Clase n° 6: Movimiento Circular (08/05/2020)

Mecánica y Termodinámica - Prof: P. Balenzuela - JTPs: L. Bavassi y P. Mauas

---

En la clase de hoy abordaremos los siguientes temas:

- **Cinemática y Dinámica del Movimiento Circular.**

Con lo que veamos hoy estarán en condiciones de enfrentarse a toda la guía.

Supongamos que un móvil se mueve describiendo una circunferencia de radio R constante. Si ubicamos un sistema de coordenadas cartesiano cuyo origen coincida con el centro de la circunferencia y definimos un ángulo θ creciente de x a y en sentido antihorario, podemos descomponer vectorialmente la posición del móvil en este sistema de coordenadas mediante trigonometría como la suma de su componente en x y en y (Ver Fig. 1). Entonces:

$$\vec{r}(t) = R\cos(\theta(t))\hat{x} + R\sin(\theta(t))\hat{y}\ . \tag{1}$$

Veamos que el valor del ángulo θ depende del tiempo, con lo cual el vector posición que une el centro de la circunferencia con el punto donde se ubica el móvil depende del tiempo. En un movimiento CIRCULAR, y como ya vieron en la teórica, la velocidad es siempre tangencial a la circunferencia con lo cual su dirección cambia en el tiempo. Para que el movimiento sea circular (¡y el móvil no salga proyectado!) debe existir al menos una aceleración centrípeta, apuntando siempre al centro de la circunferencia, que tiempo a tiempo modifique la dirección del vector velocidad. Ambos vectores, tanto $\vec{v}$ como $\vec{a}$, dependen del tiempo ya que su dirección cambia tiempo a tiempo.

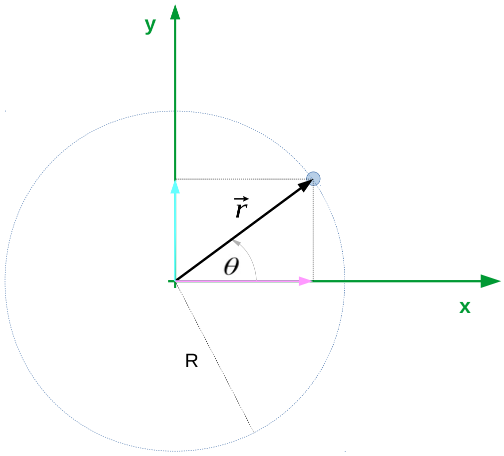


Figure 1: Un móvil (pelota) describe una trayectoria circular de radio R. Sistema de coordenadas cartesiano definido desde el centro de la circunferencia. Vector posición y sus componentes (componente x, en magenta y componente y, en cyan).

En particular, si el ritmo de cambio de θ con el tiempo ($\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\theta}$) es siempre igual, es decir que su velocidad angular $\dot{\theta}$ es una constante, el móvil describe un *movimiento circular uniforme* (MCU). En un MCU, habitualmente llamamos ω a la velocidad angular ($\dot{\theta} = \omega$). Esto implica que $\theta(t) = \omega t$ con ω constante. Matemáticamente esto se escribe: $\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega = \mathrm{cte}$ [1].

El movimiento circular uniforme es el caso más sencillo de movimiento circular. Para describir matemáticamente movimientos circulares, tanto uniformes como otros más complicados, resulta conveniente utilizar un sistema

[1] Aclaración de notación: recuerde que agregar un punto en la parte superior de una variable que depende del tiempo significa la derivada de esa variable con respecto al tiempo. Es decir, en este caso $\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$. Del mismo modo, agregar dos puntos en la parte superior equivale a derivar dos veces respecto al tiempo. Es decir, $\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$.

de coordenadas distinto al cartesiano. En particular, podemos usar un sistema de **coordenadas polares**, que en un movimiento circular equivale a descomponer el movimiento en sus componentes tangencial y centrípeta. Las direcciones tangencial y centrípeta cambian en cada punto de la circunferencia. Entonces, en vez de usar los versores $\hat{x}$ e $\hat{y}$ cuyas direcciones y sentido están fijos, podemos utilizar los versores $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ que dependen del tiempo (tienen módulo 1 pero su dirección cambia en el tiempo) y se definen como:

$$\hat{r} = \cos\theta(t)\ \hat{x} + \sin\theta(t)\ \hat{y} \tag{2}$$
$$\hat{\theta} = -\sin\theta(t)\ \hat{x} + \cos\theta(t)\ \hat{y}\ . \tag{3}$$

El versor $\hat{r}$ es un vector de módulo 1 que apunta en la dirección que une el centro de la circunferencia con la posición del móvil para cada tiempo y apunta hacia afuera, mientras que $\hat{\theta}$ es un vector de módulo 1 que apunta en la dirección tangencial, en el sentido en el que crece el ángulo θ, es decir, en sentido antihorario (Ver Fig.2).

Note que la decomposición de $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ en las coordenadas $x - y$ depende directamente de cómo defina el ángulo, por lo cuál debe prestar atención a él. Para ello, debe definir a conciencia desde dónde lo mide desde el principio (al definir el sistema de coordenadas), hacer un buen esquema del sistema de coordenadas y mantenerlo hasta el final. En caso contrario, corre el riesgo de cometer errores importantes en el desarrollo o bien puede que le resulte imposible recuperar la posición, velocidad y aceleración para un instante de tiempo al terminar los ejercicios.

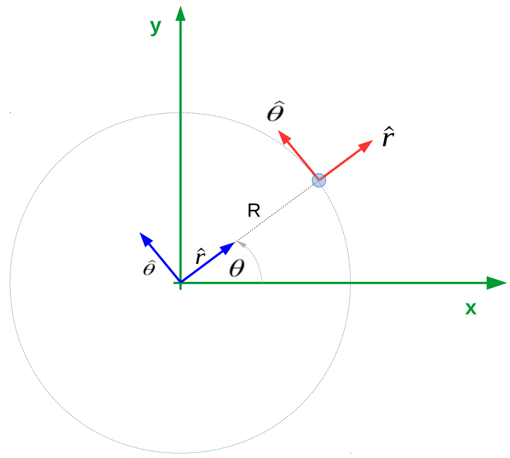


Figure 2: Un móvil (pelota) describe una trayectoria circular de radio R. Sistema de coordenadas cartesiano definido desde el centro de la circunferencia y coordenadas polares.

Observe que podemos escribir la posición del móvil en estas nuevas coordenadas como:

$$\vec{r} = R\hat{r} \tag{4}$$

Se puede demostrar (no lo haremos aquí, sólo tomaremos el resultado de la teórica) que la velocidad y la aceleración para un movimiento circular (es decir, con radio R constante) en el caso más general, se pueden escribir como:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = R\dot{\theta}\ \hat{\theta} \tag{5}$$
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = (-R\dot{\theta}^2)\ \hat{r} + (R\ddot{\theta})\ \hat{\theta}\ . \tag{6}$$

Observe que, como dijimos anteriormente, la velocidad en un movimiento circular es siempre en $\hat{\theta}$, es decir que es tangencial al movimiento; mientras que la aceleración en el caso más general tiene una componente en la dirección centrípeta, en $\hat{r}$ (que modifica tiempo a tiempo la dirección del vector velocidad) y una tangencial, en $\hat{\theta}$ (que afecta el módulo del vector velocidad).

En un movimiento circular uniforme, la componente en $\hat{\theta}$ de la aceleración se anula, la velocidad angular

$\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega$ constante y $\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = 0$. Es decir que para un MCU vale que:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = R\omega\ \hat{\theta} \tag{7}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\ \hat{r}\ . \tag{8}$$

Observe que la velocidad angular $\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ corresponde a cantidad de radianes por segundo (unidades: $[\omega] = 1/\mathrm{s}$). La frecuencia (f) de un MCU es $\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi}}$ (unidades: $[f] = 1/\mathrm{s} = \mathrm{Hz}$) y el período $\boxed{T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}}$ (unidades: $[T] = \mathrm{s}$).

1 Problema 1

Un cuerpo realiza un movimiento circular de radio $R = 50\mathrm{cm}$ sobre un plano horizontal. La velocidad angular del movimiento es $2\mathrm{seg}^{-1}$ y el sentido es antihorario. (a) ¿Cuánto vale el período del movimiento? (b) Calcule y represente gráficamente los vectores **r**, **v**, **a** *en distintos puntos del recorrido. (c) Halle la posición en la cual se encuentra el objeto al cabo de 10 segundos (considere que a $t = 0s$ partió de la posición $x = R$ e $y = 0$).*

---

a) El cuerpo realiza un movimiento circular con velocidad angular constante $\omega = 2\ \mathrm{s}^{-1}$, es decir que describe un MCU. Sabemos que el período en un movimiento de este tipo se calcula como $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\ \mathrm{s}^{-1}} = \pi\ \mathrm{s} \approx 3,14\mathrm{s}}$.

b) Para poder expresar matemáticamente y representar los vectores posición, velocidad y aceleración necesitamos establecer un sistema de coordenadas. Definamos en primer lugar un sistema de coordenadas cartesianas sobre el plano horizontal cuyo origen se encuentre en el centro del movimiento circular que describe el cuerpo. Además definamos un ángulo θ creciente en sentido antihorario, de x a y (tal que $\theta = 0$ cuando el móvil cruza el eje x). Ahora sí, estamos en condiciones de escribir un sistema de coordenadas polares $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$, tal que $\hat{\theta}$ apunte en el sentido en el que crece el ángulo (ver Fig.2). En este sistema de coordenadas, la posición es:

$$\vec{r} = R\hat{r} = \boxed{50\mathrm{cm}\ \hat{r}}\ . \tag{9}$$

En las coordenadas cartesianas originales:

$$\vec{r} = R\ (\cos\theta(t)\ \hat{x} + \sin\theta(t)\ \hat{y})\ . \tag{10}$$

Ahora bien, el ángulo θ es una función del tiempo, y debemos expresarlo en función de los datos del problema, en este caso, $\omega = 2\ \mathrm{s}^{-1}$. Recordemos que $\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega = 2\ \mathrm{s}^{-1}$. Si definimos el tiempo $t_0 = 0$ como aquel en que el móvil pasa por la posición $\theta_0 = 0$ (que en cartesianas corresponde a $(x_0, y_0) = (R, 0)$), podemos integrar a ambos lados la expresión $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega = 2\ \mathrm{s}^{-1}$ respecto al tiempo y obtenemos: $\theta(t) = \omega t$. Entonces, en coordenadas cartesianas:

$$\vec{r} = R\ (\cos(\omega t)\ \hat{x} + \sin(\omega t)\ \hat{y})\ , \tag{11}$$

donde $\omega = 2\ \mathrm{s}^{-1}$ y $R = 50\mathrm{cm}$.

Por otro lado, la velocidad del cuerpo en coordenadas polares resulta:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = R\dot{\theta}\ \hat{\theta} = R\omega\ \hat{\theta} = 0.5\mathrm{m}\ 2\mathrm{s}^{-1}\ \hat{\theta} = \boxed{1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ \hat{\theta}}\ , \tag{12}$$

y su equivalente en coordenadas cartesianas:

$$\vec{v} = R\omega\ (-\sin(\omega t)\hat{x} + \cos(\omega t)\hat{y}) = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ (-\sin(2\mathrm{s}^{-1}t)\hat{x} + \cos(2\mathrm{s}^{-1}t)\hat{y})\ . \tag{13}$$

Por último, sabiendo que $\ddot{\theta} = 0$, la aceleración en coordenadas polares es:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\ \hat{r} = -0.5\mathrm{m}\ (2\mathrm{s}^{-1})^2\ \hat{r} = \boxed{-2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})\ \hat{r}}\ , \tag{14}$$

que en coordenadas cartesianas resulta:

$$\vec{a} = -R\omega^2\ (\cos(\omega t)\ \hat{x} + \sin(\omega t)\ \hat{y}) = -2(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})(\cos(2\mathrm{s}^{-1}t)\ \hat{x} + \sin(2\mathrm{s}^{-1}t)\ \hat{y})\ . \tag{15}$$

Las expresiones anteriores valen para todo t. Note que en coordenadas polares tanto la posición como la velocidad y la aceleración se descomponen siempre igual; sin embargo, la dependencia temporal se encuentra en la dirección y el sentido de los versores $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$. Ahora solo resta estudiar hacia adonde apuntan los vectores posición, velocidad y aceleración para distintos tiempos. Si le sirve de ayuda, utilice las descomposiciones en coordenadas cartesianas en función del tiempo que obtuvimos (¡para eso las escribimos!). En la Fig.3 se esquematizan sus direcciones y sentidos para algunos tiempos particulares de la trayectoria.

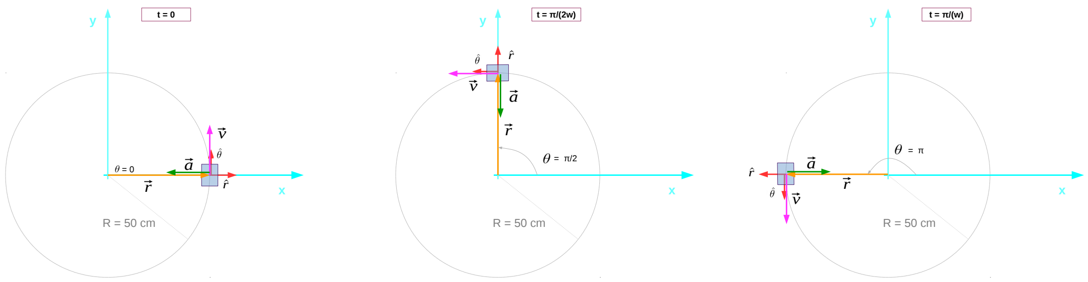


Figure 3: Esquema del cuerpo del problema 1 en distintos instantes de su movimiento circular uniforme de radio R: dirección y sentido de los vectores posición, velocidad y aceleración para distintos instantes de tiempo. Note que estos vectores no están a escala dado que representan distintas magnitudes. Sistema de coordenadas cartesianas y polares.

El ítem c) queda para hacer de tarea, ya que es simplemente evaluar y graficar. ¡Cuidado! Fíjese que el resultado de ωt queda en radianes, por lo que la calculadora ¡debe estar en radianes!

Algo más: Aproveche este ejercicio fácil para graficar cómo evolucionan las coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ del cuerpo en función del tiempo; note que están desfasadas entre sí en $\pi/2$. Lo mismo con las componentes de la velocidad y la aceleración. Sugerencia: re-piense todo lo que necesite pensar dos veces de lo que acabamos de hacer. La idea es que después de pensar y estudiar un rato largo este ejercicio pueda comprender en detalle cómo es el movimiento, cómo descomponer los vectores en polares y cartesianas, para no trabarse con esto más adelante.

Daremos ahora, el próximo paso: dinámica del movimiento circular.

2 Ayuda para los problemas 3 y 4

Para poder resolver estos problemas deberán utilizar la expresión de la **fuerza gravitatoria**, que es la fuerza de atracción entre dos cuerpos por el hecho de poseer masa. La misma es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional a la distancia que los separa, y apunta en la dirección que une los dos cuerpos que interactúan. En particular, pensemos en la fuerza gravitatoria que ejerce el planeta Tierra sobre un objeto de masa m que se ubica a una distancia r del centro de la misma. Si ubicamos un sistema de coordenadas polares con el origen en el centro de la Tierra, la fuerza que siente este objeto está dada por:

$$\vec{F_g} = -\frac{G\ M_T\ m}{r^2}\ \hat{r} \tag{16}$$

donde $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 es la constante de gravitación universal y $M_T \approx 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg es la masa de la Tierra. El radio aproximado de la Tierra (a nivel de la superficie del mar) es de $R_T \approx 6371$km. La expresión anterior vale para $r \geq R_T$.

Observe que para un objeto ubicado en la superficie terrestre el módulo de la fuerza gravitarioria es $|\vec{F_g}| = \frac{G\ M_T}{R_T^2}\ m = (9.81\ \mathrm{m/s^2})m$. Por este motivo, se define la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre como $g \equiv \frac{G\ M_T}{R_T^2} \approx 9.81\ \mathrm{m/s^2}$ y se calcula la fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre un objeto, o peso, como el producto mg.

3 Problema 6

Un pájaro de masa 300g describe en su vuelo una curva de 20m de radio a una velocidad de 15m/s. (a) ¿Cuál es el ángulo de inclinación? (b) ¿Cuál es la fuerza de sustentación ejercida por el aire sobre el pájaro?

En primer lugar, tratemos de detectar cuáles son las fuerzas que siente un pájaro en vuelo (ignorando el rozamiento con el aire).

Pensemos en primer lugar, en un pájaro que vuela en línea recta, a velocidad constante. Desde ya, debido al efecto de la atracción gravitatoria, actúa sobre él la fuerza peso. ¿Y por qué el pájaro no se cae? Debido a la forma y al movimiento de sus alas, se genera una fuerza denominada *fuerza de sustentación* sobre el pájaro debido a su interacción con el aire. Esta fuerza, que aparece cuando un cuerpo se desplaza a través de un fluido con ciertas propiedades, tiene dirección perpendicular a la de la velocidad de la corriente incidente. No vamos a entrar en detalles acerca de las propiedades del aire como fluido turbulento, o de la hidrodinámica del mismo en su interacción con las alas, ya que excede ampliamente los contenidos del curso. Solo necesitamos saber que sobre el pájaro (o avión) actúa una fuerza en dirección normal al plano de sus alas y que se opone a la fuerza peso.

En cambio, cuando el pájaro gira, inclina su cuerpo: baja el ala izquierda y sube la derecha para girar hacia la izquierda, o sube el ala izquierda y baja la derecha para girar a la derecha. De esta manera, si el pájaro gira en un círculo, la fuerza de sustentación, siempre perpendicular al plano de las alas, se inclina hacia el centro de la circunferencia. Si lo pensamos desde el punto de vista del movimiento circular, sabemos que en un movimiento de este tipo existe al menos una aceleración centrípeta que modifica tiempo a tiempo la dirección del vector velocidad. Es decir que para que un pájaro como el del problema 6 realice un movimiento circular con velocidad angular constante, debe existir una fuerza que, además de compensar el peso (para que el pájaro no pierda altura), le otorgue la aceleración centrípeta necesaria para mantener el movimiento circular. Dicha fuerza será la de sustentación, a la que llamaremos F_s.

El pájaro del problema 6 describe un movimiento circular con velocidad constante, a altura constante respecto del suelo. Si observáramos el movimiento completo desde arriba podríamos entonces visualizar la trayectoria circular. Para poder describir las fuerzas y el movimiento matemáticamente, definamos un sistema de coordenadas. Supongamos que definimos un sistema de coordenadas cartesianas tales que la altura desde el suelo del pájaro sea $z = 0$ siempre (con z creciente con la altura desde el suelo), y que el plano definido por las coordenadas x e y sea paralelo al suelo. De esta manera, el vuelo circular se realiza en el plano $x - y$, con $z = 0$. Además, ubiquemos el origen de las coordenadas cartesianas en el centro de la circunferencia que recorre el pájaro. Para describir su posición y escribir las ecuaciones de Newton, utilizaremos un sistema de coordenadas polares como el que venimos usando hasta ahora, definiendo un ángulo θ creciente en sentido antihorario, de x a y, $\hat{r}$ radial en la dirección que une el centro de la circuferencia con la posición del pájaro, apuntando hacia afuera, y la dirección $\hat{\theta}$ apuntando en el sentido en que crece el ángulo θ. En la Fig. 4 se muestra un diagrama del sistema de coordenadas elegido. Note que las coordenadas $r - \theta - z$ nos alcanzarán para describir la dinámica del pájaro perfectamente[2].

Utilizando este sistema de coordenadas y a partir de realizar el diagrama de cuerpo libre del pájaro (Ver Fig.4), vemos que el peso apunta en la dirección $-\hat{z}$ y la fuerza de sustentación durante el movimiento circular se encuentra en el plano $\hat{r} - \hat{z}$. Llamemos α al ángulo comprendido entre la fuerza de sustentación y la vertical, medido desde el eje $z > 0$. Si el radio del movimiento del pájaro es constante, este ángulo está fijo (no cambia con el tiempo). En la Fig. 4 se esquematizan las fuerzas que actúan sobre el pájaro y sus direcciones respecto a las coordenadas elegidas[3].

Recordemos que nos dicen en el enunciado que la velocidad vale constantemente 15m/s. En todo movimiento circular, R es constante. Además si $|\vec{v}| = v = 15$ m/s es constante, entonces $\dot{\theta} = \omega = v/R$ es constante. Por lo tanto, $\ddot{\theta} = 0$, es decir que el pájaro describe un MCU. Una vez realizado el diagrama de cuerpo libre y definidas las coordenadas planteemos las ecuaciones de Newton para el pájaro:

$$\hat{r})\ -F_s \sin\alpha = ma_r = m(-R\dot{\theta}^2) = -mR\omega^2 = -mv^2/R \Rightarrow F_s \sin\alpha = mv^2/R \tag{17}$$

$$\hat{\theta})\ 0 = ma_\theta = m(R\ddot{\theta}) \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \text{ (en este problema no aporta nueva información)} \tag{18}$$

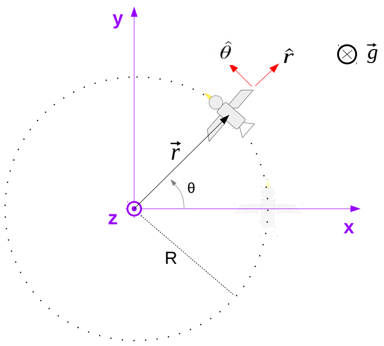
$$\hat{z}) F_s \cos\alpha - mg = ma_z = 0 \Rightarrow F_s \cos\alpha = mg\ . \tag{19}$$

Las incógnitas de este problema son dos, F_s y α y tenemos dos ecuaciones relevantes, por lo cual sólo resta despejar para resolver a) y b). Por ejemplo, del cociente de las ecuaciones en $\hat{r}$ y $\hat{z}$ vemos fácilmente que $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{v^2}{gR}}$, con lo cual $\alpha \approx 48.37°$. De la ecuación en z, $\boxed{F_s = \dfrac{mg}{\cos\alpha} \approx 4.52\text{N}}$.

Nota: Observe la importancia de realizar un buen esquema. Es importante que al comenzar cualquier ejercicio de movimiento circular intente detectar el plano en el que ocurre el movimiento circular, pensar detalladamente cómo ubicar el ángulo θ y el sistema de coordenadas. Además suele ser útil intentar "visualizar" el objeto en movimiento y las fuerzas que intervienen desde distintos ángulos, pensando en sus direcciones en

[2] El conjunto de coordenadas polares $\hat{r} - \hat{\theta}$ plano junto con la coordenada z perpendicular a ellas, definen las *coordenadas cilíndricas*. Estas le serán extremadamente útiles en el futuro.

[3] En los esquemas solemos dibujar los vectores que entran a la hoja/pantalla como $\otimes$, mientras que los que salen de la hoja/pantalla apuntando hacia nosotros (la flecha del vector apunta hacia nuestros ojos) como $\odot$.



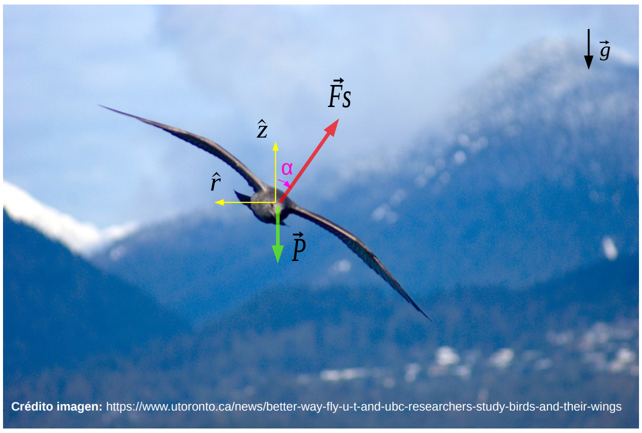


Figure 4: Vista desde arriba (izquierda) y de frente (derecha) del pájaro del problema 6, que describe un movimiento circular uniforme de radio $R = 20$ m. Sistema de coordenadas cartesianas y polares, y fuerzas sobre el pájaro. El eje z apunta en la dirección que sale de la pantalla/hoja hacia usted y $\vec{g} = -g\hat{z}$.

relación al sistema de coordenadas elegido, y hacer cuantos dibujos necesite, para recién después poder escribir las ecuaciones de Newton correctamente.

4 Problema 8 (e inspiración para el 9)

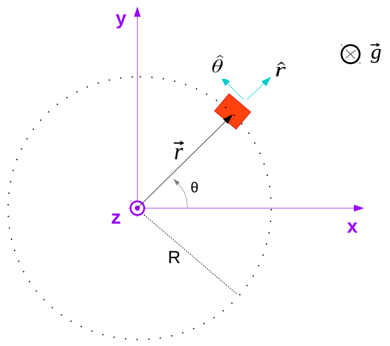
Un coche recorre una curva plana de 0,25km de radio. El coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos y la carretera es 0.4. ¿A qué velocidad, en km/h, el coche comienza a derrapar?

Supongamos que un coche recorre una ruta circular (sin desniveles ni pendiente) de radio R. Pensemos en particular en las fuerzas que actúan sobre él. Sabemos en principio que el coche siente el efecto de la atracción gravitatoria, es decir que siente la fuerza peso, y que además, no se hunde en el camino debido a la fuerza normal que el camino hace sobre él. Ambas son perpendiculares a la superficie de la ruta. ¿Hay más fuerzas? Piénselo. Supongamos por un momento que un tramo de la ruta está cubierto de hielo. ¿Qué puede pasarle al automóvil si no dispone de las cubiertas apropiadas? Podría pasarle que derrape, es decir que no logue continuar con la trayectoria circular y se deslice, manteniendo el sentido de la velocidad que traía. ¿Qué cambia entre una ruta en buen estado, y la misma ruta cubierta de hielo? Lo que cambia es el coeficiente de rozamiento entre el neumático y el camino. De alguna manera, es el rozamiento el que otorga el agarre suficiente al vehículo para que logre mantener la trayectoria circular. Además, la condición de que no deslice implica que la fuerza de rozamiento que nos interesa es la estática ($F_{r_{\text{est}}}$), pues no hay desplazamiento entre las superficies de contacto (la superficie del neumático en un dado instante y la ruta). La fuerza de rozamiento estática ($\vec{F_r}$) es entonces la fuerza paralela a la ruta que permite mantener el movimiento circular. En este caso, como la ruta es plana, la fuerza es centrípeta, apunta hacia el centro de la circunferencia (pues vea que si no hubiera rozamiento el auto derraparía hacia afuera).

Nuevamente, antes de comenzar la resolución definimos un sistema de coordenadas polares en el plano de la ruta y el eje z perpendicular a ella (Ver Fig. 5). Recordemos que estamos suponiendo que la ruta es plana y que el coche no se despega de la superficie en ningún momento, es decir que $a_z = 0$ (como $v_{z_0} = 0$, entonces $v_z = 0$). Una aclaración adicional: El motor del automóvil podría realizar fuerza en θ que diera origen a una componente de aceleración a_θ, que modifique la componente tangencial de la velocidad del automóvil; en este caso el movimiento sería circular pero no uniforme. Por simplicidad, supongamos en principio que el automóvil se mueve a velocidad angular $\dot{\theta}$ constante, aunque como veremos esta condición no afectará la resolución del ejercicio. Planteemos entonces las ecuaciones de Newton a partir del diagrama de cuerpo libre (Ver Fig. 5):

$$\hat{r})\ -F_{r_{\text{est}}} = ma_r = m(-R\dot{\theta}^2) \Rightarrow F_{r_{\text{est}}} = mR\dot{\theta}^2 \tag{20}$$
$$\hat{\theta})\ 0 = ma_\theta = m(R\ddot{\theta}) \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \tag{21}$$
$$\hat{z})N - mg = ma_z = 0 \Rightarrow N = mg\ . \tag{22}$$

Veamos en la ecuación radial que la fuerza de rozamiento estático aumenta con la velocidad angular, como era esperable. Ahora bien, sabemos que la fuerza de rozamiento estático siempre es menor que un dado valor



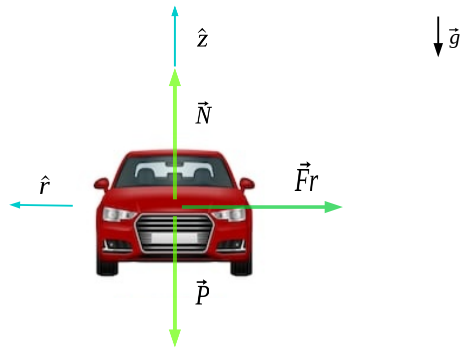


Figure 5: Vista desde arriba (izquierda) y de frente (derecha) del automóvil del problema 8, que describe un movimiento circular de radio R. Sistema de coordenadas cartesianas y polares, y fuerzas sobre el coche. El origen de coordenadas cartesiano se ubica en el centro de la trayectoria circular, el cual se encuentra en el plano de la ruta, caracterizado por $z = 0$. El eje z apunta en la dirección que sale de la pantalla/hoja hacia usted y $\vec{g} = -g\hat{z}$.

máximo $F_{r_{\text{est},M}} = \mu_e N$, a partir del cual las superficies de contacto en cuestión comienzan a deslizar. Cuando la velocidad angular sea mayor que un valor crítico (que queremos averiguar) y por ende la fuerza de rozamiento llegue a su máximo, el coche comenzará a deslizar. Si esto ocurriera el movimiento no sería más circular (pues R cambiaría) y las ecuaciones que escribimos dejarían de valer. La ecuación radial entonces, vale siempre y cuando $F_{r_{\text{est}}} = mR\dot{\theta}^2 \leq F_{r_{\text{est},M}} = \mu_e N = \mu_e mg$. De dicha condición despejamos la condición para la velocidad angular en función de los datos, que resulta $\dot{\theta} \leq \sqrt{\frac{\mu_e g}{R}}$. En un movimiento circular $|\vec{v}| = v = R\dot{\theta}$, por lo tanto $\boxed{v \leq \sqrt{\mu_e g R}}$. Utilizando los datos del problema 8, $R = 0.25$km y $\mu_e = 0.4$, la velocidad debe cumplir que $v \leq 31.6$ m/s $\approx$ 113.84 km/h para que el automóvil no derrape. Dicho de otra forma, a partir de la velocidad límite $v_{lim} \approx 114$ km/h, el auto comienza a deslizar.
****

¿Qué hubiera pasado en cambio si la ruta tuviera peralte, es decir, si la ruta estuviera inclinada un ángulo α conocido respecto a la horizontal hacia el centro de la curva? Vamos a tratar de pensar cómo se resolvería *el mismo problema* pero suponiendo ahora que la ruta está peraltada (Ver Fig. 6).

Comencemos entendiendo mejor el movimiento. Observe en primer lugar que queremos que la trayectoria del automóvil siga siendo la misma que en el caso sin peralte (circular de radio $R = 0.25$km), aunque la superficie de contacto entre el automóvil y la ruta esté inclinada respecto al plano del círculo que éste describe. Así, el centro de curvatura de la trayectoria que describe el automóvil es el mismo que antes. Por lo tanto, utilizaremos el mismo sistema de coordenadas polares que antes. Como el movimiento es circular, es decir, a radio R constante, y además el auto no se despega de la superficie de contacto, el coche nunca sale del plano $z = 0$; moverse en z y mantener el contacto con la ruta implicaría cambiar R, lo cual no ocurre. Esto implica que la coordenada z del automóvil no cambia, lo que indica que $a_z = 0$ ($v_z = 0 =$ cte). Con respecto a las fuerzas que intervienen en el problema, ahora la normal sigue siendo perpendicular a la superficie de la ruta y la fuerza de rozamiento sigue siendo paralela a la superficie de contacto, pero entonces ahora ambas tendrán componente en $\hat{r}$ y $\hat{z}$. El nuevo diagrama de cuerpo libre para el automóvil se muestra en la Fig.6.

Las ecuaciones de Newton en $\hat{r}$ y $\hat{z}$ resultan:

$$\hat{r}) - F_{r_{\text{est}}} \cos\alpha - N \sin\alpha = ma_r = m(-R\dot{\theta}^2) \tag{23}$$
$$\hat{z}) N\cos\alpha - F_{r_{\text{est}}} \sin\alpha - mg = ma_z = 0\ . \tag{24}$$

Nuevamente, podríamos querer averiguar v_{lim} a partir de la cual el automóvil comienza a derrapar imponiendo la condición de que $F_{r_{\text{est}}} \leq F_{r_{\text{est},M}} = \mu_e N$, pero ahora las ecuaciones están un poco más acopladas. A partir de aquí, no se preocupe demasiado por las cuentas, intente seguir únicamente el procedimiento y los conceptos.

Podríamos por ejemplo, despejar N de una de las ecuaciones y reemplazarla en la otra, para luego despejar $F_{r_{\text{est}}}$. Una manera equivalente para despejar $F_{r_{\text{est}}}$ sería multiplicar la primer ecuación por $\cos\alpha$ y la segunda por $\sin\alpha$, y sumar ambas, recordando que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Análogamente para despejar N se podría multiplicar

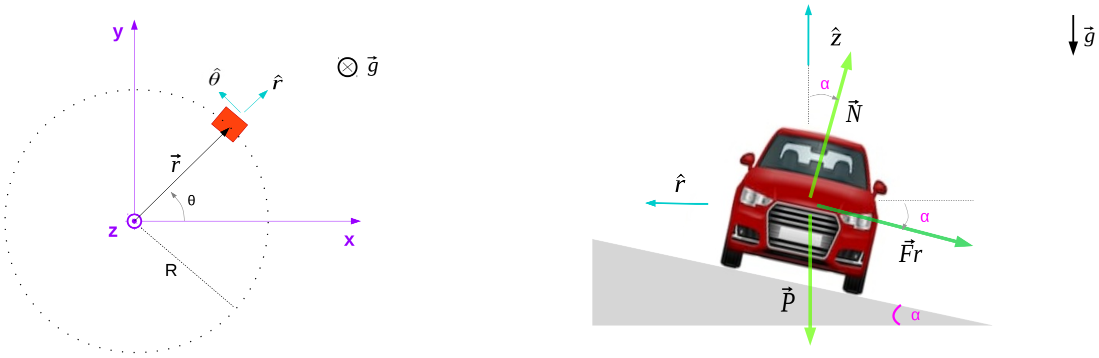


Figure 6: Vista desde arriba (izquierda) y de frente (derecha) del automóvil del problema 8 que describe un movimiento circular de radio R, pero en una ruta peraltada (ángulo de inclinación α respecto a la horizontal). Sistema de coordenadas cartesianas y polares, y fuerzas sobre el coche. El origen de coordenadas cartesiano se ubica en el centro de la trayectoria circular, el cual se encuentra igual que antes en el plano caracterizado por $z = 0$. La ruta ahora, por estar peraltada, no está comprendida en el mismo plano.

la primer ecuación por $-\sin\alpha$ y la segunda por $\cos\alpha$, y sumar ambas. De cualquiera de las dos maneras, podemos obtener:

$$F_{r_{\text{est}}} = mR\dot{\theta}^2\cos\alpha - mg\sin\alpha = m\frac{v^2}{R}\cos\alpha - mg\sin\alpha \tag{25}$$

$$N = mR\dot{\theta}^2\sin\alpha + mg\cos\alpha = m\frac{v^2}{R}\sin\alpha + mg\cos\alpha\ . \tag{26}$$

Si imponemos la condición, $F_{r_{\text{est}}} = m\frac{v^2}{R}\cos\alpha - mg\sin\alpha \leq F_{r_{\text{est,M}}} = \mu_e N = \mu_e(m\frac{v^2}{R}\sin\alpha + mg\cos\alpha)$ y despejamos con paciencia v, podemos ver que $v \leq \sqrt{\mu_e g R\frac{\cos\alpha + \mu_e^{-1}\sin\alpha}{\cos\alpha - \mu_e\sin\alpha}}$. Lo importante de todo esto es que se puede probar que la velocidad máxima para que el automóvil no derrape en este caso es mayor que la del caso sin peralte.

Incluso valdría la pena preguntarse, dada una velocidad, cuál debe ser el mínimo ángulo de inclinación de la ruta para que el auto no deslice sin que haga falta rozamiento. Se puede ver que esto ocurre si $\alpha = \arctan(\frac{v^2}{Rg})$. O al revés, podríamos querer saber cuál es la máxima velocidad que puede tener un automóvil en una ruta con una dada inclinación para no deslizar sin considerar rozamiento (problema 9). Eso equivaldría a pedir $F_{r_{\text{est}}} = 0$ en las ecuaciones anteriores (o bien plantear las ecuaciones de Newton desde el inicio, sin rozamiento; sugiero esta última opción para el problema 9).

Es decir que el peralte "colabora" en pos de evitar el descarrilamiento de los vehículos, en particular en curvas cerradas. Lo que cambia entre el caso con inclinación o sin ella es que al existir peralte la fuerza normal de vínculo entre el móvil y la ruta posee una componente en la dirección centrípeta. Cuando no hay peralte, este rol debe desempeñarlo únicamente la fuerza de rozamiento estático.

5 Un acercamiento al problema 12 (optativo pero importante) y algunos comentarios

Considere una partícula de masa 800g sujeta a una varilla rígida de 50cm de longitud que le comunica un movimiento circular uniforme en un plano vertical. (a) ¿Es cierto que la fuerza que la varilla ejerce sobre la partícula tiene dirección radial únicamente? (b) Calcule la fuerza de vínculo en el punto mas alto de la trayectoria circular si la velocidad angular es $w = 6\text{seg}^{-1}$. Repita para $w = 3\text{seg}^{-1}$ y analice el cambio de sentido de la fuerza. (c) Halle la fuerza de vínculo entre la varilla y la partícula en función del ángulo que forma con la vertical.

Como siempre, comencemos el problema intentando ubicar el sistema de coordenadas. Para eso, notemos que el problema aclara que la partícula se mueve en el plano vertical, es decir que el plano en el que se encuentra su trayectoria es perpendicular al piso. Esto implica que $\vec{g}$ se encuentra en el plano de movimiento. Esta es la primer novedad del problema respecto a los otros de la guía. Intentemos definir un ángulo y elegir un sistema de coordenadas que facilite las cuentas lo más posible. Podemos por ejemplo ubicar un sistema de coordenadas cartesiano tal que la dirección x coincida con la de $\vec{g}$ (hacia abajo), la dirección y perpendicular a la primera también sobre dicho plano, y la dirección z perpendicular a ambas. Podemos parametrizar el movimiento del cuerpo mediante un ángulo θ que valga cero cuando la partícula se encuentre en el punto inferior de su trayectoria y creciente de x a y. De esta manera podemos ubicar un sistema de coordenadas polares, apuntando el versor $\hat{r}$ en la dirección que une el eje de movimiento del sistema (centro de la trayectoria circular) con la partícula, y el versor $\hat{\theta}$ en el sentido en el que crece el ángulo homónimo. En la Fig.7 se muestra un esquema del sistema de coordenadas elegido.

Una salvedad antes de empezar: recuerde que en este problema vamos a considerar que la varilla es irrompible y a la vez “no tiene masa”, o mejor dicho, que su masa es despreciable (por ser mucho menor) en comparación con la del cuerpo. Solemos hacer esta aproximación con sogas y poleas, considerándolas “ideales”.

Pensemos luego en las fuerzas que siente el cuerpo. Desde ya, debido a la fuerza de atracción gravitatoria debemos considerar el peso. Note que la descomposición de dicha fuerza en el sistema de coordenadas polares que elegimos depende de la posición de la partícula, es decir, de θ. Sin embargo, está claro que si esta fuera la única fuerza presente la partícula no podría efectuar un MCU. Para que el movimiento sea circular mínimamente debe existir una aceleración centrípeta (radial, hacia adentro) en todo momento de la trayectoria. Por lo tanto debe existir una fuerza adicional radial, que también probablemente dependa del ángulo. Además para que el movimiento circular sea de tipo MCU, la velocidad angular debe ser constante, lo cual implica que $a_\theta = 0$. Dado que en algunos tramos de la trayectoria el peso posee una componente en la dirección de $\hat{\theta}$, deberá existir alguna fuerza que la compense. ¿Cómo logramos esto? Pues bien, el problema aclara que la varilla “le comunica un movimiento circular uniforme”, por lo tanto el sistema de la varilla deberá realizar la fuerza necesaria para que esto ocurra. Es decir que debe existir una fuerza de vínculo ($\vec{F_v}$) que siente el cuerpo debida a la varilla y que además tenga componente en ambas direcciones y dependa del ángulo. Por este motivo, plantearemos el caso más general que es una fuerza de vínculo $\vec{F_v} = F_{v_r}\hat{r} + F_{v_\theta}\hat{\theta}$ (ver Fig.7)[4].

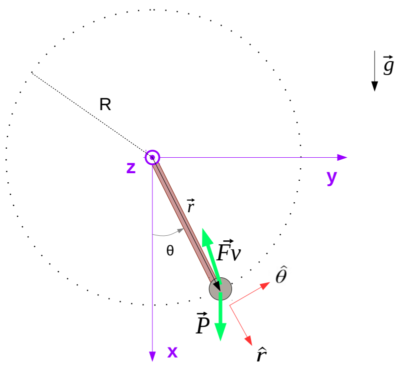


Figure 7: Esquema del problema 12. Una varilla rígida comunica a un cuerpo un movimiento circular uniforne de radio R en el plano vertical. Sistema de coordenadas cartesianas y polares, y fuerzas que siente el cuerpo (en verde).

Observación: Cuando realice los diagramas de cuerpo libre y la descomposición de las fuerzas en polares, para poder realizar correctamente la descomposición vectorial en función del ángulo le sugiero ubicar los objetos cuyas fuerzas va a analizar en posiciones que no sean “especiales”, es decir, en ubicaciones donde las fuerzas no estén perfectamente alineadas con los ejes. Por ejemplo en este caso, evite realizar el diagrama de cuerpo libre en valores de $\theta = 0, \pi/2, \pi, ...$, pues puede llegar perderse la dependencia angular en el proceso y llegar a ecuaciones erróneas o que valgan en una sola posición.

Ahora sí, recordando que el movimiento que impone la varilla al cuerpo es de tipo MCU (es decir que $\ddot{\theta} = 0$ y $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$), descomponemos las fuerzas en los versores polares y escribimos las ecuaciones de Newton (obviaremos la ecuación en z pues resulta trivial):

[4]En lugar de escribir las componentes, equivalentemente podríamos también escribir la fuerza usando su módulo y ángulo y descomponer el vector en coordenadas polares.

$$\hat{r}) - F_{v_r} + mg\cos\theta = ma_r = m(-R\dot{\theta}^2) \Rightarrow F_{v_r} = mR\omega^2 + mg\cos\theta \qquad (27)$$

$$\hat{\theta}) F_{v_\theta} - mg\sin\theta = ma_\theta = m(R\ddot{\theta}) = 0 \Rightarrow F_{v_\theta} = mg\sin\theta \ . \qquad (28)$$

Como esperábamos, la componente en $\hat{\theta}$ de la fuerza de vínculo que realiza la varilla actúa compensando la componente del peso en esa dirección para que la velocidad angular se mantenga constante en todo el recorrido. Mientras que la componente en $\hat{r}$ depende de la proyección del peso en dicho eje y de la velocidad angular, en tanto es responsable de la aceleración centrípeta que caracteriza al movimiento circular. La fuerza de vínculo es entonces:

$$\vec{F_v} = -(mR\omega^2 + mg\cos\theta)\ \hat{r}\ +\ (mg\sin\theta)\ \hat{\theta} \qquad (29)$$

Corroboremos que las unidades sean las correctas y analicemos el resultado (la física del problema). Pensemos por ejemplo, en el punto más bajo de la trayectoria, $\theta = 0$. Si reemplazamos este valor en la expresión que obtuvimos para la fuerza de vínculo vemos que $\vec{F_v} = (-mR\omega^2 - mg)\hat{r}$, con lo cual ésta compensa el peso (que se encuentra únicamente en $\hat{r}$) y ademas aporta la componente centrípeta a la aceleración. Cuando la varilla se encuentra en posición horizontal sobre el eje y, $\theta = \pi/2$, $\vec{F_v} = mR\omega^2\hat{r} + mg\hat{\theta}$, pues el peso en ese punto apunta en $\hat{\theta}$. Por último, veamos que cuando la varilla llega al punto máximo de la trayectoria, $\theta = \pi$, entonces $\vec{F_v} = (mg - mR\omega^2)\hat{r}$, con lo cual la fuerza de vínculo compensa lo que le falta al peso para mantener la aceleración radial necesaria. Note que en este punto, la componente radial de la fuerza de vínculo puede ser positiva o negativa (es decir que apunta hacia afuera o hacia adentro) dependiendo de la relación entre el peso y el producto ma_r. Observemos además que la componente tangencial de la fuerza de vínculo es positiva (apunta en la dirección de $\hat{\theta}$) para valores de θ en $(0, \pi)$ pues la varilla debe lograr que el cuerpito suba con velocidad constante a pesar de su peso que lo tira hacia abajo, y es negativa en $(\pi, 0)$, pues la varilla debe evitar que este caiga libremente por su propio peso.

Le dejo a usted responder los demás interrogantes de la consigna a partir de esta resolución.

****

Interrogante importante:

Ya que llegamos hasta acá, vayamos un poco más lejos... ¿Cuál es la diferencia en términos de la resolución de este problema entre tener el cuerpo atado a una varilla o a una cuerda? Piénselo un rato...

La clave está en que el problema 12 aclara que la varilla "le comunica un movimiento circular uniforme", lo cual sugiere que está adherida a un eje/motor que rota. Note que una varilla (con uno de sus extremos fijo a un eje móvil o a un motor como en el caso del problema 12), por ser rígida, puede ejercer una fuerza de vínculo tangencial (F_{v_θ}), lo cual no puede lograrse si se reemplaza por una cuerda. Por este motivo sería imposible lograr que un cuerpo describa un MCU en el plano vertical reemplazando simplemente la varilla por una soga.