Clase n° 2: Cinemática por integración 1D y 2D (21/04/2020)

Mecánica y Termodinámica - Prof: P. Balenzuela - JTPs: L. Bavassi y P. Mauas

---

En la clase de hoy abordaremos los siguientes temas:

- **Resolución de ejercicios de cinemática en 1D por integración y derivación.**
- **Resolución de ejercicios de cinemática en 2D (integración y derivación).**

La idea es repasar la metodología y la notación para la resolución de problemas de cinemática en 1D y 2D (entre ellos, problemas de tiro oblicuo, caída libre, tiro vertical, encuentro, etc.), que incluyen derivación e integración.

Con lo que veamos hoy tendrían que poder enfrentarse (aunque seguiremos practicando parte de la clase que viene) los ejercicios del 8 al 12 de la guía 1 de cinemática y, opcionalmente, los optativos.

Los problemas que venimos resolviendo hasta ahora son en una dimensión (una sola coordenada alcanza para describir el movimiento) y de tipo:

i) MRU, es decir con aceleración nula, velocidad constante $v = v_0$ y posición $x(t) = x_0 \ + \ v \ (t - t_0)$.

ii) MRUV, es decir con aceleración constante $a = a_0$, velocidad $v(t) = v_0 \ + \ a \ (t - t_0)$ y posición $x(t) = x_0 \ + \ v_0 \ (t - t_0) \ + \ \frac{a}{2} \ (t - t_0)^2$.

Estos dos movimientos son casos muy particulares. ¿Qué pasa cuando la aceleración no es nula ni constante, es decir que cambia en el tiempo? En esos casos (¡que van a ser los más frecuentes de ahora en más!) no contamos con fórmulas específicas que podamos aprender de memoria (ya que la aceleración puede ser cualquier función del tiempo) y debemos resolverlos por integración.

Repasemos: Sabemos que $a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$. Si me dan la función velocidad en función del tiempo, para obtener la aceleración debo derivar la velocidad con respecto al tiempo. Al revés, si me dan la aceleración, debo integrarla en el tiempo para encontrar la velocidad en función del tiempo. A su vez, la velocidad es $v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$. Por lo tanto, teniendo la velocidad en función del tiempo, debo integrarla para encontrar la función posición $x(t)$. Si en cambio tengo la posición en función del tiempo y quiero hallar la velocidad, debo derivar la primera respecto al tiempo. Recuerde que cada vez que integro aparece una constante que debo fijar a partir de algún dato de condición inicial.

Planteemos como ejemplo el problema 5 de la guía.

1 Problema 5 (Cinemática 1D por derivación e integración)

La aceleración de una partícula que se mueve sobre una trayectoria recta está dada por $a(t) = -2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4}) \ t^2$.

a) Encuentre la velocidad y la posición en función del tiempo sabiendo que $x(0) = 0$ *y* $v(0) = 10\mathrm{m/s}$.

b) Calcule la posición y velocidad de la partícula en $t = 3\mathrm{s}$.

Para encontrar la velocidad integramos la aceleración:

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \ = \ -2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4}) \ t^2 \Rightarrow \int \mathrm{d}v = \int -2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4}) \ t^2 \ \mathrm{d}t \ . \tag{1}$$

En este caso, vamos a integrar entre el instante inicial ($t_0 = 0$) en el cual la partícula tenía velocidad $v(t_0 = 0)$ y un tiempo t genérico[1], al cual corresponde una velocidad $v(t)$.

[1] Este tiempo al final puede ser 1 s, 2 s, 10000 s,... queremos poder evaluar la velocidad en cualquiera de ellos al terminar el ejercicio, por eso lo dejamos escrito como t.

Nota: Para no confundir la variable en la cual integramos y el tiempo final t, vamos a llamar a la variable de integración $\tilde{t}$. Lo mismo vamos a hacer con la velocidad[2]. Si este paso lo confunde más, y por el contrario no le molesta que el límite de la integral y la variable se llamen igual, siéntase libre de ignorarlo.

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \mathrm{d}\tilde{v} = \int_{t_0}^{t} -2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4})\ \tilde{t}^2\ \mathrm{d}\tilde{t} \tag{2}$$

Además note que $\int_{v(0)}^{v(t)} \mathrm{d}\tilde{v} = \int_{v(0)}^{v(t)} 1\ \mathrm{d}\tilde{v}$ y que en la igualdad de la derecha $-2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4})$ es una constante multiplicativa independiente del tiempo y por ende puede salir de la integral, por lo tanto $\int_{t_0}^{t} -2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4})\ \tilde{t}^2\ \mathrm{d}\tilde{t} = -2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4})\ \int_{t_0}^{t} \tilde{t}^2\ \mathrm{d}\tilde{t}$. Integramos a ambos lados del igual y evaluamos en los límites de integración,

$$\begin{aligned} \tilde{v}\Big|_{v(0)}^{v(t)} &= -2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4})\ (\frac{\tilde{t}^3}{3})\Big|_0^t \text{ (regla de Barrow)} && (3)\\ v(t) - v(0) &= -2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4})\ \frac{t^3}{3}\ . && (4)\end{aligned}$$

Entonces,

$$v(t) = v(0) - 2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4})\ \frac{t^3}{3} = \boxed{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ -\ \frac{2}{3}(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4})\ t^3} \tag{5}$$

Esta es la velocidad en función del tiempo. Note que al reemplazar t por un valor en segundos, las unidades de ambos términos de la velocidad resultan m/s, que son unidades de velocidad. ¡Este chequeo resulta fundamental siempre! Si esto no ocurre, podría ser que se haya cometido un error en la integración. Por otro lado, recuerde comprobar que si deriva la expresión de la velocidad que obtuvo, pueda recuperar la expresión original de la aceleración.

A continuación, averiguaremos la posición. Análogamente,

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\ =\ 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ -\ 2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4})\ \frac{t^3}{3} \Rightarrow \int \mathrm{d}x = \int \left(10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ -\ 2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4})\ \frac{t^3}{3}\right) \mathrm{d}t = \int (10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})\mathrm{d}t\ - \int\ 2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4})\ \frac{t^3}{3}\mathrm{d}t\ . \tag{6}$$

Sacando de las integrales las constantes multipliativas independientes del tiempo vemos que únicamente debemos calcular $\int 1\mathrm{d}t$ y $\int t^3\mathrm{d}t$. Con respecto a los límites de integración, nuevamente integraremos entre $t = 0$, instante en el que la partícula se encontraba en la posición $x(0)$ y un tiempo final que llamaremos t, en el cual la partícula se ubica en $x(t)$. Llamando a las variables de integración $\tilde{t}$ y $\tilde{x}$ respectivamente, resulta:

$$\begin{aligned} \int_{x(0)}^{x(t)} \mathrm{d}\tilde{x} &= (10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}) \int_0^t \mathrm{d}\tilde{t}\ -\ \frac{2}{3}(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4}) \int_0^t\ \tilde{t}^3\mathrm{d}\tilde{t} && (7)\\ \tilde{x}\Big|_{x(0)}^{x(t)} &= (10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}) \left(\tilde{t}\Big|_0^t\right)\ -\ \frac{2}{3}(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4})\ \left(\frac{\tilde{t}^4}{4}\Big|_0^t\right) && (8)\\ x(t) - x(0) &= (10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})t - (\frac{2}{3*4}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4})t^4 && (9)\end{aligned}$$

Entonces,

$$x(t) = x(0) +\ (10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})t - (\frac{1}{6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4})t^4\ = \boxed{(10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})t\ -\ (\frac{1}{6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4})t^4}\ . \tag{10}$$

La expresión anterior nos da la posición de la partícula a tiempo t. Nuevamente, verificamos con éxito que las unidades de ambos términos al evaluar t en segundos son metros. Además, si la derivamos respecto a t, recuperamos la dependencia temporal de la velocidad de la cual partimos.

Para resolver el ítem b) simplemente evaluamos ambas expesiones en el tiempo que pide el enunciado, $t = 3$s. De la ec. (5) vemos que la velocidad de la partícula es $\boxed{\text{v(t=3 s) = - 8 m/s}}$, y de la ec. (10) vemos que la partícula se encuentra en $\boxed{\text{x(t=3 s) = 16.5 m}}$.

Observación: Note que para averiguar la velocidad en $t = 3$s podríamos haber integrado la aceleración directamente entre $t = 0$s y $t = 3$s, y hubiéramos obtenido el mismo resultado. ¡Pero eso implicaría tener que repetir la integral para cada instante de tiempo en que se quiere conocer la velocidad! De ahí la utilidad de integrar entre $t = 0$ y un tiempo final genérico t. Lo mismo ocurre para la posición.

Nota: Asegúrese de comprender (y en caso contrario repasar, estudiar y/o preguntar) todos los pasos para resolver la integración (al menos de este tipo de funciones) correctamente, ya que de ahora en más no se realizarán todas las integrales en detalle y tendremos que estar cancheros para seguir construyendo el conocimiento.

[2]El resultado de la integral definida da lo mismo aunque cambie el nombre de la variable de integración, ya que este es sólo una etiqueta.

Ahora bien, ¿qué pasaría si para describir el movimiento de un objeto necesitara de dos coordenadas (movimiento 2D)? Supongamos que para describir el movimiento de una partícula utilizamos dos coordenadas: x e y. En este caso, para describir la posición necesito escribir un vector $\vec{r}$ con dos componentes, $x(t)$ e $y(t)$.

$$\vec{r}(t) = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}\ , \tag{11}$$

donde $\hat{x}$ y $\hat{y}$ son vectores de módulo 1 (versores) y apuntan en las direcciones x e y respectivamente. Las últimas dos expresiones son dos formas de notación vectorial equivalentes (¡asegúrese de comprender ambas!)

La velocidad también es un vector con dos componentes:

$$\vec{v}(t) = \mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = (v_x(t), v_y(t)) = v_x(t)\hat{x} + v_y(t)\hat{y} \tag{12}$$

donde $\boxed{v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}}$ y $\boxed{v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}}$.

De forma análoga, la aceleración:

$$\vec{a}(t) = \mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = (a_x(t), a_y(t)) = a_x(t)\hat{x} + a_y(t)\hat{y} \tag{13}$$

donde $\boxed{a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t}}$ y $\boxed{a_y(t) = \frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t}}$.

Observación: Note que los vectores se suelen indicar con una pequeña flecha o bien en letra negrita. ¡Lea con atención las líneas anteriores para asegurarse de comprender y luego poder usar correctamente la notación!

Nota: A las funciones que describen la evolución de la posición en función del tiempo (en este caso $x(t)$ e $y(t)$) les llamamos *ecuaciones horarias*; mientras que se llama *ecuación de la trayectoria* a la función que relaciona las coordenadas entre sí, es decir $y(x)$. Por ahora no se preocupe demasiado por esto, ya lo veremos en los ejemplos, pero note que hay una diferencia.

Resolvamos el ejercicio 9. A pesar de que le parezca aburrido, es importante que dedique un buen tiempo a comprender y estar seguro de poder reproducir las cuentas y la notación. ¡Ese es el objetivo!

2 Problema 9 (Cinemática 2D por derivación e integración)

Un coche viaja a lo largo de una curva sobre un plano. Sus coordenadas cartesianas en función del tiempo están dadas por las ecuaciones: $x(t) = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}t^3 - 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t^2$, $y(t) = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t^2 - 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t + 1\mathrm{m}$. *Halle:*

(a) La posición del coche en $t = 1$ segundo.

(b) Los vectores $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$.

(c) Los instantes en que $\mathbf{v} = 0$.

(a) En este caso, la posición del coche en función del tiempo está dada por el vector:

$$\mathbf{r}(t) = \vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = \left(2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}t^3 - 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t^2\ ,\ 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t^2 - 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t + 1\mathrm{m}\right) \tag{14}$$

$$= (2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}t^3 - 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t^2)\ \hat{x}\ +\ (1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t^2 - 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t + 1\mathrm{m})\ \hat{y}\ . \tag{15}$$

En particular, para $t = 1$ s la posición es:

$$\vec{r}(1\ \mathrm{s}) = \mathbf{r}(1\ \mathrm{s}) = (x(1\ \mathrm{s}), y(1\ \mathrm{s})) = \left(2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}(1\ \mathrm{s})^3 - 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(1\ \mathrm{s})^2\ ,\ 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}(1\ \mathrm{s})^2 - 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}(1\ \mathrm{s}) + 1\ \mathrm{m}\right) \tag{16}$$

$$= \boxed{(-1\ \mathrm{m}, 0\ \mathrm{m})} \tag{17}$$

$$= \boxed{-1\ \mathrm{m}\ \hat{x}}\ . \tag{18}$$

(b) La velocidad del coche en función del tiempo es la derivada de la posición respecto al tiempo, es decir:

$$\mathbf{v}(t) = \vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t), y(t)) = (\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}) = (v_x(t), v_y(t)) \tag{19}$$

$$= \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\ \hat{x}\ +\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\ \hat{y} = v_x(t)\ \hat{x} + v_y(t)\ \hat{y}\ . \tag{20}$$

Por lo tanto, calculamos las componentes de la velocidad v_x y v_y derivando $x(t)$ e $y(t)$ respecto al tiempo respectivamente y luego construimos el vector velocidad.

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = 6(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3})t^2 - 6(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})t \tag{21}$$

$$v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})t - 2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})\ . \tag{22}$$

Entonces, la velocidad resulta:

$$\vec{v}(t) = \mathbf{v}(t) = \boxed{\Big(6(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3})t^2 - 6(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})t\ ,\ 2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})t - 2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})\Big)} \tag{23}$$

$$= \boxed{\Big(6(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3})t^2 - 6(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})t\ \Big)\ \hat{x}\ +\ \Big(2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})t - 2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})\Big)\ \hat{y}}\ . \tag{24}$$

Note que si se pide la velocidad del coche la respuesta debe ser vectorial, ya que la velocidad es un vector (es decir que no alcanza con dejar escritas las componentes por separado).

La aceleración es la derivada de la velocidad, es decir:

$$\mathbf{a}(t) = \vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x(t), v_y(t)) = (\frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t}) = (a_x(t), a_y(t)) \tag{25}$$

$$= \frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t}\ \hat{x}\ +\ \frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t}\ \hat{y} = a_x(t)\ \hat{x} + a_y(t)\ \hat{y}\ . \tag{26}$$

Si derivamos la velocidad respecto al tiempo componente a componente, obtenemos:

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_x(t) = 12(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3})t - 6(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}) \tag{27}$$

$$a_y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_y(t) = 2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})\ . \tag{28}$$

La aceleración entonces resulta:

$$\vec{a}(t) = \mathbf{a}(t) = \boxed{\Big(12(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3})t - 6(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})\ ,\ 2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})\Big)} \tag{29}$$

$$= \boxed{\Big(12(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3})t - 6(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})\Big)\ \hat{x}\ +\ \Big(2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})\Big)\ \hat{y}}\ . \tag{30}$$

(Nuevamente, y por más que le resulte aburrido, asegúrese de comprender cada paso de la notación ya que de ahora en adelante usaremos distintas notaciones de manera indistinta sin dar mayores detalles. ¡Y recuerde corroborar las unidades!).

c) A continuación nos piden encontrar los instantes en los que la velocidad se anula, es decir, $\mathbf{v} = \vec{v} = 0$. Para que la velocidad sea cero, ambas componentes deben serlo. Busquemos en principio los instantes t^* en los que la componente x de la velocidad es nula, es decir,

$$v_x(t^*) = 0 = 6(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3})t^{*2} - 6(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})t^* = t^* \cdot\ (6(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3})t^* - 6(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}))\ . \tag{31}$$

Esta ecuación cuadrática tiene dos soluciones $t^* = 0$ y $t^* = 1$s. Sin embargo, estos instantes sólo serían solución del ejercicio si la velocidad en la componente y también fuese cero. En $t^* = 0$, $v_y(t^*) = 2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})(0\ \mathrm{s}) - 2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}) = -2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})$. Es decir que $t^* = 0$ no es solución. En $t^* = 1$, $v_y(t^*) = 2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})(1\ \mathrm{s}) - 2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}) = 0$. Esto significa que el único instante en que $\mathbf{v}(t) = \vec{v}(t) = 0$, es decir que ambas componentes de la velocidad se anulan, es $\boxed{\text{t=1 s}}$.

3 Problema 10 (Cinemática 2D)

Una avioneta vuela horizontalmente a 1000m de altura y deja caer un paquete. Este golpea el suelo 500m más adelante del lugar donde fue arrojado. Calcule la velocidad del avión y a qué altura está el paquete cuando avanzó 100m en la dirección horizontal.

En primer lugar definamos un sistema de coordenadas cartesianas. En particular podemos ubicar el eje x en la dirección en la que vuela el avión (con igual sentido), y el origen de coordenadas sobre el suelo alineado con el punto en el que se suelta el paquete. De este modo, el paquete se suelta a $t_0 = 0$ desde el punto $(x_0, y_0) = (0, h) = (0, 1000 \text{ m})$. A continuación, dado que vamos a estudiar el movimiento del paquete, intentemos focalizarnos únicamente en este. ¿Cuál es su velocidad inicial? ¿En qué dirección? Pues bien, dado que el paquete "se deja caer" desde la nave, su velocidad inicial (a la que llamaremos $\vec{v_0}$) en el instante en el que se separan, es la misma que la del avión ($\vec{v_a} = v_a\ \hat{x}$, con $v_a > 0$). Dicho en otras palabras, observe que hasta el instante en el que se suelta, el paquete no se mueve respecto a la aeronave. Esto implica que la velocidad inicial de la caja tiene únicamente componente en el eje x y que $\vec{v_0} = (v_a, 0)$, donde v_a es la rapidez con la que se mueve el avión. Cualitativamente, ¿cómo esperamos entonces que sea el movimiento? Trate de pensar, a partir de su experiencia, cómo es el movimiento de un cuerpo que se arroja desde cierta altura con velocidad paralela al piso (despreciando el rozamiento con el aire). En la Fig. 1 se muestra un esquema del problema.

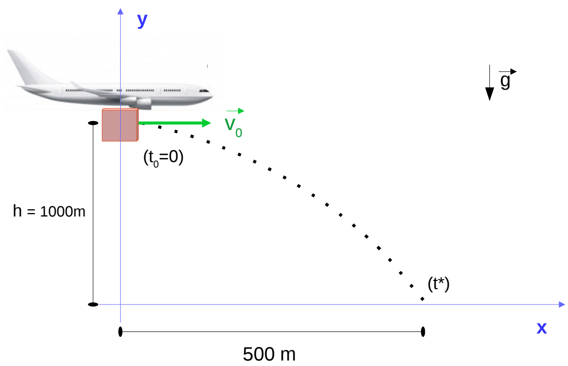

Figure 1: Esquema del problema 10. Sistema de coordenadas y posición inicial del paquete $(x_0, y_0) = (0, h)$ con $h = 1000$ m, a tiempo $t_0 = 0$. En línea punteada se esboza su trayectoria esperada. Sabemos que 500 m más adelante toca el suelo, a tiempo t^*.(Dato: $|\vec{g}| = g = 10 \text{ m/s}^2$)

Para encarar la resolución y dados los datos del problema, es necesario que intentemos construir las ecuaciones que describen el movimiento del paquete para poder despejar su velocidad inicial, poniendo condiciones sobre su posición al final del recorrido. Comencemos por la aceleración, e integremos dos veces para poder obtener la posición $\vec{r}(t)$.

Considerando el sistema de coordenadas elegido:

$$a_x(t) = 0 \tag{32}$$

$$a_y(t) = -g \Rightarrow \vec{a}(t) = (0, -10\ (\text{m/s}^2))\ . \tag{33}$$

Sabemos que $a_x = \frac{\text{d}}{\text{dt}} v_x(t) = 0$ y $a_y = \frac{\text{d}}{\text{dt}} v_y(t) = -g$. Por lo tanto, integrando entre $t_0 = 0$ y t final ambas expresiones en el tiempo (como hicimos en los ejercicios anteriores), usando que $v_x(t = t_0) = v_a$ y $v_y(t = t_0) = 0$, obtenemos:

$$v_x(t) = v_x(t = t_0) = v_a \tag{34}$$

$$v_y(t) = v_y(t = t_0) - g(t - t_0) = -10\ (\text{m/s}^2)\ t \Rightarrow \vec{v}(t) = (v_a, -10\ (\text{m/s}^2)t)\ . \tag{35}$$

Ahora bien, $v_x = \frac{\text{d}}{\text{dt}} x(t) = v_a$ y $v_y = \frac{\text{d}}{\text{dt}} y(t) = -10\ (\text{m/s}^2)t$. Si integramos las componentes x e y de la velocidad en el tiempo, y usando que $x(t = t_0) = 0$ e $y(t = t_0) = 1000$ m, obtenemos:

$$x(t) = x(t = t_0) + v_a(t - t_0) = v_a\ t \tag{36}$$

$$y(t) = y(t = t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2 = 1000 \text{ m} - 10\ (\text{m/s}^2)\ \frac{t^2}{2} = 1000 \text{ m} - 5\ (\text{m/s}^2)\ t^2\ . \tag{37}$$

Observe que, como esperábamos, dado que $v_x(t) = v_a$ es una constante positiva (que aún desconocemos), $x(t)$ es una función lineal creciente de t; mientras tanto, el movimiento en y es acelerado, la función $y(t)$ es cuadrática y decrece en el tiempo. De alguna manera, podemos decir que el movimiento del paquete es una combinación de un MRU en x y un MRUV en y.

Ahora sí estamos en condiciones de comenzar a utilizar los datos para averiguar v_a. Sabemos que cuando el paquete llega al suelo en el tiempo t^*, $y(t^*) = 0$ y $x(t^*) = 500$m. Dado que conocemos perfectamente la función que relaciona la coordenada y con el tiempo, utilizando la primer igualdad podemos despejar t^* y luego reemplazando en la segunda, averiguar v_a. Así:

$$y(t^*) \;=\; 0 \;=\; 1000 \text{ m} \;-\; 5 \text{ (m/s}^2) \; t^{*2} \Rightarrow t^* = 14,14 \text{ s} \tag{38}$$

$$x(t^*) \;=\; 500 \text{ m} \;=\; v_a \; t^* = v_a \; (14,14 \text{ s}) \Rightarrow \boxed{v_a = 35,36 \text{ m/s}} \; . \tag{39}$$

Habiendo resuelto la primer consigna del ejercicio, ahora sí podemos escribir la posición del paquete en función del tiempo y los datos del problema. Las ecuaciones que describen la evolución de las coordenadas x e y en función del tiempo resultan:

$$x(t) \;=\; (35,36 \text{ m/s}) \; t \tag{40}$$

$$y(t) \;=\; 1000 \text{ m} \;-\; 5 \text{ (m/s}^2) \; t^2 \; . \tag{41}$$

¿Cómo son estas funciones de t? En la Fig. 2 se grafican las coordenadas del paquete en función del tiempo.

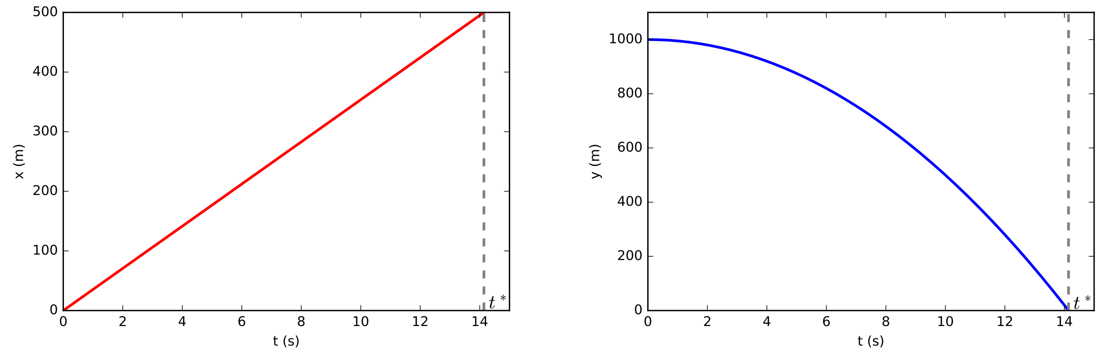

Figure 2: Coordenadas x (izquierda) e y (derecha) del paquete del problema 10 en función del tiempo. En línea punteada se indica el tiempo t^* en el cual el paquete llega al suelo.

Así, la posición del paquete en función del tiempo es:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = \big(35,36 \text{ (m/s)} \; t \; , \; 1000 \text{ m} \;-\; 5 \text{ (m/s}^2) \; t^2\big) \; . \tag{42}$$

La siguiente consigna del enunciado es averiguar la altura del paquete cuando éste recorrió 100 m en el eje x respecto a la posición inicial. ¿Qué se le ocurre hacer? Piénselo. Lo que podemos hacer es buscar a partir de la expresión de la ec. (40) para $x(t)$, el tiempo en el cual el paquete avanzó 100 m y luego reemplazar dicho valor de t en la expresión de $y(t)$ (ec. (41)). Esta manera de resolución es perfectamente válida. La segunda opción, totalmente análoga a la primera, es hacer la misma cuenta pero para un t general, es decir encontrar la función $y(x)$ e "independizarnos " de la variable temporal. Para ello podemos despejar t de la ecuación de $x(t)$:

$$x(t) = v_a t \Rightarrow t = x/v_a \; , \tag{43}$$

Y luego reemplazar t en la ecuación de $y(t)$:

$$y(t) = 1000 \text{ m} \;-\; 5 \text{ (m/s}^2) \; t^2 = 1000 \text{ m} \;-\; 5 \text{ (m/s}^2) \; (\frac{x}{v_a})^2 \; . \tag{44}$$

De esta manera obtengo (¡chequee las unidades!):

$$y(x) = 1000 \text{ m} \;-\; \frac{5 \text{ m/s}^2}{(35,36 \text{ m/s})^2} \; x^2 \; . \tag{45}$$

Esta es la llamada *ecuación de la trayectoria* y representa el "camino " del paquete en el espacio, su recorrido en el plano (x, y). Dicho de otro modo, si pudiéramos unir con una línea imaginaria los puntos del espacio que recorrió el paquete en el plano (x, y) (la línea punteada de la Fig. 1), obtendríamos una función con esta forma. A partir de ella podemos calcular en particular, $y(x = 100 \text{ m}) \approx \boxed{960 \text{ m}}$. En la Fig. 3 se muestra un gráfico de la trayectoria resultante.
Nota: No siempre es conveniente despejar la ecuación de la trayectoria, ya que su dificultad depende de las formas funcionales de $x(t)$ e $y(t)$. La sugerencia es que, a menos que se pida explícitamente, en futuros problemas analice esto antes de comenzar a hacer las cuentas a ciegas.

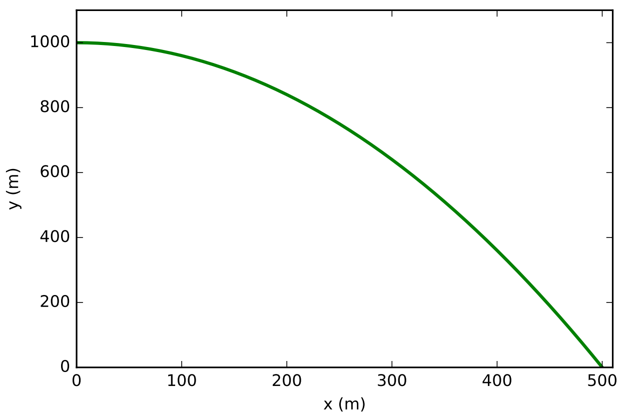

Figure 3: Trayectoria del paquete del problema 10.