Mecánica y Termodinámica 1^{er} cuatrimestre 2020
Profesor: Pablo Balenzuela JTP: Pablo Mauas y Luz Bavassi

Clase N° 1: Repaso de cinemática

La clase de hoy es un repaso de lo que vieron en el CBC de física. Vamos a reveer un poco de cinématica puntual en una dimensión, en particular dos casos:

- **cuando el objeto se mueve con velocidad constante (MRU)**
- **cuando el objeto se mueve con aceleración constante (MRUV)**

Con lo que veamos hoy tendrían que poder resolver los ejercicios 1-2-3-4-6-7 de la guía 1.

Repaso corto

La cinemática estudia el movimiento de los cuerpos o cómo cambia la posición de un cuerpo en el tiempo. En esta práctica vamos a considerar que todos los cuerpos son puntos. Si queremos explicar cómo se mueve algo es necesario tener claro desde dónde vamos a describir el movimiento. Para eso tenemos que definir un sistema de referencia, Figura 1. El sistema de referencia S va a determinar las direcciones del espacio y el sentido que tienen.

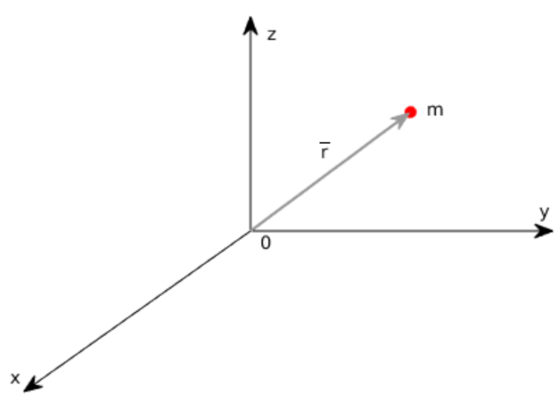

Figura 1: : Sistema de referencia cartesiano S

A partir de S, definimos la posición en la que se encuentra un cuerpo de masa m. Para un determinado tiempo, el vector posición se escribe como:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

Como cualquier otro vector, la posición tiene una dirección, sentido y módulo (se representa en el espacio como una flecha). Solo para simplificar la notación, vamos a dejar de escribir explícitamente la dependencia de t para cada componente de la posición ($x(t) \rightarrow x$), teniendo en cuenta que tanto x, y, z son funciones del tiempo.

La magnitud que define el cambio de posición en el tiempo es la velocidad $\vec{v}$, que también es un vector que puede o no depender del tiempo. La velocidad es la derivada de la posición

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Si estamos trabajando con un sistema de referencia cartesiano, como el de la Figura 1, la velocidad es:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z}$$

o sea,

$$v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt}$$

El cambio de la velocidad en el tiempo se define como la aceleración $\vec{a}$, que es un vector y puede o no depender del tiempo. La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Para el caso de un sistema de referencias cartesiano la $\vec{a}$ es la derivada de cada una de las partes:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{x} + \frac{dv_y}{dt}\hat{y} + \frac{dv_z}{dt}\hat{z}$$

o sea,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}; a_y = \frac{dv_y}{dt}; a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

Movimiento rectilíneo uniformemente variado

Simplifiquemos las cosas un poco y pensemos que el cuerpo se mueve sólo en una dirección (en otras palabras se mueve en una línea). Por ejemplo si pensamos que todo el movimiento está en la dirección x ($y = z = cte$). Entonces,

$$\vec{r}(t) = x\hat{x}; \vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{x}; \vec{a}(t) = \frac{dv_x}{dt}\hat{x};$$

Como todo el movimiento está en una dirección podemos olvidarnos del carácter vectorial de la posición, la velocidad y la aceleración. Si además, la aceleración es constante, integrando las ecuaciones anteriores, obtenemos las famosas ecuaciones de MRUV que vamos a usar para resolver los ejercicios de esta clase:

$$a = cte \tag{1}$$
$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) \tag{2}$$
$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \tag{3}$$

Ejercicio 1

El móvil 1 parte de la ciudad A hacia la ciudad B (300 km)con velocidad constante $\vec{v_1}$. Un segundo móvil se mueve desde la ciudad B hacia A con velocidad $\vec{v_2}$ constante. El móvil 2 sale una hora antes que el móvil 1. El móvil 1 tarda 3hs 45min en hacer el recorrido mientras que el móvil 2 lo hace en 6 hs.

Lo primero que debemos hacer es elegir un sistema de referencia para poder describir el

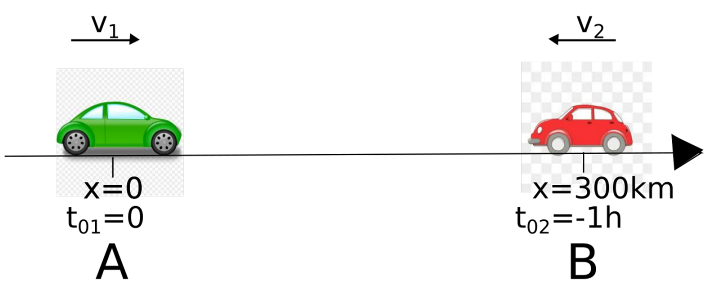

Figura 2: : Esquema ejercicio 1

movimiento. La Figura 2 muestra el sistema de referencia que elegí, todo el movimiento se da en la dirección horizontal que tiene su origen en la localidad A (x=0) y crece hacia la ciudad B (x=300km). Por lo tanto el móvil 1 aumentará su posición en el tiempo por lo que su velocidad será positiva mientras que el móvil 2 tendrá velocidad negativa. También es necesario que elijamos el 0 del tiempo (en qué momento prendemos el cronómetro), yo lo elegí en el momento que el móvil 1 sale de la ciudad A. Por eso, el móvil 1 empieza su movimiento en $t_{01} = 0$ mientras que el móvil 2 lo hace una hora antes $t_{02} = -1h$. Dado que ambos móviles se mueven con velocidad constante, o sea, $a = 0$, podemos escribir las ecuaciones horarias para cada uno según la ecuación (3):

$$x_1(t) = 0 + v_1(t - 0) \tag{4}$$

$$x_2(t) = 300km + v_2(t + 1h) \tag{5}$$

Considerando el tiempo que le lleva a cada móvil recorrer los 300km podemos calcular el módulo de las v_1 y v_2 reemplazando el las ecuaciones (4) y (5). De esta forma, tenemos que $\vec{v_1} = 80\frac{km}{h}\hat{x}$ mientras que $\vec{v_2} = -50\frac{km}{h}\hat{x}$. Con lo cual, las ecuaciones horarias quedan definidas como:

$$x_1(t) = 80\frac{km}{h}t \tag{6}$$

$$x_2(t) = 300km - 50\frac{km}{h}(t + 1h) \tag{7}$$

Para encontrar el lugar y momento de encuentro lo único que hay que hacer es igualar las ecuaciones (6) y (7). De esa forma queda,

$$80\frac{km}{h}t = 300km - 50\frac{km}{h}(t + 1h)$$

$$\boxed{\mathrm{t}_e = 1.92h = 2h55m12s}$$

$$\boxed{\mathrm{x}_e = 153.6km}$$

La Figura 3 muestra, a la izquierda, el gráfico de posición en función del tiempo para ambos móviles mostrando que las curvas se cruzan en el momento y lugar del encuentro. En el panel de la derecha de la Figura 3 están representadas las curvas de velocidad en función del tiempo que en este caso son constantes para ambos móviles. ¿Qué significa el área representada bajo

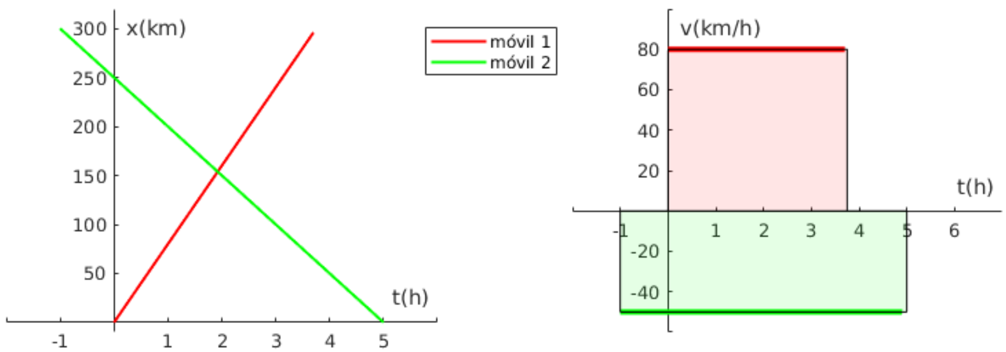

Figura 3: : Gráfico ejercicio 1

las curvas? Para calcular el área bajo una curva $(f(x))$ matemáticamente hay que integrar $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$. Usemos de ejemplo al móvil 1, el área bajo la curva se calcula como,

$$\int_{t=0}^{t=3.75} v_1 dt$$

Volviendo al principio de este apunte, la velocidad es la derivada de la posición $(v = \frac{dx}{dt})$. Por lo tanto, calcular el área bajo la curva de la velocidad no es otra cosas que la distancia recorrida por el móvil. Hagamos la integral, como v_1 es constante sale para afuera y usando la regla de Barrow queda:

$$\int_{t=0h}^{t=3.75h} v_1 dt = v_1.3.75h - v_1.0 = 300km$$

.

Ejercicio 3

En este ejercicio tenemos un móvil a parte de $x = 0$ a $t = 0$ con $v = 10\frac{m}{s}$ con aceleración constante de módulo $a = 1\frac{m}{s^2}$ y sentido contrario a la velocidad.

Empecemos desde el principio, proponiendo un sistema de referencia, Figura 4. Eligiendo

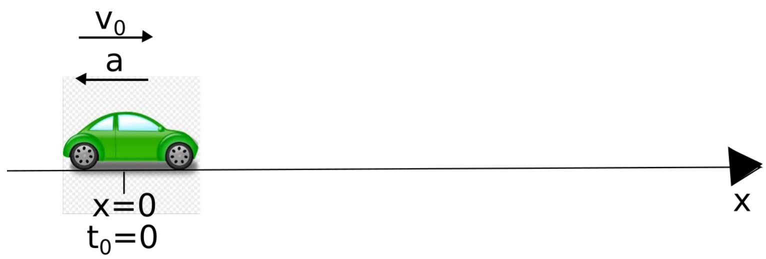

Figura 4: : Esquema ejercicio 3

este sistema de referencia la velocidad inicial resulta positiva $\vec{v_0} = 10\frac{m}{s}\hat{x}$ y la aceleración negativa $\vec{a} = -1\frac{m}{s^2}\hat{x}$.Teniendo en cuenta esto, podemos inferir cómo va a ser el movimiento del auto: va a ir avanzando en el sentido de las x positivas pero bajando su velocidad hasta detenerse ($v = 0$) donde comenzará a retroceder. Ahora vamos a escribir las ecuaciones de la posición y de la velocidad basados en las ecuaciones (3) y (2), respectivamente:

$$x(t) = 0 + 10\frac{m}{s}(t-0) - \frac{1}{2}.1\frac{m}{s^2}(t-0)^2 \tag{8}$$

$$v(t) = 10\frac{m}{s} - 1\frac{m}{s}(t-0) \tag{9}$$

A partir de las ecuaciones (8) y (9) podemos representar la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo, Figura 5. Del panel de la izquierda (x vs t) podemos ver que el auto llegará a una distancia máxima y luego volverá, pasando por el origen para luego alejarse en el sentido contrario al inicial. Por su parte la velocidad, panel central, disminuirá hasta convertirse en negativa. Finalmente, la aceleración se mantendrá constante para todo tiempo, panel de la derecha. De los gráficos de la Figura 5 puede verse que la distancia máxima se alcanza a $t = 10s$ en el mismo momento que la $v = 0$ como habíamos dicho previamente.

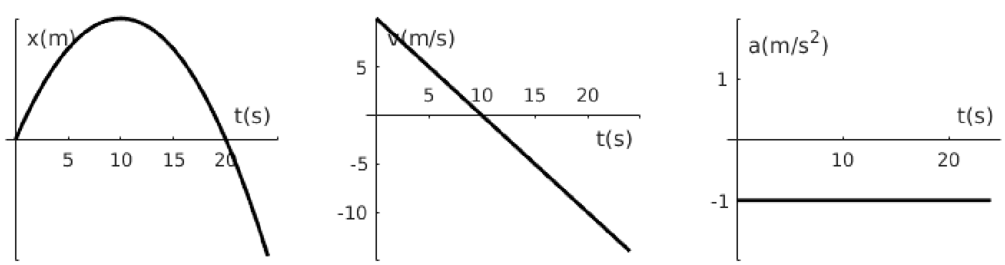

Figura 5: : Gráficos del ejercicio 3

De las ecuaciones (9) podemos encontrar el momento donde la velocidad se anula:

$$0 = 10\frac{m}{s} - 1\frac{m}{s}t$$

Por lo que obtenemos

$$\boxed{\text{t=10s}}$$

Para calcular el lugar, reemplazamos el tiempo obtenido en la ecuación (8)

$$x = 10\frac{m}{s} * 10s - 0.5\frac{m}{s^2}(10s)$$

siendo

$$\boxed{\text{x=50m}}$$

Ejercicio 6

Se lanza una pelota desde el piso hacia arriba y un segundo más tarde se deja caer otra pelota desde una altura de 15m.

Este problema es la mezcla de los dos problemas anteriores, un problema de encuentro pero moviéndose con aceleración constante, la aceleración de la gravedad (vamos a considerar $|g| = 10\frac{m}{s}$). Como siempre, para empezar cualquier ejercicio necesitamos plantear el sistema de referencia, Figura 6. En este caso el movimiento es en una única dirección, la vertical, y por costumbre la vamos a llamar y. Prendemos el cronómetro cuando sale la pelota que está en el piso.

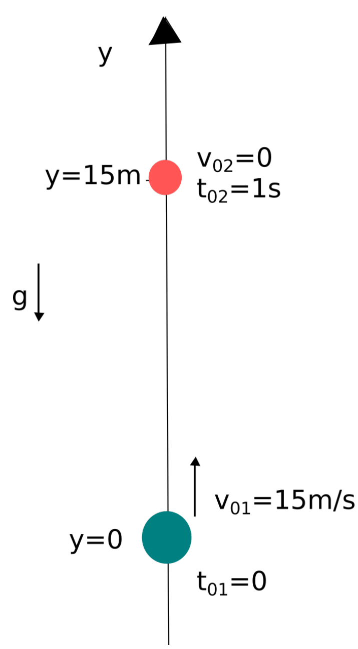

Figura 6: : Esquema ejercicio 6

A partir del sistema de referencia y el origen del tiempo podemos escribir las ecuaciones horarias para ambas pelotas quedando:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 15\frac{m}{s}t + \frac{1}{2}.(-10)\frac{m}{s^2}t^2 \\ v_1(t) &= 15\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}t \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= 15m + \frac{1}{2}.(-10)\frac{m}{s^2}(t-1s)^2 \\ v_2(t) &= -10\frac{m}{s^2}(t-1s) \end{aligned} \tag{11}$$

Igualando las expresiones $y_1 = y_2$ de las ecuaciones (10) y (11) obtenemos:

$$\boxed{\text{t=2s}}$$