Práctica N° 2: dinámica. Parte II: fuerza de rozamiento

1. Repaso

Los conceptos que vamos a necesitar tener en claro para resolver los siguientes problemas son:

- La descomposición de fuerzas en los ejes x e y que elijamos.
- Las ecuaciones de Newton.
- La fuerza de rozamiento.

Asumiendo que los dos primeros items son conocidos, haremos un repaso de la fuerza de rozamiento[1]. Obviamente que quien considera que no necesita ver esta parte, puede saltearla.

La fuerza de rozamiento es una fuerza que modela la fricción que hay entre dos cuerpos que están en contacto y se opone al movimiento relativo entre estos. El tipo de fricción que actúa cuando un cuerpo se desliza sobre una superficie es la fuerza de fricción cinética. El adjetivo "cinética" o "dinámica" y el subíndice "k" o "k" nos recuerdan que las dos superficies se mueven una relativa a la otra. La magnitud de esta fuerza suele aumentar al aumentar la fuerza normal. Por ello, se requiere más fuerza para deslizar por el piso una caja llena de libros, que la misma caja vacía. En muchos casos, la magnitud de la fuerza de fricción cinética f_k experimental es aproximadamente proporcional a la magnitud n de la fuerza normal. En tales casos, representamos la relación con la ecuación:

$$f_k = \mu_k . n \tag{1}$$

donde μ_k es una constante llamada coeficiente de fricción cinética. Cuanto más resbalosa sea una superficie, menor será el coeficiente de fricción. Al ser un cociente de dos magnitudes de fuerza, μ_k es un número sin unidades.

Las fuerzas de fricción también pueden actuar cuando no hay movimiento relativo. Si tratamos de deslizar por el piso la caja con libros, tal vez no se mueva porque el piso ejerce una fuerza de fricción igual y opuesta sobre la caja. Ésta se llama fuerza de fricción estática En la figura 1, la caja está en reposo, en equilibrio, bajo la acción de su peso y la fuerza normal hacia arriba La fuerza normal es igual en magnitud al peso ($n = w$) y ejercida por el piso sobre la caja. Ahora atamos una cuerda a la caja (figura 1) y gradualmente aumentamos la tensión T en la cuerda. Al principio, la caja no se mueve porque, al aumentar T, la fuerza de fricción estática f_s también aumenta (su magnitud se mantiene igual a T). En algún momento, T se vuelve mayor que la fuerza de fricción estática f_s máxima que la superficie puede ejercer; después, la caja "se suelta" (la tensión T puede romper las interacciones entre las moléculas de las superficies de la caja y el piso) y comienza a deslizarse. La figura 1c muestra las fuerzas cuando T tiene este valor crítico. Si T excede dicho valor, la caja ya no estará en equilibrio. Para un par de superficies dado, el valor máximo de f_s depende de la fuerza normal. Los experimentos han revelado que, en muchos casos, ese valor máximo, llamado $(f_s)_{max}$, es aproximadamente proporcional a n; llamamos coeficiente de fricción estática al factor de proporcionalidad m_s. En una situación específica, la fuerza de fricción estática real puede tener cualquier

[1] El repaso fue tomado de las páginas 149 a 152 del libro Física Universitaria 1 - Sears, Zemansky - 12^{va} edición.

magnitud entre cero (cuando no hay otra fuerza paralela a la superficie) y un valor máximo dado por $\mu_s.n$. En símbolos,

$$f_s \leq \mu_s.n \tag{2}$$

Al igual que la ecuación 1, ésta es una relación entre magnitudes, no de vectores. La igualdad sólo se cumple cuando la fuerza aplicada T alcanza el valor crítico en que el movimiento está a punto de iniciar (figura 1c). Si T es menor que este valor (figura 1b), se cumple la desigualdad y debemos usar las condiciones de equilibrio para obtener f_s. Si no se aplica fuerza ($T = 0$), como en la figura 1a, tampoco hay fuerza de fricción estática ($f_s = 0$). Apenas inicia el deslizamiento de la caja (figura 1d), la fuerza de fricción suele disminuir; es más fácil mantener la caja en movimiento que ponerla en movimiento. Por lo tanto, *el coeficiente de fricción cinética suele ser menor que el de fricción estática para un par de superficies dado*. Si comenzamos con cero fuerza aplicada ($T = 0$) y aumentamos gradualmente la fuerza, la fuerza de fricción varía un poco, como se muestra en la figura 1e.

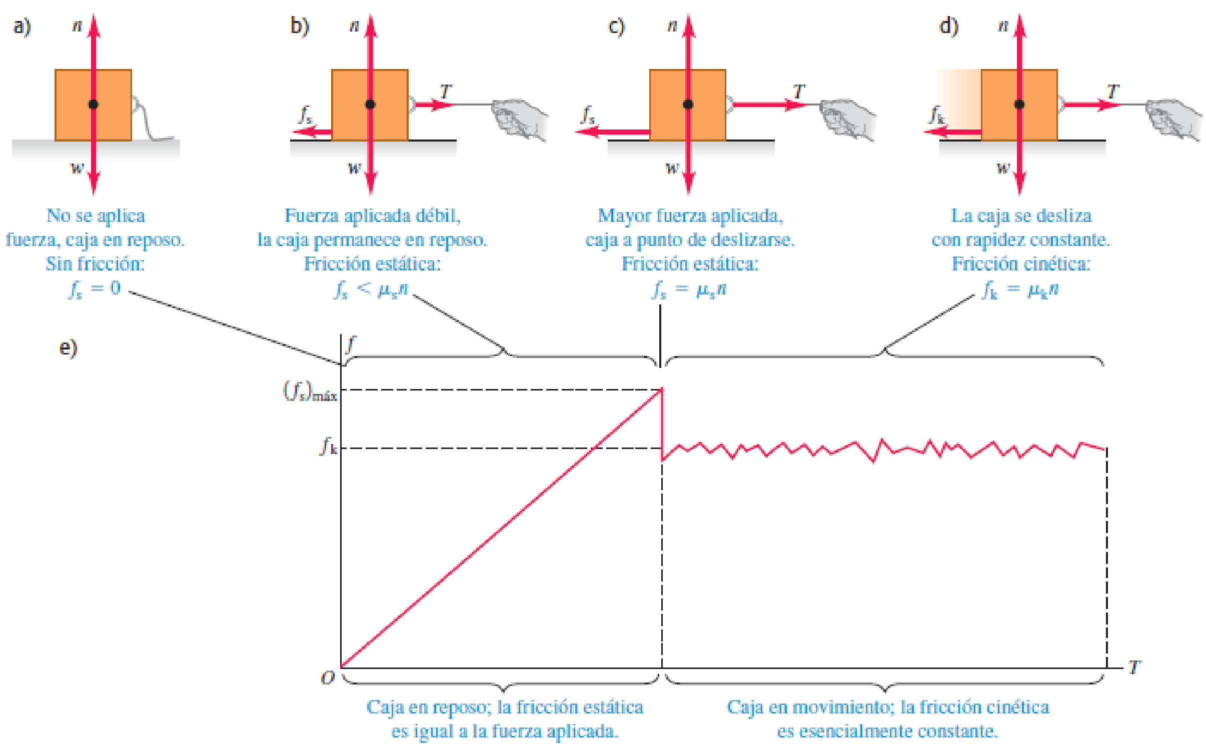

Figura 1: a), b), c) Si no hay movimiento relativo, la magnitud de la fuerza de fricción estática f_s es igual o menor que $\mu_s.n$. d) Si hay movimiento relativo, la magnitud de la fuerza de fricción cinética f_k es igual a $\mu_k.n$. e) Gráfica de la magnitud de la fuerza de fricción f en función de la magnitud de la fuerza aplicada T. La fuerza de fricción cinética varía un poco conforme se forman y se rompen los enlaces intermoleculares.

En los ejercicios que siguen, no usaré la notación del libro sino que la notación que usaré es la siguiente:

$$\begin{aligned} n &\longrightarrow N \\ f_k = \mu_k.n &\longrightarrow F^d_{roz} = \mu_d.N \\ f_s = \mu_s.n &\longrightarrow F^e_{roz} = \mu_e.N \end{aligned} \tag{3}$$

Ahora estamos en condiciones de arrancar con los ejercicios.

2. Ejercicios 10, 11 y 14

10. Siempre conviene empezar los problemas haciendo un dibujo y anotando los datos que podemos en el dibujo[2].
Tomaremos un sistema de referencia con el eje x solidario a la soga y el eje y perpendicular en el sentido normal al plano inclinado (ver figura 2). Generalmente, este sistema de referencia es el más práctico para resolver cálculos de planos inclinados.
Anotemos los datos importantes:

    - $\mu_e = 0.05$
    - $\mu_d = 0.01$
    - $m_1 = 5\ kg$
    - $m_2 = 12\ kg$
    - $\alpha = 30°$

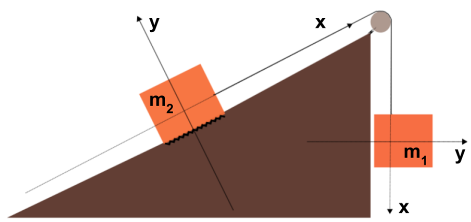

Figura 2: Esquema del ejercicio 10. Tomamos un sistema de referencia tal que el eje x está alineado con la soga y el eje y perpendicular en el sentido normal al plano inclinado. Generalmente, este sistema de referencia es el más práctico para resolver cálculos de planos inclinados. Hay rozamiento entre el plano y el cuerpo de masa m_2 y sus coeficientes son μ_d y μ_e. Para que las cajas no se muevan entonces el rozamiento entre ellas tiene que ser estático.

Una vez que realizamos los diagramas de cuerpo libre (figuras 3 y 4), estamos en condiciones de plantear las ecuaciones de Newton. Empecemos por el cuerpo de masa m_1:

$$\begin{aligned} \sum_i F_{1x}^i &= m_1.a_{1x} \\ P_1 - T_1 &= m_1.\underbrace{a_{1x}}_{a_1} \end{aligned} \tag{4}$$

Ahora pasemos al cuerpo de masa m_2:

$$\begin{aligned} \sum_i F_{2x}^i &= m_2.a_{2x} \\ T_2 - P_{2x} + F_{roz} &= m_2.\underbrace{a_{2x}}_{a_2} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \sum_i F_{2y}^i &= m_2.a_{2y} \\ N - P_{2y} &= m_2.\underbrace{a_{2y}}_{=0} \end{aligned} \tag{6}$$

[2]También conviene anotar los demás datos en algún lado para tenerlos a mano y no buscar en el enunciado.

Antes de seguir veamos qué implicancias tienen las condiciones ideales de la soga:

- La soga es de masa despreciable entonces si tomamos un punto cualquiera de la soga y planteamos la ecuación de Newton en la dirección de la soga obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_i F^i_{sx} &= m_s.a_{sx} \\ T_2 - T_1 &= \underbrace{m_s}_{\approx 0}.a_{sx} \\ \Longrightarrow T_2 &= T_1 \equiv T \end{aligned} \tag{7}$$

  Es decir que las tensiones son iguales con lo cual usaremos directamente T.

- La soga es inextensible entonces tenemos una relación que vincula la posición de las masas, a esta relación la llamamos comúnmente *condición de vínculo*[3]. Sea $l = cte$ la longitud de la soga:

$$x_2 + l = x_1$$

  derivando dos veces respecto al tiempo tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_2}{dt^2} &= \frac{d^2x_1}{dt^2} \\ a_2 = a_1 &\equiv a \end{aligned} \tag{8}$$

  Es decir que las aceleraciones son iguales con lo cual usaremos directamente a.

Teniendo en cuenta estas condiciones, las ecuaciones 4, 5 y 6 quedan de la siguiente manera:

$$\begin{cases} P_1 - T & = m_1.a \\ T - P_{2x} + F_{roz} & = m_2.a \\ N & = P_{2y} \end{cases} \tag{9}$$

Además sabemos que $P_1 = m_1.g$ y, descomponiendo el peso P_2 en los ejes x e y, obtenemos $P_{2x} = P_2.sen(30°)$ y $P_{2y} = P_2.cos(30°)$ (ver figura 4).

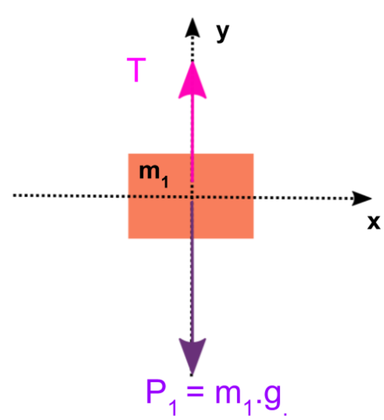

Figura 3: Diagrama de cuerpo libre para el cuerpo con masa m_1.

[3]Cuando les falte una ecuación para resolver un problema de dinámica, piensen si no se olvidaron de plantear la condición de vínculo

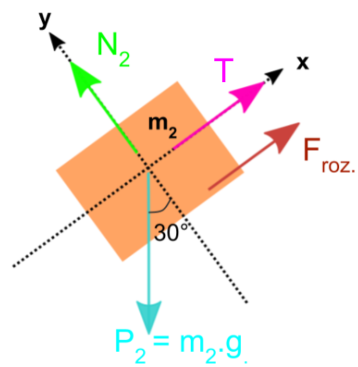

Figura 4: Diagrama de cuerpo libre para el cuerpo con masa m_2.

Hasta acá ya hicimos la parte más pesada del ejercicio. Ahora queda usar lo que tenemos para resolver los incisos a) y b).

a) Para que el sistema esté en equilibrio $a = 0$[4]. De plantear esto obtenemos:

$$\begin{cases} P_1 & = T \\ T + F^e_{roz} & = P_{2x} \end{cases} \tag{10}$$

Sustituyendo la primer igualdad en la segunda obtenemos:

$$\begin{aligned} P_1 + F^e_{roz} &= P_{2x} \\ F^e_{roz} &= P_{2x} - P_1 \end{aligned} \tag{11}$$

Para que el sistema esté en equilibrio, la fuerza de rozamiento debe poder compensar el valor de $P_{2x} - P_1$. Veamos si esto es posible considerando que $F^e_{roz} \leq \mu_e.N$ y que $N = P_{2x}$:

$$\begin{aligned} &\mu_e.P_{2x} \overset{?}{\leq} P_2.sen(30°) - P_1 \\ &\mu_e.P_{2x} \overset{?}{\leq} m_2.g.sen(30°) - m_1.g \\ &\underbrace{3\sqrt{3}}_{\approx 5{,}2N}\ N \overset{?}{\leq} 10N \end{aligned} \tag{12}$$

Lo que significa que la respuesta es que no, **no es posible que el sistema esté en equilibrio**.

b) Si sumamos miembro a miembro las primeras dos igualdades del sistema de ecuaciones 9 obtenemos:

$$\begin{aligned} P_1 \cancel{-T} \cancel{+T} - P_{2x} + F^d_{roz} &= m_1.a + m2.a \\ P_1 - P_{2x} + F^d_{roz} &= (m_1 + m2).a \\ \frac{P_1 - P_{2x} + F^d_{roz}}{m_1 + m2} &= a \end{aligned} \tag{13}$$

$$\boxed{-0,53\frac{m}{s^2} \approx a}$$

Para hacer la cuenta utilizamos que $F^d_{roz} = \mu_d.N$.

[4]Además deberíamos tener una velocidad inicial nula, recuerden el corolario de la 1^{era} ley de Newton: Si el cuerpo está inicialmente en reposo, permanece en reposo; si está inicialmente en movimiento, sigue moviéndose con velocidad constante.

11. Este problema es matemáticamente simple pero conceptualmente complicado al igual que el siguiente. Conviene empezar considerando el esquema del problema (figura 5) y los datos relevantes:

   - $m_1 = 3\,kg$
   - $m_2 = 5\,kg$
   - $\mu_e = 0,2$
   - $\mu_d = 0,1$

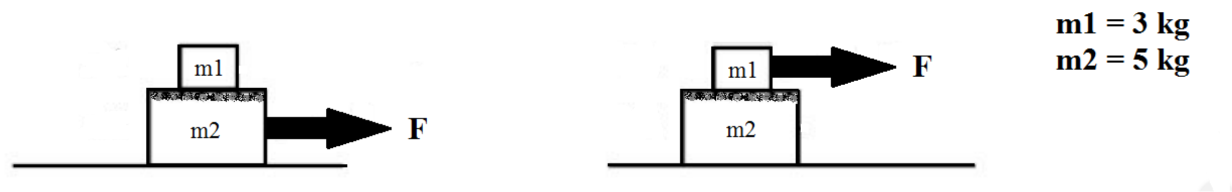

Figura 5: Se presentan las dos situaciones mencionadas en el enunciado. La de la izquierda sirve para los incisos a), b) y c); mientras que la de la derecha sirve para el inciso d.

En esta resolución se tomó al eje x horizontalmente con valores crecientes hacia la izquierda y al eje y verticalmente con valores crecientes hacia arriba.

a) y **b)** Una vez que realizamos los diagramas de cuerpo libre (figuras 11 y 11) para la primer situación (esquema de la izquierda de la figura 5), estamos en condiciones de plantear las ecuaciones de Newton.

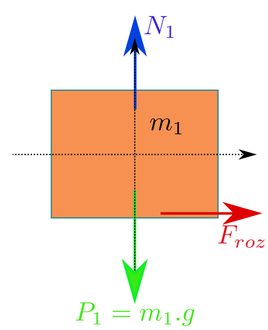

Figura 6: Diagrama de cuerpo libre para el cuerpo con masa m_1. Sirve para los incisos a), b) y c).

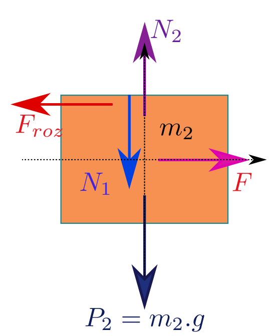

Figura 7: Diagrama de cuerpo libre para el cuerpo con masa m_2. Sirve para los incisos a), b) y c).

Las ecuaciones correspondientes al cuerpo con masa m_1 son:

$$\begin{aligned}\sum_i F^i_{1x} &= m_1.a_{1x}\\ F_{roz} &= m_1.\underbrace{a_{1x}}_{a_1}\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\sum_i F^i_{1y} &= m_1.a_{1y}\\ N_1 - P_1 &= m_1.\underbrace{a_{1y}}_{=0}\\ N_1 &= P_1\end{aligned} \tag{15}$$

Ahora consideremos las ecuaciones para el cuerpo con masa m_2

$$\begin{aligned}\sum_i F^i_{2x} &= m_2.a_{2x}\\ F - F_{roz} &= m_2.\underbrace{a_{2x}}_{a_2}\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\sum_i F^i_{2y} &= m_2.a_{2y}\\ N - P_2 - N_1 &= m_2.\underbrace{a_{2y}}_{=0}\\ N_2 &= P_2 + N_1\end{aligned} \tag{17}$$

Uniendo la información de las ecuaciones 15 y 17 (las del y) obtenemos que:

$$\begin{aligned}N_2 &= P_2 + P_1\\ N_2 &= m_2.g + m_1.g\\ N_2 &= (m_2 + m_1).g\end{aligned} \tag{18}$$

Ahora podemos estamos en condiciones de hallar lo que nos demanda el enunciado:

La fuerza máxima es la fuerza tal que $F^e_{roz} = \mu_e.N$. Como el rozamiento es estático, entonces eso significa que el sistema aún permanece en equilibrio relativo[5], es decir, que ambas cajas se mantienen pegadas. Esto es una *condición de vínculo* e implica que $a_1 = a_2 \equiv a$.
Empecemos por hallar la aceleración, utilizando la ecuación 14 junto con la ecuación 15 tenemos que:

$$\begin{aligned}F^e_{roz} &= m_1.a\\ \mu_e.N_1 &= m_1.a\\ \mu_e.m_1.g &= m_1.a\\ \mu_e.g &= a\end{aligned} \tag{19}$$

$$\boxed{2\frac{m}{s^2} = a}$$

[5]En un equilibrio súper inestable ya que cualquier aumento en la fuerza saca al sistema de este equilibrio. No es lo que se denomina un punto de equilibrio inestable estrictamente porque si la fuerza disminuye, el sistema sigue en equilibrio relativo.

Ahora hallemos la fuerza a partir de la ecuación 16 y la ecuación 15

$$\begin{aligned} F - \mu_e.N_1 &= m_2.a \\ F &= m_2.a + \mu_e.N_1 \\ F &= m_2.\mu_e.g + \mu_e.m_1.g \\ F &= (m_1 + m_2).\mu_e.g \end{aligned} \tag{20}$$

$$\boxed{F = 16\,N}$$

Prestemos especial atención a la anteúltima línea de esta cuenta. Si definimos $m_{ef} \equiv m_1 + m_2$ entonces $F = m_{ef}.\mu_e.g$. Esto se interpreta como que ambas cajas podrían ser reemplazadas por una caja con masa m_{ef} y el problema sería equivalente. Esto es consecuencia del rozamiento estático que hace que las masas no se despeguen.

c) Consideremos ahora una fuerza de $F = 2.16\,N = 32\,N$. En este caso, las cajas ya no estarán en equilibrio relativo, es decir, se moverán una respecto de la otra porque $F > \mu_e.N_1$. Esto quiere decir que cada caja tiene su aceleración. Para hallar la aceleración de la caja con masa m_1 utilizamos las ecuaciones 14 y 15:

$$\begin{aligned} F^d_{roz} &= m_1.a_1 \\ \mu_d.N_1 &= m_1.a_1 \\ \mu_d.m_1.g &= m_1.a_1 \\ \mu_d.g &= a_1 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\boxed{1\frac{m}{s^2} = a_1}$$

Para hallar la aceleración de la caja con masa m_2 utilizamos las ecuaciones 16 y 17:

$$\begin{aligned} F - \mu_d.N_1 &= m_2.a_2 \\ F - \mu_d.m_1.g &= m_2.a_2 \\ \frac{F}{m_2} - \mu_d.g &= a_2 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\boxed{5,8\frac{m}{s^2} = a_2}$$

d) Para este inciso tenemos considerar el esquema derecho de la figura 5. Los diagramas de cuerpo libre para esta situación se pueden observar en las figuras 11 y 11.

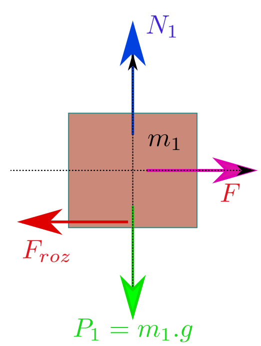

Figura 8: Diagrama de cuerpo libre para el cuerpo con masa m_1. Sirve para el inciso d.

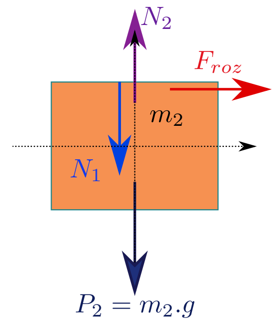

Figura 9: Diagrama de cuerpo libre para el cuerpo con masa m_2. Sirve para el inciso d.

Volvemos a plantear las ecuaciones de Newton en x y hallamos las aceleraciones[6]. Para el cuerpo con masa m_1 tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_i F_{1x}^i &= m_1.a_1 \\ F - F_{roz}^d &= m_1.a_1 \\ F - \mu_d.N_1 &= m_1.a_1 \\ \frac{F}{m_1} - \mu_d.g &= a_1\end{aligned} \tag{23}$$

$$\boxed{4,\widehat{3}\frac{m}{s^2} = a_1}$$

Mientras que para el cuerpo con masa m_2 tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_i F_{2x}^i &= m_2.a_{2x} \\ F_{roz}^d &= m_2.a_2 \\ \mu_d.N_1 &= m_2.a_2 \\ \mu_d.m_1.g &= m_2.a_2 \\ \mu_d.\frac{m_1}{m_2} &= a_2\end{aligned} \tag{24}$$

$$\boxed{0.6\frac{m}{s^2} = a_2}$$

3. Ejercicio 17 (optativo)

Necesitamos las expresiones de la fuerza viscosa y de la *Ley de Stokes* que van a ser útiles para hacer los ejercicios optativos:

$$\begin{aligned}F_{vis} &= -\gamma.v \\ \text{con } \gamma &= 6\pi.\eta.r\end{aligned} \tag{25}$$

donde η es la viscosidad y r es el radio.

[6]Como las fuerzas en la dirección y siguen siendo las mismas, las ecuaciones de Newton en dirección y también.

17. A partir de la ecuación de Newton en la dirección del movimiento[7], la expresión de la fuerza viscosa y teniendo en cuenta que $a = \frac{dv}{dt} \equiv \dot{v}$ podemos obtener una ecuación diferencial para la velocidad:

$$\begin{aligned} F_{vis} &= m.a \\ -\gamma.v &= m.\frac{dv}{dt} \\ -\gamma.v &= m.\dot{v} \\ -\frac{\gamma}{m}.v &= \dot{v} \end{aligned} \tag{26}$$

Se puede notar que la derivada de la velocidad, $\dot{v}$, y la velocidad v son **proporcionales**. La función que cumple que es proporcional a su derivada es la exponencial, por lo tanto vamos a proponer una solución que tenga esta forma funcional

$$v(t) = A.e^{b.t} \tag{27}$$

donde A es la constante de integración. Para hallar b podemos reemplazar esta $v(t)$ en la ecuación 26:

$$\begin{aligned} -\frac{\gamma}{m}.v(t) &= \dot{v}(t) \\ -\frac{\gamma}{m}\cancel{A.e^{b.t}} &= b.\cancel{A.e^{b.t}} \\ -\frac{\gamma}{m} &= b \end{aligned} \tag{28}$$

entonces $v(t) = A.e^{-\frac{\gamma}{m}.t}$. Podemos llamar v_0 a la constante A de manera que:

$$v(t) = v_0.e^{-\frac{\gamma}{m}.t} \tag{29}$$

Teniendo en cuenta el dato del enunciado $v(t = 0\,s) = v_0 = 25\frac{\mu m}{s}$, ya tenemos la expresión para la velocidad.

Para responder la pregunta, **¿Cuán lejos llegará?**, necesitamos hallar $x(t)$. Para eso integraremos la expresión de $v(t)$ que obtuvimos (ecuación 29):

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0.e^{-\frac{\gamma}{m}.t} \\ \frac{dx}{dt}(t) &= v_0.e^{-\frac{\gamma}{m}.t} \\ dx &= v_0.e^{-\frac{\gamma}{m}.t}.dt \end{aligned} \tag{30}$$

En esta última expresión conviene pensar a las variables x e t como variables independientes porque pudimos separarlas en una igualdad cuyos miembros dependen de cada variable por separado, el izquierdo depende de x (de hecho es 1) y el de la derecha depende de t ($v_0.e^{-\frac{\gamma}{m}.t}$). Por esta razón este método se llama *variables separables* o *separación de variables*. Para integrar consideraremos variables

[7] Suponemos que es un movimiento rectilíneo.

de integración x' y t'

$$\begin{aligned}
dx' &= v_0.e^{-\frac{\gamma}{m}.t'}.dt' \\
\int_{x_0}^{x} dx' &= \int_{t_0}^{t} v_0.e^{-\frac{\gamma}{m}.t'}.dt' \\
x'\Big|_{x_0}^{x} &= v_0.\frac{e^{-\frac{\gamma}{m}.t'}}{-\frac{\gamma}{m}}\Bigg|_{t_0}^{t} \\
x - \underbrace{x_0}_{=0} &= -\frac{v_0.m}{\gamma}.\left(e^{-\frac{\gamma}{m}.t} - e^{-\frac{\gamma}{m}.\overbrace{t_0}^{}_{=0}}\right) \\
x(t) &= -\frac{v_0.m}{\gamma}.\left(e^{-\frac{\gamma}{m}.t} - 1\right) \\
x(t) &= \frac{v_0.m}{\gamma}.\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}.t}\right)
\end{aligned} \tag{31}$$

Para saber cuál será la posición final a la que llegará la bacteria tenemos que calcular $x(t \to \infty)$.

$$\begin{aligned}
x(t \to \infty) &= \lim_{t \to \infty} \frac{v_0.m}{\gamma}.\left(1 - \underbrace{e^{-\frac{\gamma}{m}.t}}_{\to 0}\right) \\
x(t \to \infty) &= \frac{v_0.m}{\gamma}
\end{aligned} \tag{32}$$

Aquí tenemos que usar la expresión de la ley de Stokes y la relación de la densidad $\rho = \frac{m}{V}$:

$$\begin{aligned}
x(t \to \infty) &= \frac{v_0.m}{\gamma} \\
x(t \to \infty) &\underset{m=\rho.V}{=} \frac{v_0.\rho.V}{\gamma} \\
x(t \to \infty) &\underset{\gamma=6\pi.\eta.r}{=} \frac{v_0.\rho.V}{6\pi.\eta.r}
\end{aligned} \tag{33}$$

Suponiendo que la bacteria tiene una forma esférica y un radio $r = 1\,\mu m$ tenemos que $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, con lo cual:

$$\begin{aligned}
x(t \to \infty) &\underset{\gamma=6\pi.\eta.r}{=} \frac{v_0.\rho.V}{6\pi.\eta.r} \\
x(t \to \infty) &\underset{V=\frac{4}{3}\pi r^3}{=} \frac{v_0.\rho.\frac{4}{3}.\pi.r^3}{6\pi.\eta.r} \\
x(t \to \infty) &= \frac{v_0.\rho.2.r^2}{9.\eta} \\
x(t \to \infty) &= \tfrac{2}{9}\frac{v_0.\rho.r^2}{\eta}
\end{aligned} \tag{34}$$

Sólo nos queda reemplazar los valores que nos da el enunciado **suponiendo que la bacteria está en un medio acuoso**, $\eta = 10^{-2}\frac{g}{cm.s}$:

$$\begin{aligned}
x(t \to \infty) &= \tfrac{2}{9}\frac{v_0.\rho.r^2}{\eta} \\
x(t \to \infty) &= \frac{50}{9} \times 10^{-12}\, m
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\boxed{x(t \to \infty) = 5,\widehat{5} \times 10^{-12}\, m}$$

Esta es la posición final y como tomamos x_0 equivale al recorrido total de la bacteria.