Mecánica y termodinámica 1c2020
Curso: P. Balenzuela Clase 7 – 12/05/2020

Movimiento oscilatorio

Existen muchos problemas en la naturaleza que consisten en un comportamiento que se repite de forma periódica en el tiempo. Un ejemplo clásico es el de una masa en un resorte: si se la deja oscilar libremente —sin rozamiento—, va a moverse de un extremo hacia el otro y luego volver al inicio, para repetir el esquema nuevamente. Este comportamiento se denomina *movimiento oscilatorio*.

En la clase de hoy vamos a estudiar la primera parte de la Guía 4 —ejercicios 1 a 6—, que trata sobre la cinemática del movimiento oscilatorio. Vamos a hacer un repaso de los conceptos que deben tener claros y luego resolveremos algunos ejercicios para que ustedes puedan enfrentarse al resto. Vamos a hablar también, en menor medida, del ejercicio 7; esto nos va a dar una introducción a la dinámica del movimiento oscilatorio que vamos a profundizar durante la próxima clase.

Como queremos describir un movimiento oscilatorio, donde la posición de una partícula varía periódicamente, es natural pensar que vamos a tener que hacer uso de funciones que presenten este comportamiento. Efectivamente, las funciones coseno y seno son adecuadas para esto, y dan lugar a un movimiento oscilatorio denominado *movimiento armónico simple* (MAS).

Para describir la posición en función del tiempo podemos usar una expresión de la forma

$$x(t) = A\cos\left(\omega t + \phi\right). \tag{1}$$

La *amplitud* A está relacionada con el valor máximo y el valor mínimo que alcanza la posición. Como la función conseno (y también el seno) varía entre -1 y 1, la posición varía entre $x_{\max} = A$ y $x_{\min} = -A$, dando un rango de $2A$ a la oscilación.

La *frecuencia angular* ω es la velocidad de la oscilación en radianes por unidad de tiempo. No se confundan con esto, que haya un ángulo implícito en esta magnitud no quiere decir que físicamente exista un ángulo en el problema que se está tratando. Lo que ocurre es que hay una relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular uniforme, pero no vamos a entrar en ese detalle aquí.

La *fase* ϕ tiene la función de desplazar el coseno en el eje x. Sabemos que $\cos x$ vale 1 cuando $x = 0$. La fase cambia este comportamiento, llegando incluso a transformar el coseno en un seno. Esto lo vamos a ver en uno de los ejercicios que vamos a resolver en breve.

Definimos la *frecuencia* f como la cantidad de ciclos que completa la partícula por unidad de tiempo. No tenemos que confundirla con la frecuencia angular ω. De hecho, ambas están relacionadas por

$$f = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{2}$$

Definimos el *período* T de la oscilación como el tiempo que tarda la partícula en realizar un ciclo completo del movimiento. De esta forma, se relaciona con la frecuencia y con la frecuencia angular por la ecuación

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{3}$$

Antes de zambullirnos en los ejercicios, hablemos de las unidades de todas estas magnitudes. La amplitud tiene unidad de longitud, como por ejemplo, metro (m). La frecuencia angular ω tiene unidad de tiempo elevado a la menos uno (s^{-1}). La fase es una magnitud adimensional (tradicionalmente está expresada en radianes, pero también puede usarse el grado). La frecuencia f también tiene unidad de tiempo elevado a la menos uno, pero en lugar de escribir s^{-1} se suele usar el *hertz* o Hz. Finalmente, el período tiene unidad de tiempo (s).

— Ejercicio 4.1 —

En este ejercicio se nos da la posición de una partícula en función del tiempo en una forma muy similar a la ecuación (1):

$$x(t) = 0{,}057\,\mathrm{m}\cos\left(3{,}9\,\mathrm{s}^{-1}t\right).$$

a) Leer la amplitud, la frecuencia angular y la fase es trivial, sólo hay que comparar la función dada con la ecuación (1) y extraer los valores. La amplitud es el valor que acompaña al coseno, de manera que $A = 0{,}057\,\mathrm{m}$. La frecuencia angular es el que acompaña al tiempo t, o sea que $\omega = 3{,}9\,\mathrm{s}^{-1}$. La fase, por otro lado, es la magnitud que se encuentra "suelta" dentro del coseno. En este caso, la fase es nula: $\phi = 0$.

El período y la frecuencia son magnitudes derivadas de las anteriores. Es decir, podemos calcularlas en base a las que hallamos antes. Usando las ecuaciones que vimos en la introducción podemos obtener

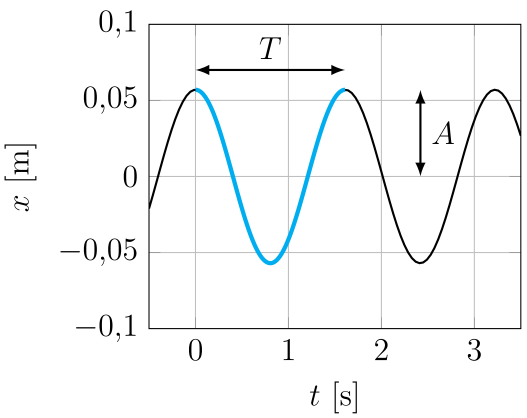
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3{,}9\,\mathrm{s}^{-1}} = 1{,}61\,\mathrm{s},$$

y

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3{,}9\,\mathrm{s}^{-1}}{2\pi} = 0{,}62\,\mathrm{Hz}.$$

Lo que quieren decir estos valores es que cada ciclo del movimiento tarda 1,61 s en completarse y que se realizan 0,62 ciclos por segundo.

Si graficamos la función dada, obtenemos el comportamiento oscilatorio que esperamos:



Las flechas indican un período o ciclo del movimiento —marcado también en color— y la amplitud del mismo. Si tomamos varios ciclos y los "pegamos" uno al lado del otro, obtenemos el movimiento completo, como es esperable.

b) Para hallar la velocidad y la aceleración tenemos que derivar con respecto al tiempo —como ya hicimos un montón de veces a lo largo de la materia—. Para esto, dejemos la amplitud y la frecuencia angular escritas de forma general,

$$x(t) = A\cos(\omega t)\,.$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \\ &= -A\omega \sin(\omega t)\,. \end{aligned}$$

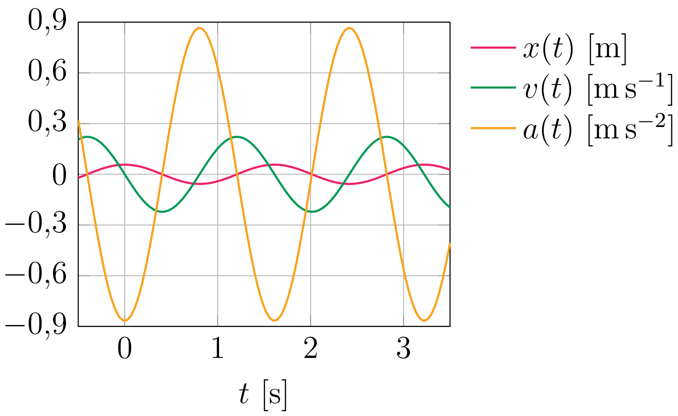
$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \\ &= -A\omega^2 \cos(\omega t)\,. \end{aligned}$$

Si completamos los valores numéricos queda

$$\begin{aligned} x(t) &= 0{,}057\,\mathrm{m}\cos\left(3{,}9\,\mathrm{s}^{-1}t\right), \\ v(t) &= -0{,}222\,\mathrm{m\,s}^{-1}\sin\left(3{,}9\,\mathrm{s}^{-1}t\right), \\ a(t) &= -0{,}867\,\mathrm{m\,s}^{-2}\cos\left(3{,}9\,\mathrm{s}^{-1}t\right). \end{aligned}$$

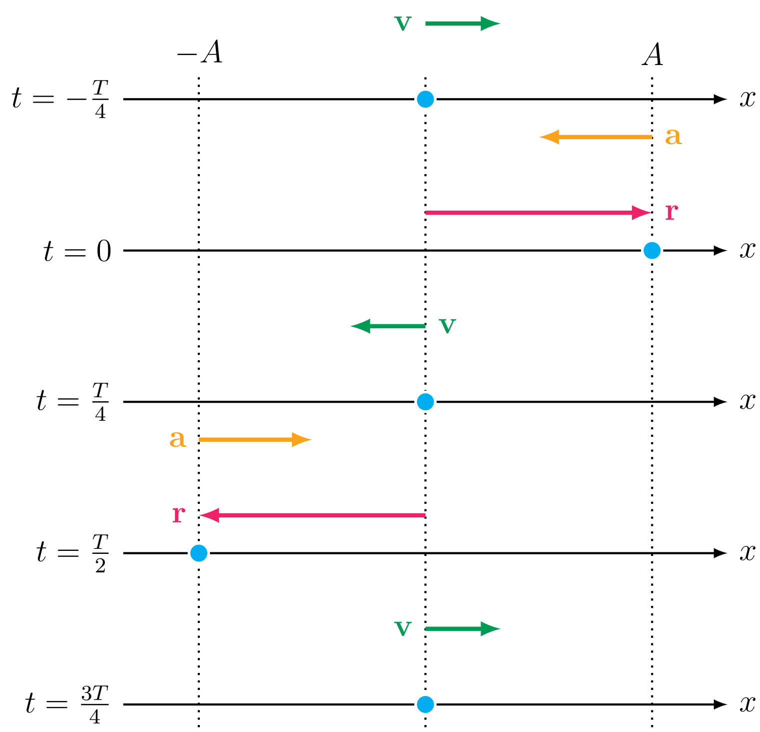
Noten que el número que acompaña a la función trigonométrica correspondiente cambia para cada una de estas funciones; sin embargo, la amplitud que definimos al principio de la clase es el número que encontramos en la función posición. Noten también que la frecuencia angular es la misma en todas las funciones, lo que quiere decir que tanto la frecuencia como el período de la posición son heredados por la velocidad y la aceleración.

Cuando graficamos la posición, la velocidad y la aceleración en un mismo gráfico, obtenemos lo siguiente:



De este gráfico nos queda claro que los puntos en los que la velocidad es nula la posición es máxima (o mínima) y la aceleración es mínima (o máxima). Por otro lado, en los puntos donde la velocidad es máxima o mínima, tanto la posición como la aceleración son nulas. Esto responde cualitativamente a lo que se pide en el ejercicio 4.2, pero ustedes deberían hacer las cuentas formalmente.

Si bien no se pide en el ejercicio, hagamos una visualización alternativa, indicando los vectores posición, velocidad y aceleración en distintos puntos del movimiento, como se muestra a continuación. Veamos, por ejemplo, la línea $t = 0$. En ese tiempo, la posición es $x(0) = A$ y así lo indicamos con el vector posición $\mathbf{r}$ que se encuentra encima. Por otro lado, la velocidad (que depende del seno) es nula, y, por lo tanto, no indicamos ningún vector velocidad. La aceleración, finalmente, depende de coseno pero tiene un signo negativo, por lo que apunta hacia el origen de coordenadas, como se puede ver en la figura.



c) Como ya tenemos las expresiones para la posición, la velocidad y la aceleración, sólo tenemos que reemplazar $t = 0{,}25\,\mathrm{s}$ y hacer las cuentas. De esta forma, obtenemos

$$\begin{aligned}
x(t = 0{,}25\,\mathrm{s}) &= 0{,}057\,\mathrm{m}\cos\left(3{,}9\,\mathrm{s}^{-1} \times 0{,}25\,\mathrm{s}\right) = 0{,}03\,\mathrm{m},\\
v(t = 0{,}25\,\mathrm{s}) &= -0{,}222\,\mathrm{m\,s}^{-1}\sin\left(3{,}9\,\mathrm{s}^{-1} \times 0{,}25\,\mathrm{s}\right) = -0{,}18\,\mathrm{m/s},\\
a(t = 0{,}25\,\mathrm{s}) &= -0{,}867\,\mathrm{m\,s}^{-2}\cos\left(3{,}9\,\mathrm{s}^{-1} \times 0{,}25\,\mathrm{s}\right) = -0{,}49\,\mathrm{m/s}^2.
\end{aligned}$$

d) La función coseno con la que empezamos trabajando tenía fase nula. En este inciso se nos pide describir el *mismo* movimiento haciendo uso del seno en lugar del coseno. Para esto, es útil recordar las relaciones trigonométricas de la suma de ángulos[1]:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,\\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha.
\end{aligned}$$

[1] No vamos a dar la demostración de estas expresiones, pero pueden encontrarla con una búsqueda rápida en internet.

Veamos entonces la siguiente cuenta:

$$\begin{aligned}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) &= \sin(\omega t)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\omega t)\,,\\ &= \sin(\omega t)\times 0+1\times\cos(\omega t)\,,\\ &= \cos(\omega t)\,.\end{aligned}$$

Lo que quiere decir esto es que un seno con una fase de $\pi/2$ es igual a un coseno con fase nula. Por lo tanto, es necesario agregar $\phi=\pi/2$ a una función seno para obtener el mismo movimiento:

$$x(t)=0{,}057\,\mathrm{m}\cos\left(3{,}9\,\mathrm{s}^{-1}t\right)=0{,}057\,\mathrm{m}\sin\left(3{,}9\,\mathrm{s}^{-1}t+\frac{\pi}{2}\right).$$

Noten que al describir el movimiento de esta forma alternativa no cambian los parámetros que lo definen: amplitud, frecuencia angular, frecuencia y período (esto es obvio, si cambiasen tendríamos un comportamiento distinto).

— Ejercicio 4.4 —

En el enunciado de este ejercicio se nos dice que tenemos una partícula que sigue un MAS alcanza su desplazamiento máximo de 0,2 m en $t=0\,\mathrm{s}$ y que la frecuencia de oscilación es $f=8\,\mathrm{Hz}$.

a) En la primera parte del ejercicio tenemos que encontrar una expresión para la posición en función del tiempo, haciendo uso de los datos que nos dan. Ya sabemos que, en general, vale

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi)\,.$$

Tenemos entonces que hallar valores numéricos para A, ω y ϕ. Como se nos dice que el desplazamiento máximo del movimiento es 0,2 m, es inmediato que $A=0{,}2\,\mathrm{m}$. Por otro lado, como $f=8\,\mathrm{Hz}$, podemos calcular ω usando las expresiones que dimos al principio de la clase:

$$\omega=2\pi f=2\pi\times 8\,\mathrm{Hz}=50{,}27\,\mathrm{s}^{-1}.$$

(Recuerden que para ω usamos como unidad el segundo elevado a la menos uno mientras que para f usamos Hz).

Lo que nos queda es encontrar un valor para la fase. Para esto, hagamos uso del dato de que la posición máxima se alcanza en $t=0$ y que $x_{\max}=A$:

$$x_{\max}=x(0)=A\cos\phi=A.$$

Deducimos de acá que $\cos\phi=1$ y por lo tanto $\phi=0$. Finalmente, nos queda

$$x(t)=0{,}2\,\mathrm{m}\cos\left(50{,}27\,\mathrm{s}^{-1}t\right).$$

b) Esta parte les queda a ustedes. Tienen que hallar los tiempos en los cuales $x(t)$ tiene algunos valores particulares. Tengan en cuenta que los movimientos oscilatorios se repiten en el tiempo, por lo que la partícula pasa por una determinada posición una cantidad infinita de veces (si está dentro del rango del movimiento); por eso es que se pide la primera vez que lo hace.

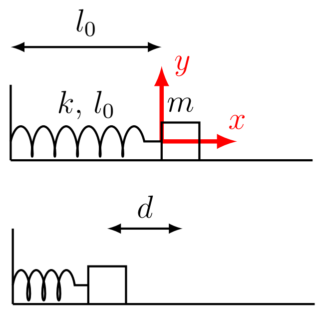
— Ejercicio 4.7 —

Para terminar la clase de hoy, vamos a ver una pequeña introducción a la dinámica del movimiento oscilatorio analizando un poco el ejercicio 4.7. Tenemos un cuerpo de masa m (desconocida) que está apoyado en una mesa y unido a un resorte de constante elástica k y longitud natural l_0. A este cuerpo se lo desplaza una distancia d, comprimiendo el resorte; se lo suelta y comienza a oscilar con un período T.

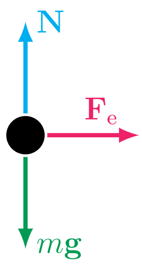
A continuación podemos ver un esquema del ejercicio, tanto para el resorte en su estado natural como para el resorte comprimido. Noten que estamos eligiendo el sistema de referencia (SR) a partir de la longitud natural del resorte, como ya hicieron en la teórica.

(Resorte sin compresión)

(Resorte con compresión)



Hay tres fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Tenemos, como ya deben tener claro, el peso y la normal que se compensan entre sí, por lo que esa dirección no tiene demasiado interés. Lo que nos compete en esta clase es la fuerza elástica que hace el resorte. Si está comprimido, la fuerza será hacia la derecha; si está estirado, será hacia la izquierda. Hagamos el diagrama de cuerpo libre de la partícula cuando se lo desplaza hacia la izquierda:



Trabajemos entonces con el eje x, que es el que nos interesa, y escribamos la segunda de ley de Newton. Por nuestra elección del SR, la fuerza elástica la podemos escribir como $-kx$. Tenemos entonces:

$$m\ddot{x} = -kx \implies \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

(Estamos usando la notación de la teórica, donde los dos puntos indican la segunda derivada con respecto al tiempo).

La ecuación diferencial que encontramos,

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

es la que ya estudiaron en la teórica. De hecho, ya saben que las soluciones permitidas son senos y cosenos, como vimos al principio de la clase, y que la frecuencia angular está relacionada con la masa de la partícula y la constante del resorte por medio de la ecuación

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Les queda a ustedes probar que esto es así; es decir, probar que

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

es efectivamente solución de esta ecuación. Recuerden que reemplazar la solución y ver que cumple es más una verificación que una demostración formal, pero les va a ayudar a ver más claro el panorama. Fíjense que es bastante natural que las soluciones sean senos y cosenos: al final del día necesitamos funciones que cuando las derivamos dos veces nos den la misma función —a menos de una constante que la multiplica—.

De todas maneras, la clase próxima vamos a seguir explorando la dinámica del movimiento oscilatorio, extendiéndonos más sobre esta breve introducción al tema. ¡Nos vemos entonces!