Mecánica y Termodinámica — 1^{er} cuatrimestre 2020

Profesor: Pablo Balenzuela — JTP: Pablo Mauas y Luz Bavassi

Clase $N°4$: Dinámica sin rozamiento

En la clase de hoy vamos a ver todo lo necesario para resolver la parte I de la guía 2, es decir, la parte de dinámica sin rozamiento (ejercicios 1 a 8). Primero vamos a hacer un repaso de los conceptos más importantes que vamos a necesitar y después vamos a resolver algunos ejercicios a modo de ejemplo.

Repaso

La dinámica, a diferencia de la cinemática, se encarga de estudiar las causas que provocan el movimiento de los cuerpos. Su objetivo es describir y cuantificar los factores capaces de producir movimiento en un sistema físico, para luego plantear las ecuaciones de movimiento de dicho sistema.

La ecuación más importante que vamos a usar es la dada por la **segunda ley de Newton**. Supongamos que sobre un cuerpo de masa m actúan n fuerzas $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, ..., \mathbf{F}_n)$. Vamos a llamar *fuerza neta* a la suma de todas las fuerzas. Esta fuerza neta va a producir un aceleración $\mathbf{a}$ sobre el cuerpo. La segunda ley de Newton nos dice lo siguiente:

$$\mathbf{F}_{neta} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = m\mathbf{a} \tag{1}$$

Fíjense que esta ecuación es vectorial y m es positivo. Entonces, la fuerza neta y la aceleración van a tener siempre la misma dirección y sentido. Para calcular la fuerza neta no hay que olvidarse que estoy sumando vectores, por lo tanto, tengo que sumar componente a componente. Por ejemplo, en un sistema de coordenadas cartesianas donde quiero sumar dos fuerzas, tengo que:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \{F_{1x}\hat{x} + F_{1y}\hat{y}\} + \{F_{2x}\hat{x} + F_{2y}\hat{y}\} = (F_{1x} + F_{2x})\hat{x} + (F_{1y} + F_{2y})\hat{y} \tag{2}$$

Ahora vamos a recordar de la guía de cinemática la relación que hay entre la posición $\mathbf{x}(t)$, la velocidad $\mathbf{v}(t)$ y la aceleración $\mathbf{a}(t)$:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \tag{3}$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} \tag{4}$$

Usando esto podemos reescribir la segunda ley de Newton de la siguiente manera:

$$\mathbf{F}_{neta} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = m\frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} \tag{5}$$

Esta es la ecuación diferencial que vamos a usar a lo largo de toda la guía, y se la conoce como **ecuación de movimiento**.

En este momento esta bueno notar que derivar un vector significa derivar cada una de sus componentes. A modo de ejemplo, la derivada de la velocidad es:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) \tag{6}$$

Ahora vamos a ver el caso particular en el que la fuerza neta es cero (esto **no** significa que necesariamente no hay fuerzas aplicadas sobre el cuerpo, sino que la suma de estas fuerzas es nula!). Reemplazando esto en la segunda ley de Newton obtenemos que $\mathbf{a} = 0$, lo cual implica que la velocidad es constante. Con esto concluimos que, si sobre un cuerpo la fuerza neta es nula, entonces este permanecerá en reposo ($\mathbf{v} = 0$) o en movimiento rectilíneo uniforme: MRU ($\mathbf{v} = constante$). Esto se conoce como **primera ley de Newton** o ley de inercia.

Lo último que vamos a ver en este repaso es la **tercera ley de Newton** o ley de acción y reacción. Esta ley dice que: Cuando dos cuerpos aislados interactúan entre sí, la fuerza sobre un cuerpo (acción) es igual y opuesta a la fuerza sobre el otro cuerpo (reacción). Para visualizar mejor esto veamos la figura 1.

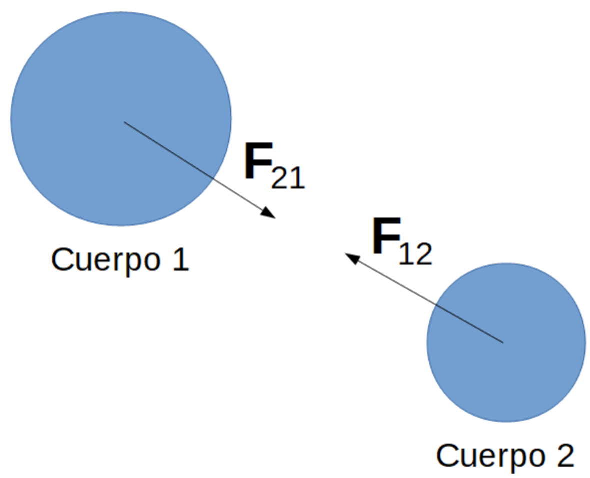

Figura 1: Fuerzas de Acción y Reacción.

La fuerza que el cuerpo 1 hace sobre el 2 se llama $\mathbf{F}_{12}$, y la fuerza que el 2 hace sobre el 1 es $\mathbf{F}_{21}$. Lo que nos dice la ley de acción y reacción es:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \tag{7}$$

Fíjense que esto implica que ambas fuerzas tienen el mismo módulo y la misma dirección pero sentido contrario. Algunos ejemplos de fuerza de acción y reacción son:

1. La fuerza de gravedad entre una manzana que cae y la tierra. Acá esta bueno notar que tanto la manzana como la tierra sienten una fuerza del mismo módulo, pero la aceleración de la manzana es mucho mayor que la aceleración de la tierra porque la masa de la primera es mucho menor que la de la segunda (ver segunda ley de Newton). Lo que quiero recalcar con esto es que la tierra también se acelera! Pero esta aceleración es tan chica que no la notamos.

2. La fuerza de apoyo (o fuerza normal, como la vamos a llamar) que existe cuando un objeto esta apoyado sobre una superficie. No solo el objeto siente la fuerza normal, sino que la superficie siente la reacción de esta fuerza.

Como conclusión, lo que nos dice la tercera ley de Newton es que las fuerzas siempre se dan de a pares. Por cada fuerza, va a haber una fuerza de reacción.

Ejercicio 4

Una persona esta parada sobre una balanza que se encuentra en un ascensor. Estando en reposo, la balanza indica un peso de $55kgf$.

Vamos a llamar B al valor que indica la balanza. El hecho de que estando en reposo $B = 55kgf$, implica que la persona tiene un peso de $55kgf$ y una masa $m = 55kg$. Acá estoy usando que la aceleración de la gravedad es $g = 10m/s^2$, que el peso es $P = mg$ y que $1kgf = 1kg \cdot g$.

El ejercicio nos plantea que veamos el valor B para distintas situaciones. Lo primero que vamos a hacer es el diagrama de cuerpo libre, es decir, un diagrama en donde dibujemos cada una de las fuerzas que actúan sobre el sistema.

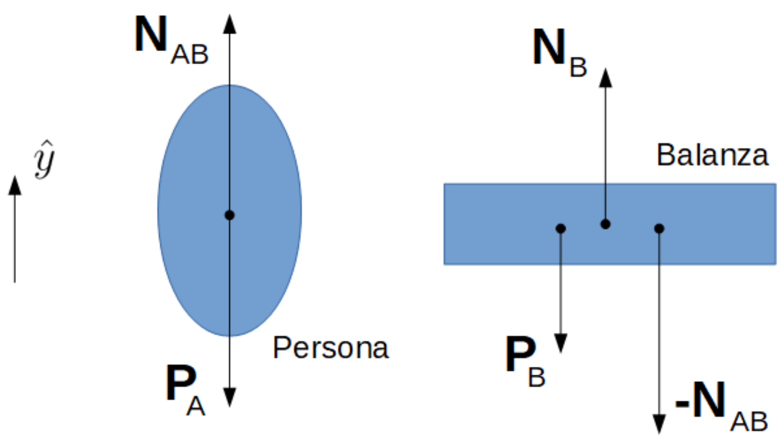

Figura 2: Diagrama de cuerpo libre para el ejercicio 4.

Fíjense que usé la letra A para referirme a todo lo relativo a la persona, y la letra B para la balanza. Dibujé a la persona separada de la balanza solo por claridad. Sobre la persona actúa su peso $\mathbf{P}_A$ y la fuerza de interacción entre ella y la balanza $\mathbf{N}_{AB}$. Sobre la balanza actúa su peso $\mathbf{P}_B$, la fuerza de interacción entre ella y la persona $-\mathbf{N}_{AB}$ y la fuerza de interacción entre ella y el piso del ascensor $\mathbf{N}_B$. Lo que hay que notar ahora y que es muy importante es que lo que marca la balanza, es decir el valor de B, es igual al módulo de la fuerza de interacción entre la balanza y la persona: $B = |\mathbf{N}_{AB}|$.

El próximo paso es escribir la segunda ley de Newton para la persona:

$$\mathbf{N}_{AB} + \mathbf{P}_A = m\mathbf{a} \tag{8}$$

donde m es la masa de la persona. Notemos que la aceleración de la balanza y de la persona son la misma ($\mathbf{a}$), asumiendo que la persona siempre está en contacto con la balanza. La ecuación (8) es vectorial, pero si nos damos cuenta de que el movimiento es unidimensional (solo hay movimiento vertical), podemos deshacernos de los vectores y transformarla en una ecuación escalar. Además usamos que $P_A = -mg = -55kgf$. Con todo esto llegamos a que:

$$N_{AB} - 55kgf = ma \tag{9}$$

Todo lo que hicimos hasta ahora es completamente general. Ahora veamos los casos particulares que nos proponen los items.

a) *¿Cuánto vale B si el ascensor baja con velocidad constante de $v = 3m/s$?*

Si la velocidad es constante, sabemos que la aceleración es cero. Reemplazando $a = 0$ en la ecuación (9) y despejando, obtenemos:

$$B = N_{AB} = 55kgf \tag{10}$$

Acuérdense que lo que marca la balanza (B) coincide con N_{AB}.

Fíjense que en este caso donde el ascensor se mueve con velocidad constante, B vale lo mismo que cuando el ascensor esta quieto. Y esto es así para cualquier valor de la velocidad (siempre y cuando sea constante), positivo o negativo.

b) *¿Cuánto vale B si el ascensor sube con una aceleración de $0.4m/s^2$?*

Reemplazamos $a = 0.4m/s^2$ y $m = 55kg$ en la ecuación (9) y obtenemos:

$$N_{AB} - 55kgf = 55kg \cdot 0.4\frac{m}{s^2} \tag{11}$$

Ahora reemplazamos $N_{AB} = B$ y despejamos, obteniendo:

$$B = 55kgf + 55kg \cdot 0.4\frac{m}{s^2} \tag{12}$$

En este momento hay que tener cuidado con las unidades. En el lado derecho de la ecuación (12), el primer término está en unidades de kgf y el segundo, en Newtons ($N = kg \cdot m/s^2$). Entonces, para poder sumar necesito primero que ambos términos estén en las mismas unidades. Usando que $1kgf = |g|N = 10N$, concluimos que $55kgf = 550N$. Teniendo esto en cuenta, obtenemos:

$$B = 572N \tag{13}$$

Fíjense que este valor de B es mayor al obtenido en el item anterior. El ascensor está acelerándose hacia arriba, y esto es análogo a pensar que el ascensor está quieto y la gravedad es más fuerte, o que está quieto y la persona es más pesada. Esto último es solo un comentario, pero si quieren pensarlo un poco más, háganlo que esta bueno!

c) *¿Cuál es la aceleración del ascensor si $B = 0kgf$?*

Este último vamos a hacerlo un poco más rápido. Si ustedes reemplazan $B = N_{AB} = 0$ en la ecuación (9) y despejan la aceleración, van a obtener: $a = -g = -10m/s^2$. Esto es interesante porque nos dice que para que la fuerza de interacción entre la balanza y la persona sea cero, el ascensor debe estar cayendo en caída libre.

Ejercicio 8

Analice el sentido de movimiento del sistema de la figura, calculando las aceleraciones de cada cuerpo y la tensión sobre la soga que los vincula. Suponga que la soga es inextensible y de masa despreciable frente a la de los cuerpos. ¿En qué momento utiliza estas aproximaciones?

Igual que en el ejercicio anterior, lo primero que hacemos es el diagrama de cuerpo libre. Además, en este caso la elección de sistema de referencia no es tan sencilla como en el ejercicio anterior. En el ejercicio 4 el movimiento era unidimensional, con lo cual la elección del sistema de referencia casi ni nos la planteamos, pero este caso es un movimiento bidimensional más complicado. No hay un único sistema de referencia que se pueda elegir. Acá vamos a elegir uno particular que simplifica las cuentas, pero podrían hacerlo con otros y todo debería funcionar bien. Vamos a usar dos sistemas de referencia separados, uno para cada cuerpo, de forma que en cada uno de estos sistemas, el movimiento de la masa correspondiente sea unidimensional. Por lo tanto, estamos eligiendo un sistema de referencia tal que (para cada cuerpo) una de las componentes de la aceleración sea nula, y de esta manera se simplifiquen las ecuaciones de Newton. En la figura 3 hacemos el diagrama de cuerpo libre y mostramos como son los sistemas de referencia elegidos. Llamamos cuerpo 1 al que tiene masa $m_1 = 2kg$ y cuerpo 2 al que tiene masa $m_2 = 1kg$.

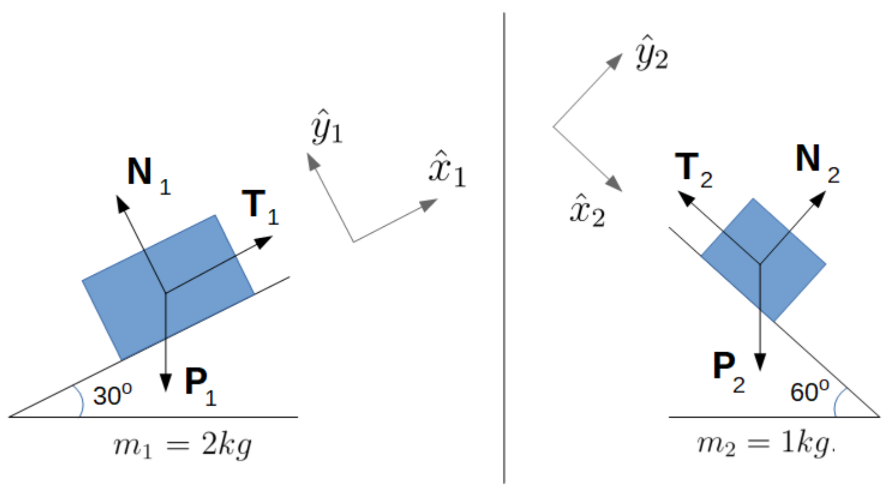

Figura 3: Diagrama de cuerpo libre para el ejercicio 8.

Miremos todas las fuerzas que aparecen en el diagrama de cuerpo libre. Primero tenemos las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$. Fíjense que las sogas siempre ejercen una tensión que 'tira' de los cuerpos, **no** pueden 'empujar'. Después tenemos los pesos, que siempre apuntan hacia abajo. Y por último tenemos las normales. Hay que acordarse que la fuerza normal siempre es perpendicular a la superficie de apoyo.

Tanto las tensiones como las normales tienen componentes en un único eje ($\mathbf{T}_i = T_i\hat{x}_i$, $\mathbf{N}_i = N_i\hat{y}_i$, con $i = 1$ o $i = 2$). Pero los pesos tienen componentes en ambos ejes, y por lo tanto va a ser necesario descomponerlos (escribirlos como una suma sobre ambos ejes): $\mathbf{P}_i = P_{xi}\hat{x}_i + P_{yi}\hat{y}_i$. Necesito averiguar el valor de P_{xi} y P_{xi}, para $i = 1$ y $i = 2$. Primero hay que recordar que el módulo del peso es igual a la masa por la aceleración de la gravedad, es decir: $|\mathbf{P}_i| = \sqrt{P_{xi}^2 + P_{yi}^2} = m_i g$. Ahora hagamos un diagrama para ilustrar como se ven ambas componentes del peso, donde omitimos las normales y las tensiones simplemente por claridad:

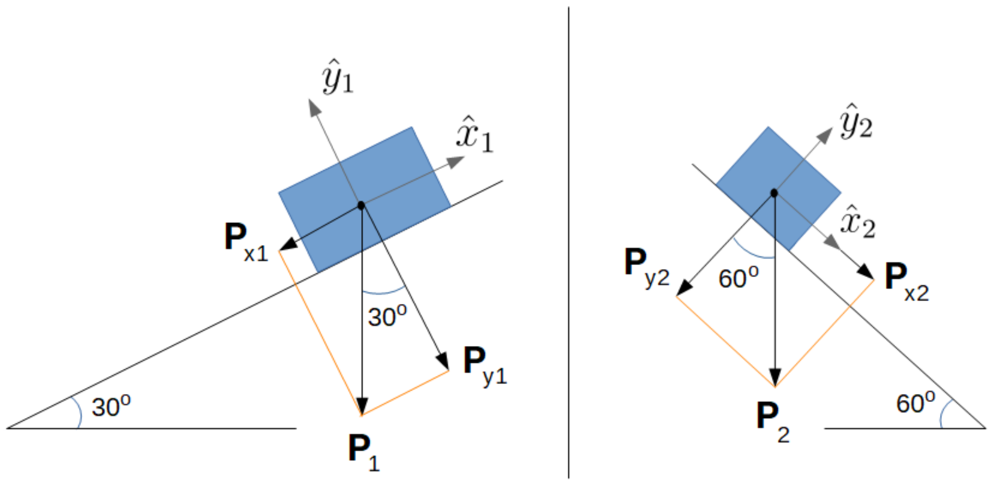

Figura 4: Descomposición de las fuerzas peso.

Recordando algunas reglas de trigonometría:

$$\sin\theta = \frac{opuesto}{hipotenusa} \quad ; \quad \cos\theta = \frac{adyacente}{hipotenusa} \quad ; \quad \tan\theta = \frac{opuesto}{adyacente} \tag{14}$$

podemos proyectar cada una de las fuerzas peso sobre los ejes correspondientes, obteniendo:

$$\mathbf{P}_1 = -m_1 g(\sin(30^\circ)\hat{x}_1 + \cos(30^\circ)\hat{y}_1) \tag{15}$$

$$\mathbf{P}_2 = m_2 g(\sin(60^\circ)\hat{x}_2 - \cos(60^\circ)\hat{y}_2) \tag{16}$$

Si usamos que $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$, obtenemos que $|\mathbf{P}_i| = m_i g$, como queríamos.

Hay dos hipótesis muy importantes que nos van a ayudar: **la soga es inextensible y su masa es despreciable**. La primera implica que la longitud de la soga va a ser siempre la misma, no se va a estirar ni a acortar. Esto nos relaciona la posición de ambas masas, es decir que si conozco la posición de una de ellas, inmediatamente conozco la posición de la otra. Veamos que significa esto.

Tomemos el origen del eje $\hat{x}_1$ justo sobre la polea. La posición de la masa 1 sobre este eje será $-x_1$ ($x_1 \geq 0$), donde estoy explicitando que esta cantidad es negativa (fíjense hacia donde apunta el eje $\hat{x}_1$). El origen del eje $\hat{x}_2$ también lo ubico en la polea, y entonces, la posición de la masa 2 sobre este eje es $x_2 \geq 0$. Llamo L (constante) a la longitud de la soga. Entonces se cumple que: $x_2 - x_1 = L$. Si ahora derivamos esta expresión dos veces con respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{d^2L}{dt^2} = 0 \tag{17}$$

$$a_2 - a_1 = 0 \rightarrow a_2 = a_1 \equiv a \tag{18}$$

Esto se traduce en que *la aceleración de ambas masas va a ser la misma.*

Para ver que implica la segunda hipótesis (soga con masa despreciable) pensemos en el caso un poco más sencillo de dos masas unidas por una soga, sin ninguna polea involucrada. Haciendo el diagrama de cuerpo libre para ambas masas y para la soga, obtenemos:

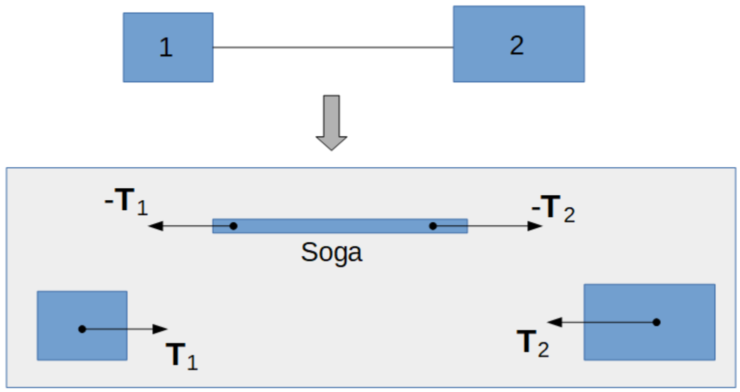

Figura 5: Diagrama de cuerpo libre para dos masas unidas por una soga.

Lo primero que hay que notar es que la soga siente la fuerza de reacción de ambas tensiones, $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$. Si ahora escribimos la ecuación de movimiento para la soga, llegamos a que:

$$-T_1 - T_2 = m_{soga} \cdot a_{soga} = 0 \tag{19}$$

Notemos que esta ecuación está igualada a cero porque la masa de la soga la tomamos como nula, y **no** porque la aceleración de la soga sea cero. Esta ecuación implica que *el módulo de ambas tensiones tiene que ser el mismo*, es decir: $|\mathbf{T}_1| = |\mathbf{T}_2| \equiv T$.

Ahora vamos a escribir las ecuaciones de movimiento, basándonos en el diagrama de cuerpo libre de la figura 3. Vamos a tener un set de ecuaciones para cada cuerpo. Es decir, que queremos escribir la ecuación (1) para ambas masas. Esta ecuación es vectorial, pero por comodidad vamos a descomponerla en los ejes x_1 e y_1 para el cuerpo 1, y en los ejes x_2 e y_2 para el cuerpo 2. A modo de ejemplo, en el eje y_1 la suma de las fuerzas que actúan sobre la masa 1 es: $N_1 - m_1 \cdot g \cdot \cos(30°)$. Para esto usé la descomposición de $\mathbf{P}_1$ dada por (15). La aceleración del cuerpo 1, $\mathbf{a}_1 = a_{x1}\hat{x}_1 + a_{y1}\hat{y}_1$, cumple que $a_{y1} = 0$ porque la masa 1 no se mueve en la dirección y_1. Entonces, la suma de las fuerzas en este eje será nula. Razonando de forma análoga llegamos a que las ecuaciones de movimiento del sistema completo son:

$$\hat{x}_1 \rightarrow T - m_1 \cdot g \cdot \sin(30°) = m_1 a \tag{20a}$$

$$\hat{y}_1 \rightarrow N_1 - m_1 \cdot g \cdot \cos(30°) = 0 \tag{20b}$$

$$\hat{x}_2 \rightarrow -T + m_2 \cdot g \sin(60°) = m_2 a \tag{20c}$$

$$\hat{y}_2 \rightarrow N_2 - m_2 \cdot g \cos(60°) = 0 \tag{20d}$$

Hay que notar que en estas ecuaciones ya usamos que la soga es inextensible y de masa despreciable, ya que tomamos las tensiones del mismo módulo y las aceleraciones iguales.

Nos piden la aceleración del sistema (es una sola dado que, como ya dijimos, ambas masas se mueven en conjunto) y la tensión ejercida. Hay cuatro magnitudes que no conocemos: N_1, N_2, T, a. Y tenemos cuatro ecuaciones: (20a) hasta (20d). Por lo tanto, el problema ya está resuelto. Solo falta despejar las incógnitas de nuestras ecuaciones. Como es el primer ejercicio de este estilo que hacemos, les voy a explicar una forma posible de despejar las incógnitas, pero el detalle de las cuentas se los dejo a ustedes. Primero despejamos T de las ecuaciones (20a) y (20c), e igualamos ambas expresiones. De esta última igualdad podemos despejar el valor de la aceleración en función de datos. Y por último, reemplazamos la aceleración obtenida en la ecuación (20a) o en la (20c) para poder despejar T.

Para concluir, solo falta ver el sentido del movimiento. Por como definimos los ejes, si la aceleración es positiva, el sistema se mueve hacia la derecha; y si es negativa, se mueve hacia la izquierda. Cuando hagan la cuenta deberían llegar a que el sistema se mueve hacia la izquierda.

Ejercicio 6

Un pájaro de masa $m = 26g = 0.026kg$ esta posado en el punto medio de una cuerda tensa.

a) *Demuestre que la tensión de la cuerda esta dada por $T = \frac{mg}{2\sin\theta}$.*

Igual que antes, lo primero es hacer el diagrama de cuerpo libre. Las fuerzas que van a actuar sobre el pájaro van a ser su propio peso y la tensión de la soga (puedo pensar que sobre el pájaro actúan dos tensiones, ambas de módulo T).

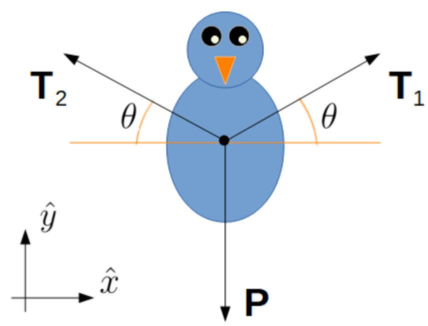

Figura 6: Diagrama de cuerpo libre para el ejercicio 6.

Como en el ejercicio anterior, mirando el diagrama de cuerpo libre vamos a escribir la ecuaciones de movimiento para el pájaro, descomponiéndola en el eje x y en el eje y. Para ello notamos que el pájaro está quieto, y por lo tanto su aceleración es nula. Así obtenemos:

$$\hat{x} \rightarrow T\cos\theta - T\cos\theta = ma_x = 0 \tag{21a}$$

$$\hat{y} \rightarrow 2T\sin\theta - mg = ma_y = 0 \tag{21b}$$

La ecuación (21a) no nos dice mucho. Solo es la expresión matemática de que en el eje horizontal no tengo fuerza neta, y por lo tanto, tampoco tengo aceleración. La ecuación (21b) sí nos va a ser útil. En esta ecuación la única incógnita que tenemos es la tensión, entonces podemos despejarla y obtenemos: $T = \frac{mg}{2\sin\theta}$.

b) *Determine la tensión si $\theta = 5°$.*

Solo hay que reemplazar el valor de θ en la expresión de la tensión. Se los dejo a ustedes. Lo único que les digo es que para que el resultado esté en Newtons (N), la masa debe estar en kg y la aceleración de la gravedad en m/s^2, dado que: $N = kg \cdot m/s^2$.

c) *¿Cuánto valdrá la tensión si la cuerda está ubicada en un montacargas que asciende con* $a = 1m/s^2$*? Discuta los casos en que el montacargas desciende con la misma aceleración o se mueve con velocidad constante.*

Fíjense que este item es parecido al ejercicio 4. Si el ascensor asciende con $a = 1m/s^2$, lo único que hay que hacer es reemplazar $a_y = 1m/s^2$ en la ecuación (21b). Si hacemos esto (les dejo la cuenta a ustedes) vamos a obtener un valor de la tensión más grande que en el item (a). ¿Tiene sentido que esto sea así? Todo el sistema se está acelerando hacia arriba, entonces, para que el ángulo θ siga valiendo $5°$, la soga tienen que hacer más fuerza, y por ende, la tensión es mayor. Piensen que si la tensión no variara, el ángulo sería mayor.

Si ahora tomamos que la aceleración es $a = -1m/s^2$, operando igual que antes vamos a obtener que la tensión es menor que en el item (a).

Por último, si el sistema se mueve a velocidad constante, la aceleración va a ser cero, al igual que en el item (a), y por lo tanto la tensión va a ser la misma.

Fíjense que este ejercicio se puede pensar de forma análoga al ejercicio 4, pero ahora en vez de la fuerza normal tenemos la tensión.