¡Hola a todxs! La clase de hoy tiene dos partes. En la primera vamos a seguir estudiando cinemática y vamos a resolver los ejercicios 8 (3D) y 11 (2D). En la segunda parte vamos a estudiar el movimiento relativo, haciendo el ejercicio 13. Cuando hayan leído y entendido este apunte, van a estar en condiciones de terminar la Guía 1. (Los ejericicios 13 y 14 corresponden a movimiento relativo).

Cinemática 2D y 3D

Como ya vimos en clases anteriores, podemos describir —en el caso general— la posición de una partícula en base a su *vector posición*[1] $\mathbf{r}(t)$, tal que

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathrm{x}} + y(t)\hat{\mathrm{y}} + z(t)\hat{\mathrm{z}},$$

donde tenemos una función posición por cada coordenada del espacio.

El *vector velocidad* y el *vector aceleración* de una partícula se obtienen derivando con respecto al tiempo el vector posición, es decir $\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$ y $\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$. Tenemos la suerte de que el sistema de coordenadas cartesiano —que es el que vamos a estar utilizando nosotros— nos permite derivar dentro de los vectores sin mayor preocupación. Esto quiere decir que

$$\mathbf{v}(t) = v_x(t)\hat{\mathrm{x}} + v_y(t)\hat{\mathrm{y}} + v_z(t)\hat{\mathrm{z}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{\mathrm{y}} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{\mathrm{z}}, \tag{1}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t) = a_x(t)\hat{\mathrm{x}} + a_y(t)\hat{\mathrm{y}} + a_z(t)\hat{\mathrm{z}} &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{\mathrm{y}} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\hat{\mathrm{z}},\\ &= \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\hat{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\hat{\mathrm{y}} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\hat{\mathrm{z}}.\end{aligned}$$

Ejercicio 1.8

En este ejercicio tenemos una partícula en un espacio tridimensional cuyo vector posición (usamos la notación que está en la guía, con paréntesis y comas en lugar de versores) está dado por

$$\mathbf{r}(t) = \left(t^3 + 2t + 1, -e^{2t}, \cos(3t)\right).$$

Una aclaración antes de comenzar. Noten que si t es el tiempo, debe estar expresado en una unidad adecuada, por ejemplo segundo. Los argumentos de la

[1] Hay dos alternativas para escribir vectores. La primera es poner una flecha sobre la letra que lo representa y la otra es poner la letra en negrita. De aquí en adelante, todas las variables que estén en negrita representan vectores. Por supuesto, cuando ustedes resuelvan ejercicios en un cuaderno, les va a resultar más práctico utilizar la flecha.

función exponencial y del coseno deben ser adimensionales, es decir, no tener unidad. De esta forma, en el $2t$ que aparece en la exponencial, el 2 debe tener unidad $1/\mathrm{s}$ para que se cancele con la unidad de t. Lo mismo ocurre con el 3 que se encuentra en el coseno. Por otro lado, el vector posición debe tener unidad de longitud, por ejemplo metro. Debido a esto, los números que aparecen en el vector deben tener dimensiones adecuadas. Para darnos una idea, tomemos por ejemplo el término t^3 en el primer elemento del vector. Ya sabemos que t tiene unidad de segundo, por lo que t^3 tiene unidad de segundo al cubo. De esta forma, en lugar de t^3, deberíamos escribir $1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}t^3$, de forma que se cancelen las unidades de tiempo y quede el metro que es la correspondiente al vector posición. Sin embargo, no vamos a escribir las unidades todo el tiempo porque se va a hacer demasiado engorrosa la notación. Dicho esto, resolvamos el ejercicio.

En la parte **a)** se pide derivar el vector posición para hallar el vector velocidad de la partícula. Para esto, tenemos que usar la ecuación (1) y derivar cada término dentro del vector posición:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}, \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}\left(t^3+2t+1\right)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\left(-e^{2t}\right)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\left(\cos(3t)\right)}{\mathrm{d}t}\right), \\
&= \left(3t^2+2, -2e^{2t}, -3\sin(3t)\right).
\end{aligned}$$

(Recuerden la derivada de $\cos x$ es $-\sin x$).

Se pide también calcular la velocidad en $t = 0$ y en $t = \pi/6$. Para esto, sólo tenemos que reemplazar los valores y hacer la cuenta.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(0) &= (2, -2, 0)\ \mathrm{m/s}, \\
\mathbf{v}(\pi/6) &= \left(\pi^2/12 + 2, -2e^{\pi/3}, -3\right)\ \mathrm{m/s}.
\end{aligned}$$

En la parte **b)** tenemos que calcular el módulo del vector velocidad, es decir

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Notemos que al tomar el módulo nos quedamos con una función escalar, es decir, perdemos la característica vectorial de la velocidad. Hagamos la cuenta:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{v}(t)| &= \sqrt{\left(3t^2+2\right)^2 + \left(-2e^{2t}\right)^2 + \left(-3\sin(3t)\right)^2}, \\
&= \sqrt{9t^4 + 4 + 12t^2 + 4e^{4t} + 9\sin^2(3t)}.
\end{aligned}$$

Evaluando en los valores que se pide:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{v}(0)| &= \sqrt{8}\ \mathrm{m/s}, \\
|\mathbf{v}(\pi/6)| &= \sqrt{\pi^4/144 + 4 + \pi^2/3 + 4e^{2\pi/3} + 9}\ \mathrm{m/s}.
\end{aligned}$$

Finalmente, en **c)** se pide hallar la aceleración. Esto quiere decir que tenemos que derivar la velocidad con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(t) &= \left(\frac{\mathrm{d}\left(3t^2+2\right)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\left(-2e^{2t}\right)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\left(-3\sin(3t)\right)}{\mathrm{d}t} \right), \\
&= \left(6t, -4e^{2t}, -9\cos(3t)\right).
\end{aligned}$$

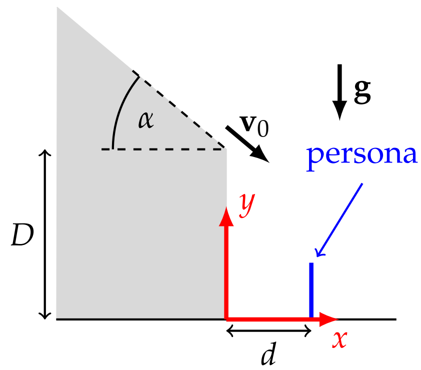
Evaluando en los valores pedidos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(0) &= (0, -4, -9)\ \mathrm{m/s^2}, \\
\mathbf{a}(\pi/6) &= \left(\pi, -4e^{\pi/3}, 0\right)\ \mathrm{m/s^2}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.11

Este ejercicio consiste en una bola de nieve que rueda por un techo inclinado hacia abajo en un ángulo α. Cuando se acaba el techo, la bola de nieve sale con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ y cae por acción de la gravedad. El techo del granero se encuentra a una altura D y una persona está parada a una distancia d del borde del granero.

Estos valores que en el párrafo anterior representamos con letras son datos del ejercicio. Sin embargo, no vamos a reemplazar los valores numéricos ahora así obtenemos expresiones generales. Esta forma de trabajar es usual en física y presenta la ventaja de que si queremos repetir la cuenta con otros números no es necesario calcular todo nuevamente. Al final de cada parte, para hallar lo que se pide, vamos a reemplazar los valores numéricos dados. Si a ustedes les resulta más cómodo, son libres de reemplazar los valores numéricos ahora.



a) En la primera parte se pide calcular la distancia entre el borde del granero y el lugar donde golpea la bola el piso. Para esto tenemos que hallar la posición de la bola de nieve en los ejes x e y en función del tiempo. Es decir, tenemos que hallar las funciones $x(t)$ e $y(t)$.

El único efecto que contribuye a la aceleración de la bola de nieve es la gravedad, que actúa hacia abajo en el eje y. Debido a esto, podemos escribir entonces que $a_x(t) = 0$ y $a_y(t) = -g$. Lo que tenemos entonces es un movimiento uniforme en el eje x y un movimiento con aceleración $-g$ en el eje y.

Analicemos en primer lugar en movimiento en el eje x. Como ya dijimos, no existe aceleración en esta dirección y, por lo tanto, la velocidad debe ser constante e igual a la inicial. Hagamos la cuenta prolija ya que vamos a repetirla luego:

$$\begin{aligned}
a_x(t) &= 0, \\
\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= 0, \\
\mathrm{d}v_x &= 0, \\
\int_{v_x(0)}^{v_x(t)} \mathrm{d}v_x &= 0, \\
v_x(t) - v_x(0) &= 0, \\
v_x(t) &= v_x(0).
\end{aligned}$$

Para calcular la velocidad inicial tenemos que descomponer el vector $\mathbf{v}_0$ y quedarnos con la parte en x. Haciendo esto queda

$$v_x(t) = v_0 \cos(\alpha) .$$

Hacemos este procedimiento nuevamente para hallar la posición:

$$\begin{aligned}
v_x(t) &= v_0 \cos(\alpha) , \\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v_0 \cos(\alpha) , \\
\mathrm{d}x &= v_0 \cos(\alpha) \,\mathrm{d}t, \\
\int_{x(0)}^{x(t)} \mathrm{d}x &= \int_0^t v_0 \cos(\alpha) \,\mathrm{d}t, \\
x(t) - x(0) &= v_0 \cos(\alpha)\, t, \\
x(t) &= v_0 \cos(\alpha)\, t.
\end{aligned}$$

En el último paso, $x(0) = 0$ porque el movimiento se inicia cuando la bola de nieve sale del techo y eso ocurre en el origen del eje x.

El eje y tiene la dificultad adicional de que presenta una aceleración. Sin embargo, el procedimiento es el mismo, integrar para hallar la velocidad y luego integrar para hallar la posición. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
a_y(t) &= -g, \\
\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -g, \\
\mathrm{d}v_y &= -g\mathrm{d}t, \\
\int_{v_y(0)}^{v_y(t)} \mathrm{d}v_y &= -g \int_0^t \mathrm{d}t, \\
v_y(t) - v_y(0) &= -gt, \\
v_y(t) &= v_y(0) - gt, \\
v_y(t) &= -v_0 \sin(\alpha) - gt.
\end{aligned}$$

Nuevamente descompusimos la velocidad inicial para hallar $v_y(0) = -v_0 \sin(\alpha)$. Integramos nuevamente para hallar la posición:

$$\begin{aligned}
v_y(t) &= -v_0 \sin(\alpha) - gt, \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -v_0 \sin(\alpha) - gt, \\
\mathrm{d}y &= (-v_0 \sin(\alpha) - gt)\, \mathrm{d}t, \\
\int_{y(0)}^{y(t)} \mathrm{d}y &= \int_0^t (-v_0 \sin(\alpha) - gt)\, \mathrm{d}t, \\
y(t) - y(0) &= -v_0 \sin(\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2, \\
y(t) &= D - v_0 \sin(\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2.
\end{aligned}$$

Noten que, por como elegimos los ejes, $y(0) = D$. Ya tenemos entonces las posiciones en ambos ejes en función del tiempo:

$$\begin{cases} x(t) &= v_0 \cos(\alpha)\, t, \\ y(t) &= D - v_0 \sin(\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

Reemplazando los valores numéricos que da el ejercicio ($v_0 = 7$ m/s, $\alpha = 40°$, $g = 10$ m/s^2 y $D = 14$ m), nos queda

$$\begin{cases} x(t) &= 5.36\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} t, \\ y(t) &= 14\ \mathrm{m} - 4.5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} t - 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} t^2. \end{cases}$$

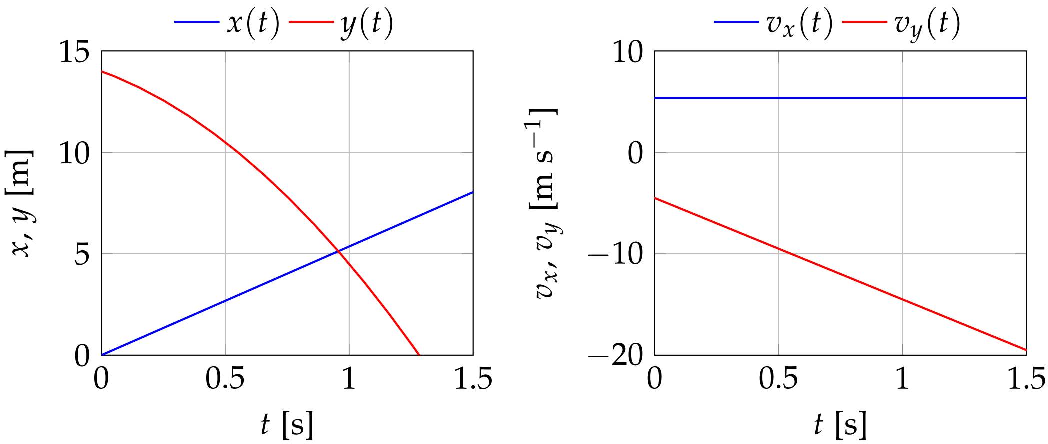
Ahora estamos en condiciones de calcular la distancia entre el granero y el punto donde la bola de nieve cae al suelo. Vamos a llamar T al tiempo en el cual $y(T) = 0$, es decir, el tiempo en el cual la bola de nieve llega al piso. T es solución de

$$D - v_0 \sin(\alpha)\, T - \frac{1}{2} g T^2 = 0.$$

Como la ecuación es cuadrática, existen dos soluciones:

$$T = \frac{v_0 \sin(\alpha) \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gD}}{-g}.$$

Reemplazando los valores numéricos que da el ejercicio, obtenemos un tiempo $T = 1.28$ s (la otra solución, negativa, la descartamos). La distancia al granero es entonces la posición en $x(t)$ evaluada en $t = T$, es decir, $x(T) = 6.86$ m.
b) Los gráficos de las posiciones y las velocidades se muestran a continuación.



c) En la parte final del ejercicio se nos pregunta lo siguiente: si la persona que está parada a una distancia $d = 4$ m del borde del granero tiene una altura de 1.9 m, ¿la va a golpear la bola de nieve? Para respondernos esto, tenemos que calcular la altura de la bola de nieve cuando se encuentra a 4 m del granero. Llamemos T' (para diferenciarlo de T, el tiempo en el cual la bola de nieve llega al piso) al tiempo en el cual que esto ocurre. Tenemos

$$x(T') = v_0 \cos(\alpha)\, T' = d \implies T' = \frac{d}{v_0 \cos(\alpha)}.$$

Esto da $T' = 0.75$ s, lo que quiere decir que a los 0.75 s la bola de nieve se encuentra a la misma distancia del granero que la persona. Para encontrar la altura, simplemente tenemos que reemplazar T' en $y(t)$:

$$y(T') = D - v_0 \sin(\alpha)\, T' - \frac{1}{2} g T'^2,$$
$$y(T') = D - d \tan(\alpha) - \frac{g d^2}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)}.$$

Esta cuenta termina dando una altura de 7.86 m, mayor a 1.9 m, que es lo que mide la persona. En conclusión, la bola de nieve no golpea a la persona.

Movimiento relativo

En los últimos ejercicios de la guía nos va a interesar describir el *movimiento relativo*, es decir, el movimiento de una partícula con respecto a otra que también se encuentra en movimiento. En estos casos, es útil la ecuación siguiente:

$$\mathbf{r}_{AC} = \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{BC}.$$

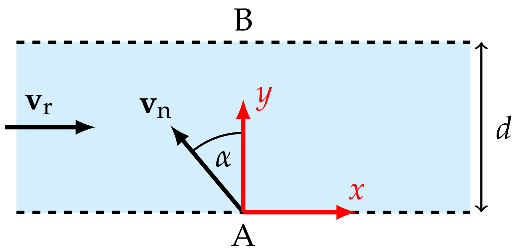
Lo que quiere decir esto es: "la posición del cuerpo A con respecto al cuerpo C es igual a la suma de la posición del A con respecto al B y la posición del B con respecto al C". Esta relación también es válida para la velocidad, es decir,

$$\mathbf{v}_{AC} = \mathbf{v}_{AB} + \mathbf{v}_{BC}, \tag{2}$$

y en ese caso se conoce como *transformación de Galileo*.

Ejercicio 1.13

El último ejercicio de la clase de hoy trata de movimiento relativo y consiste en un nadador que quiere cruzar un río que posee una corriente de agua. En la figura siguiente podemos ver un esquema del ejercicio, donde indicamos las velocidades (del nadador y del río), el ancho del río d y el sistema de ejes que vamos a usar.



Antes de comenzar el ejercicio, dejemos claro qué son estas velocidades. La costa del río está fija, por lo tanto podemos describir las velocidades con respecto a la misma. $\mathbf{v}_r$ es la velocidad de la corriente de agua con respecto a la costa y $\mathbf{v}_n$ es la velocidad del nadador (atentos acá) con respecto a la corriente. Lo que esto quiere decir es que cuando el nadador se tire al río, no sólo se va a mover con la velocidad con la que él es capaz de nadar, también se va a ver arrastrado por la corriente.

Para que esto quede un poco más claro, vamos a usar la ecuación (2):

$$\mathbf{v}_{nc} = \mathbf{v}_{nr} + \mathbf{v}_{rc}.$$

Esto se traduce como: "la velocidad del nadador con respecto a la costa es igual a la suma de la velocidad del nadador con respecto al río y la velocidad del río con respecto a la costa". Con la notación de la figura, $\mathbf{v}_{nr} = \mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_{rc} = \mathbf{v}_r$ y vamos a llamar $\mathbf{v}$ a la velocidad total del nadador (con respecto a la costa), es decir $\mathbf{v}_{\mathrm{nc}} = \mathbf{v}$. Así, nos queda

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathrm{n}} + \mathbf{v}_{\mathrm{r}}. \tag{3}$$

Esta ecuación es bastante intuitiva. Como les decía antes, si uno nada en un río, aparte de moverse debido a su velocidad, se va a ver arrastrado por la corriente de agua. Por eso ocurre que la velocidad total es la suma ambas. Para entenderlo mejor, pensemos un caso simple: si el río no tiene corriente ($\mathbf{v}_{\mathrm{r}} = 0$), la velocidad total del nadador es la velocidad con la que puede nadar ya que no se va a ver arrastrado por el agua.

Resolvamos ahora el ejercicio. La velocidad del río es un dato conocido, por lo que

$$\mathbf{v}_{\mathrm{r}} = v_{\mathrm{r}}\hat{\mathrm{x}},$$

donde $v_{\mathrm{r}} = 4$ km/h. La velocidad del nadador $\mathbf{v}_{\mathrm{n}}$ es desconocida, tanto en módulo como dirección, pero, de acuerdo con la figura, la podemos escribir como

$$\mathbf{v}_{\mathrm{n}} = -v_{\mathrm{n}} \sin(\alpha)\hat{\mathrm{x}} + v_{\mathrm{n}} \cos(\alpha)\hat{\mathrm{y}}.$$

De acuerdo con la ecuación (3), la velocidad total del nadador es

$$\mathbf{v} = (v_{\mathrm{r}} - v_{\mathrm{n}} \sin\alpha)\, \hat{\mathrm{x}} + v_{\mathrm{n}} \cos(\alpha)\hat{\mathrm{y}}.$$

a) En la primera parte se nos pide hallar tanto el módulo de la velocidad del nadador v_{n} como la dirección α. Para esto, contamos con dos datos.

El primer dato es que el movimiento debe ser en línea recta, saliendo del punto A y llegando al punto B. Para que esto sea posible, debe ocurre que la velocidad total del nadador no tenga componente en la dirección x —de otra forma, el nadador se desviaría hacia uno de los costados—. Para que esto se cumpla, debe ocurrir que

$$v_{\mathrm{r}} - v_{\mathrm{n}} \sin\alpha = 0 \implies v_{\mathrm{r}} = v_{\mathrm{n}} \sin\alpha.$$

El segundo dato es que el tiempo que tarda el nadador en cruzar el río de ancho $d = 40$ m es $T = 1$ min. Si se cumple la primera condición, la velocidad total del nadador sólo tiene componente en la dirección y y debe ser igual a la distancia que recorre divida por el tiempo que tarda en recorrerla:

$$\frac{d}{T} = v_{\mathrm{n}} \cos\alpha.$$

Tenemos entonces un sistema de dos incógnitas (v_{n} y α) y dos ecuaciones:

$$\begin{cases} v_{\mathrm{r}} = v_{\mathrm{n}} \sin\alpha, \\ \frac{d}{T} = v_{\mathrm{n}} \cos\alpha. \end{cases}$$

Este sistema es muy fácil de resolver. Noten que si dividimos la primera ecuación por la segunda nos queda

$$
\begin{aligned}
\frac{v_{\mathrm{r}}}{d/T} &= \frac{v_{\mathrm{n}} \sin \alpha}{v_{\mathrm{n}} \cos \alpha}, \\
\frac{v_{\mathrm{r}} T}{d} &= \tan \alpha.
\end{aligned}
$$

Con $v_{\mathrm{r}} = 4\ {}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$, $T = 1$ min y $d = 40$ m obtenemos $\alpha = 58.78°$. Si reemplazamos este valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema, obtenemos $v_{\mathrm{n}} = 4.67\ {}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{h}}$.
b) Supongamos ahora que la dirección α y la velocidad v_{n} no están fijas. Sigue valiendo de todas maneras que

$$
\mathbf{v} = (v_{\mathrm{r}} - v_{\mathrm{n}} \sin \alpha)\, \hat{\mathrm{x}} + v_{\mathrm{n}} \cos(\alpha) \hat{\mathrm{y}},
$$

y como aún queremos que el nadador atraviese el río en línea recta,

$$
v_{\mathrm{r}} - v_{\mathrm{n}} \sin \alpha = 0.
$$

Como dijimos antes, la velocidad del río es dato, pero ahora ni v_{n} ni α son conocidos. Sin embargo, ambos están relacionados por

$$
\sin \alpha = \frac{v_{\mathrm{r}}}{v_{\mathrm{n}}}.
$$

El seno es una función acotada: siempre es mayor (o igual) que -1 y menor (o igual) que 1. Como ambas velocidades son positivas, debe ocurrir entonces que

$$
\frac{v_{\mathrm{r}}}{v_{\mathrm{n}}} < 1 \implies v_{\mathrm{n}} > v_{\mathrm{r}},
$$

es decir, la velocidad del nadador con respecto al río debe ser mayor que la de la corriente. Noten que también deberíamos incluir el caso $v_{\mathrm{n}} = v_{\mathrm{r}}$. Sin embargo, esto implica que $\alpha = 90°$ y por lo tanto la velocidad v_y es nula, por lo que nunca podría cruzar el río. (Hagan la cuenta y verifiquenlo).