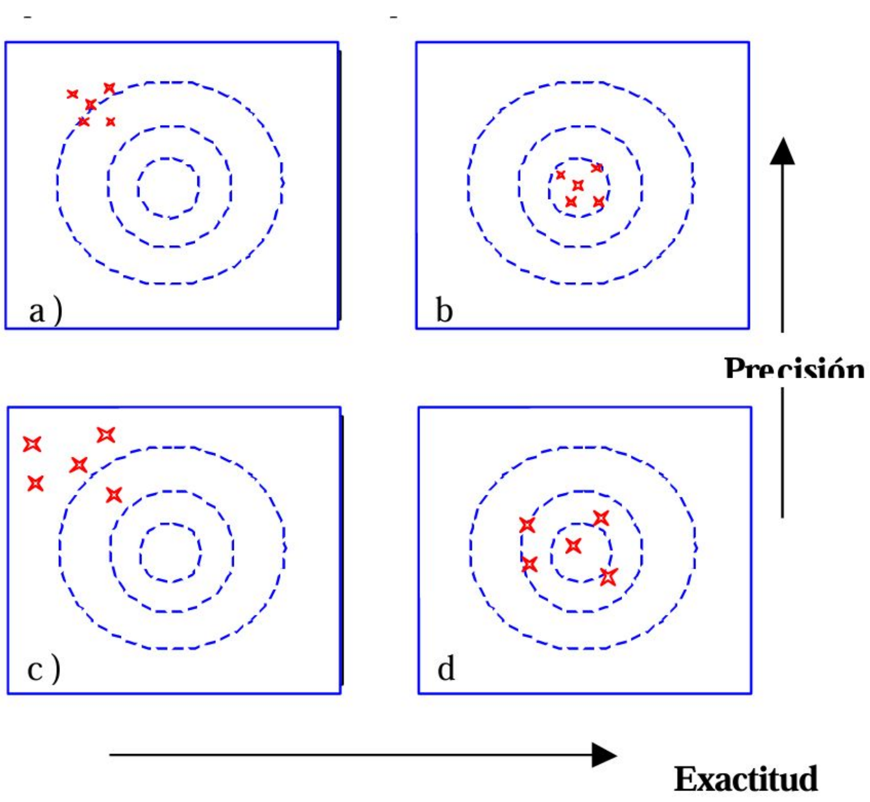
Precisión y exactitud

- Precisión: sensibilidad del instrumento.
- Exactitud: la calidad de la calibración



Precisión y exactitud

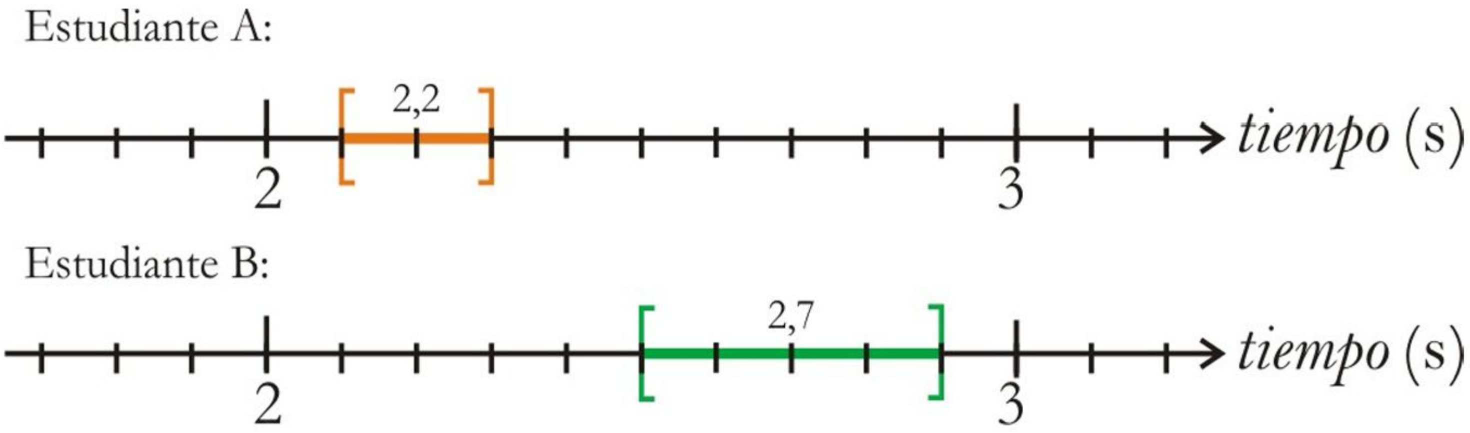
- Precisión: sensibilidad del instrumento.
- Exactitud: la calidad de la calibración



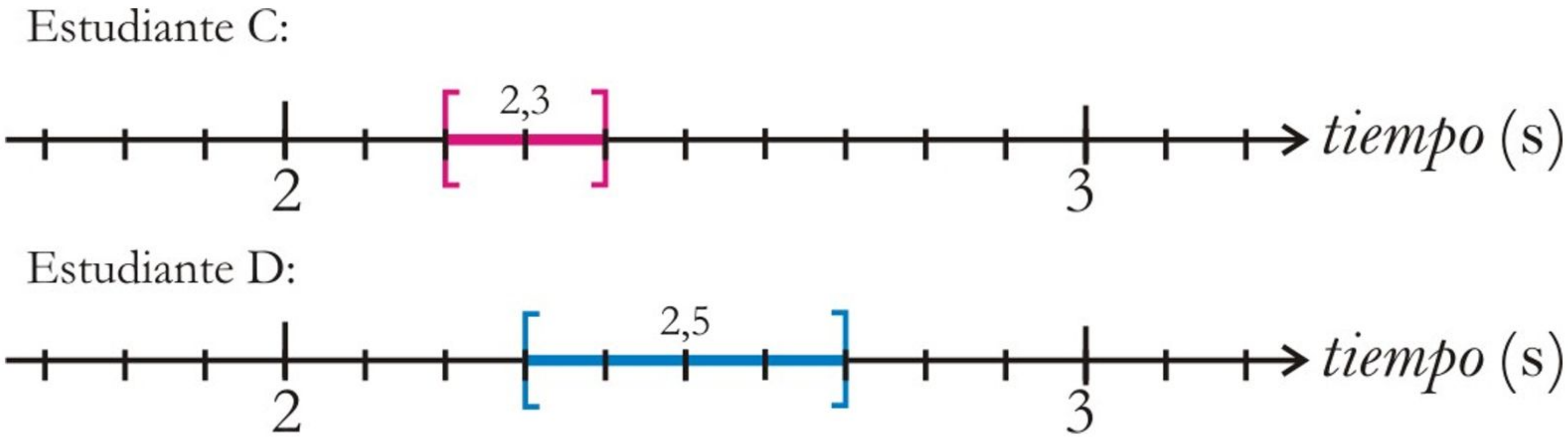
Distinguibles e indistinguibles

$$x_1 = (x_{01} \pm \epsilon_1) \text{ y } x_2 = (x_{02} \pm \epsilon_2)$$

Distinguibles e indistinguibles



Distinguibles e indistinguibles



Distinguibles e indistinguibles

$$x_1 = (x_{01} \pm \epsilon_1) \text{ y } x_2 = (x_{02} \pm \epsilon_2)$$

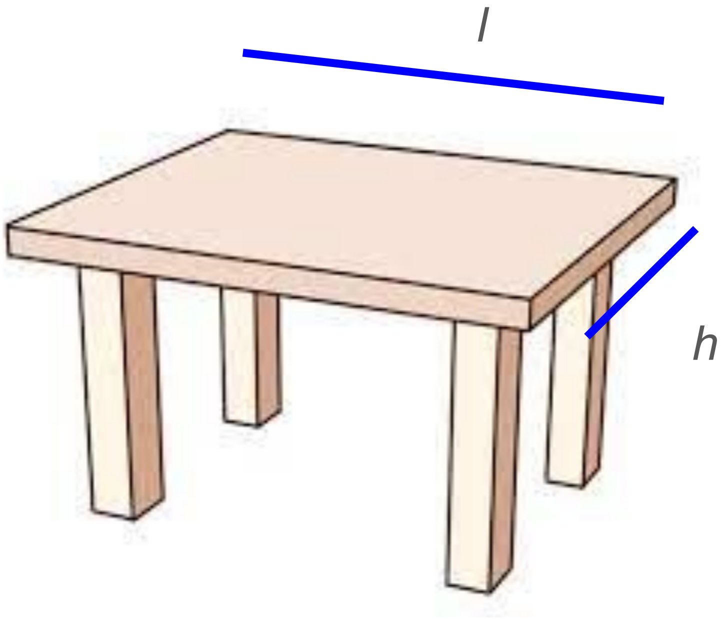
$$\boxed{|x_{01} - x_{02}| \leq \epsilon_1 + \epsilon_2,}$$

Si se cumple las desigualdad ambas mediciones son indistinguibles.

Mediciones indirectas

Laboratorio MyT
Verano 2024

Medición superficie de la mesa

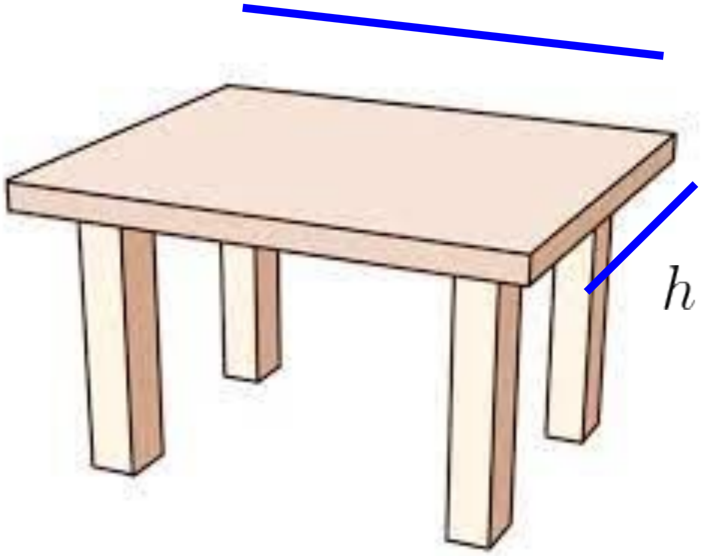


$$Y = area(h, l)$$

$$Y = h.l$$

Medición superficie de la mesa

$$l \pm \Delta l$$



$$h \pm \Delta h$$

$$Y = area(h, l)$$
$$Y = h.l$$

¿ΔY?

Propagación de errores

Analicemos un caso con una sola variable: $Y = f\left(X\right)$

Por ejemplo, área de un cuadrado: $A = b^2$ $Y = X^2$

Propagación de errores

El intervalo

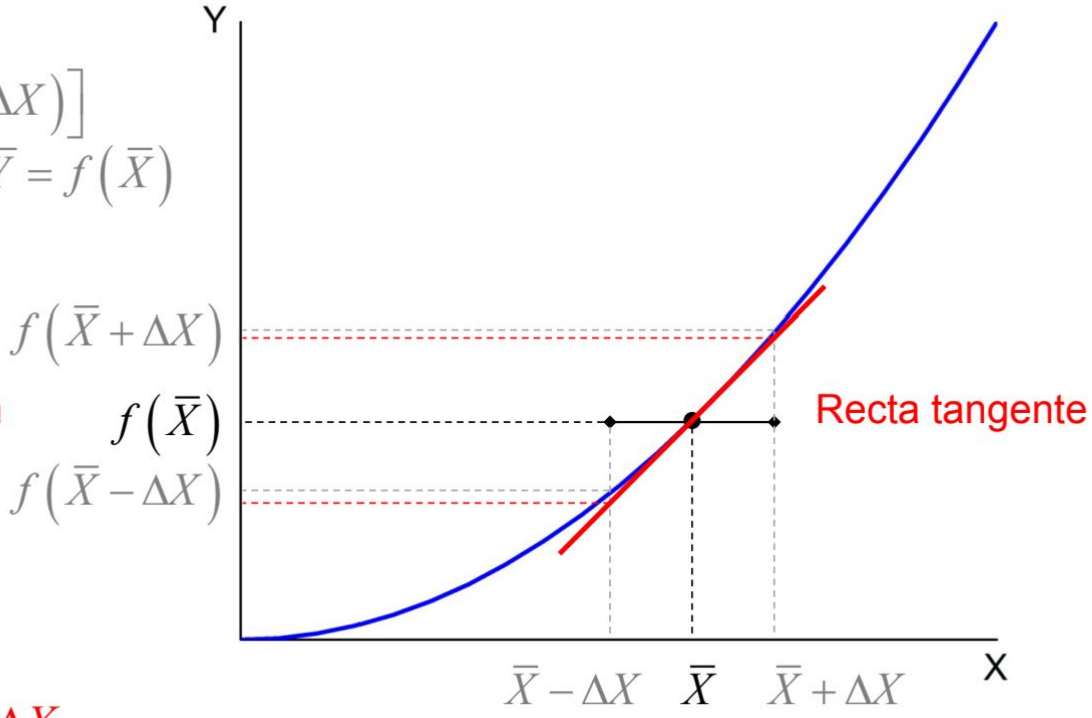
$$\left[f\left(\bar{X}-\Delta X\right), f\left(\bar{X}+\Delta X\right)\right]$$

no está centrado en $\bar{Y}=f\left(\bar{X}\right)$

$$f\left(\bar{X}\right)+f'\left(\bar{X}\right)\Delta X$$

Taylor de primer orden

$$f\left(\bar{X}\right)-f'\left(\bar{X}\right)\Delta X$$



$$\Downarrow$$

$$Y=f\left(\bar{X}\right)\pm f'\left(\bar{X}\right)\Delta X$$

$$Y=\bar{Y}\pm\Delta Y$$

Propagación de errores

Para una variable:

$$Y = f\left(X\right) \longrightarrow \bar{Y} = f\left(\bar{X}\right) \qquad \Delta Y = \left|\frac{df}{dX}\right|_{\bar{X}} \Delta X$$

Propagación de errores

Para una variable:

$$Y = f(X) \longrightarrow \bar{Y} = f(\bar{X}) \qquad \Delta Y = \left|\frac{df}{dX}\right|_{\bar{X}} \Delta X$$

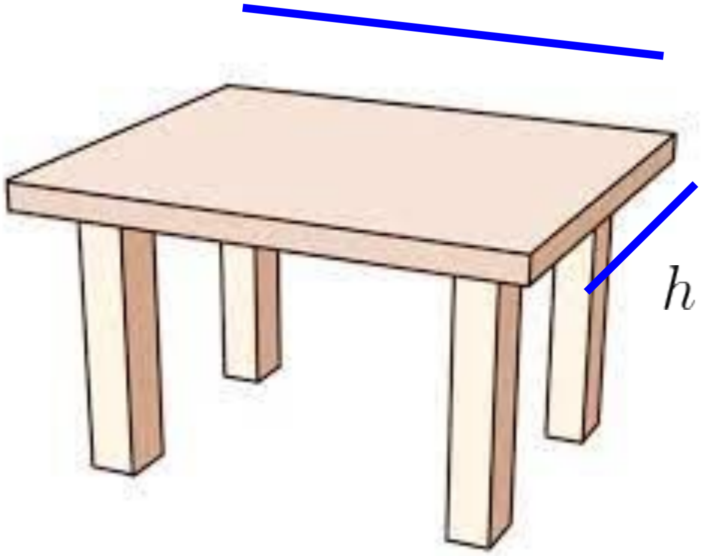
Para N variables (ejemplo con 2):

$$Z = f(X,Y) \longrightarrow \bar{Z} = f(\bar{X},\bar{Y})$$

$$\Delta Z = \sqrt{\left(\left|\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{\bar{X},\bar{Y}} \Delta X\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{\bar{X},\bar{Y}} \Delta Y\right)^2}$$

Fórmula de propagación de errores

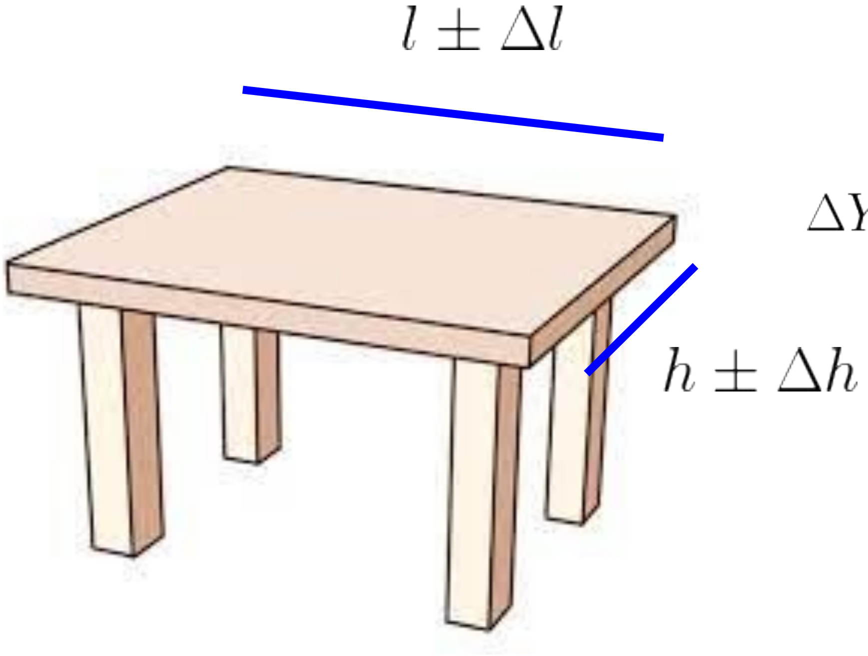
Medición superficie de la mesa



$$Y = area(h, l)$$
$$Y = h.l$$

¿ΔY?

Medición superficie de la mesa

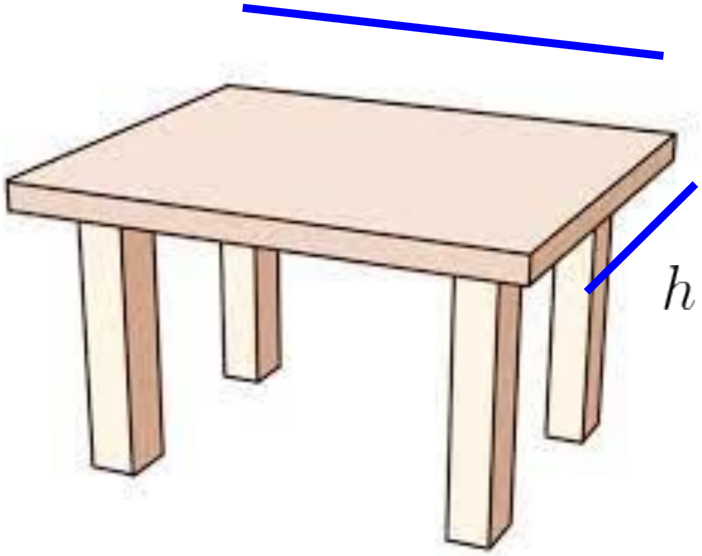


$$Y = area(h, l)$$

$$Y = h.l$$

$$\Delta Y = \sqrt{\left(\left|\frac{\partial Y}{\partial h}\right|_{h,l} \Delta h\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial Y}{\partial l}\right|_{h,l} \Delta l\right)^2}$$

Medición superficie de la mesa



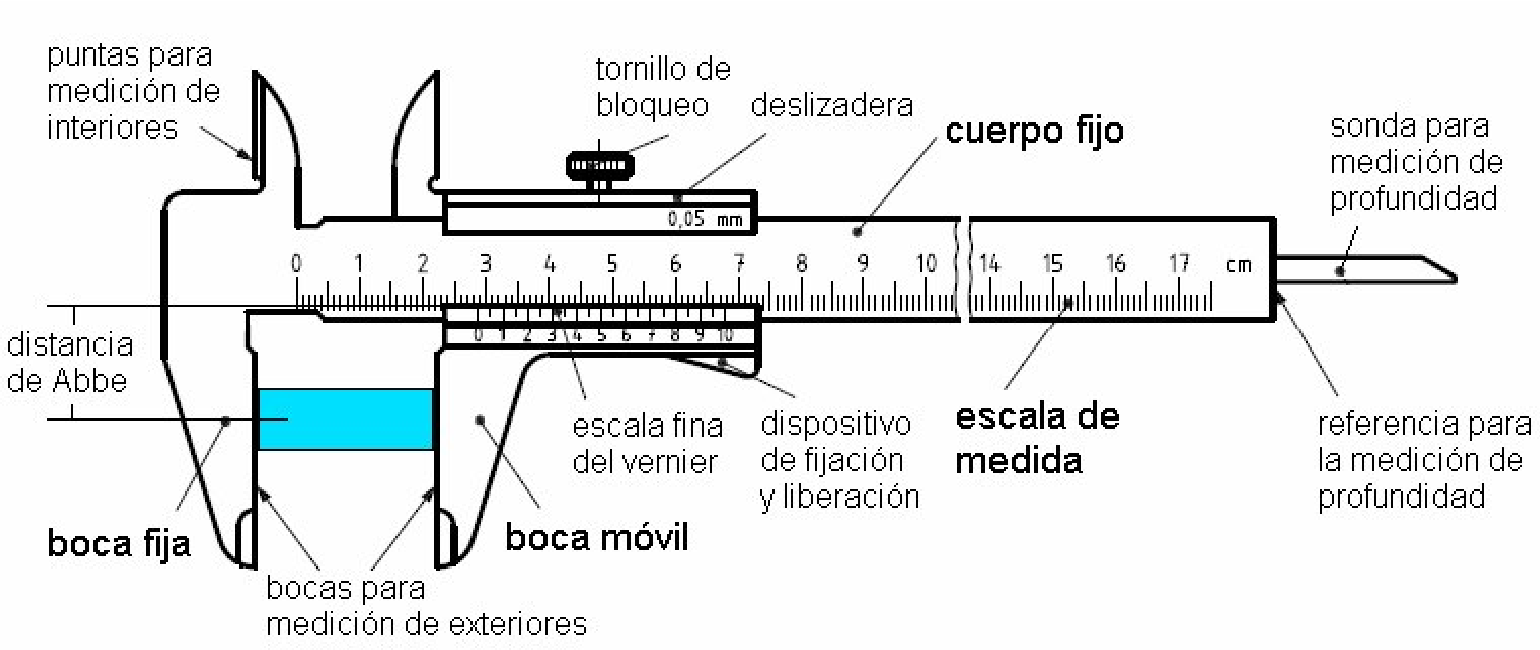
$$Y = area(h, l)$$

$$Y = h.l$$

$$\Delta Y = \sqrt{\left(\left|\frac{\partial Y}{\partial h}\right|_{h,l} \Delta h\right)^2 + \left(\left|\frac{\partial Y}{\partial l}\right|_{h,l} \Delta l\right)^2}$$

$$\boxed{\Delta Y = \sqrt{(l.\Delta h)^2 + (h.\Delta l)^2}}$$

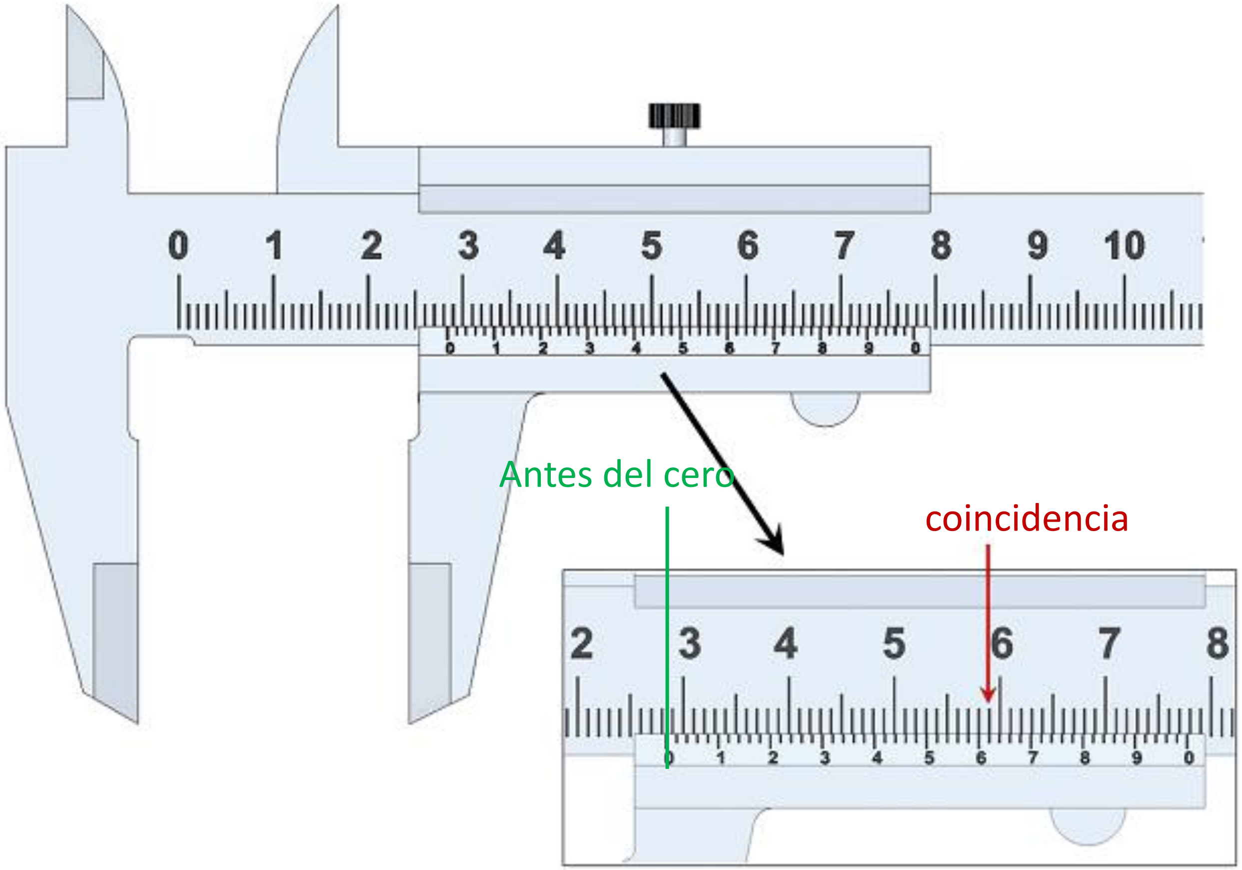
EL USO DEL CALIBRE



Determinación de la apreciación

$$\sigma_{aprec} = \frac{mínima\ divisón\ escala\ fija}{n°\ de\ divisiones\ del\ vernier} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{aprec} = \frac{1\ \text{mm}}{20} = 0{,}05\ \text{mm}$$

EL USO DEL CALIBRE



Ejemplo:

1) Determinar la apreciación

$$\sigma_{aprec} = \frac{1\ \text{mm}}{50} = 0{,}02\ \text{mm}$$

2) Lectura en escala fija

$$x_1 = 28\ \text{mm}$$

3) Lectura en escala móvil

$$x_2 = 0{,}62\ \text{mm}$$

4) Sumo 2) y 3)

$$x = 28{,}62\ \text{mm}$$

5) Expreso el resultado

$$\boldsymbol{x = (28,62\ \pm 0,02\ )\ \text{mm}}$$