GUÍA 5: Conservación de la energía

Ejercicios 7 a 13

Repaso *energía*

$$E_{mec} = E_{cin} + E_{pot}$$

Repaso *energía*

$$E_{mec} = E_{cin} + E_{pot}$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

E_{pot}

- Energía potencial gravitatoria: mgh
- Energía potencial elástica: $\frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta x)^2$

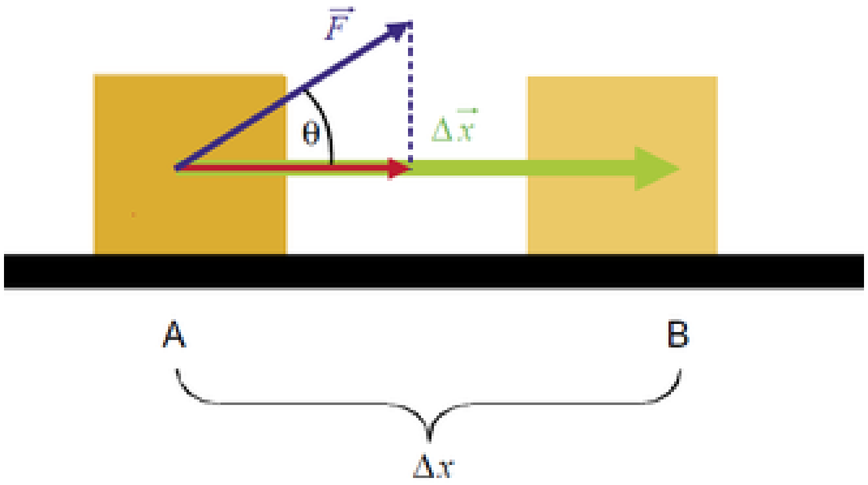
v : Módulo de la velocidad

h : Altura

Δx : Estiramiento o compresión del resorte

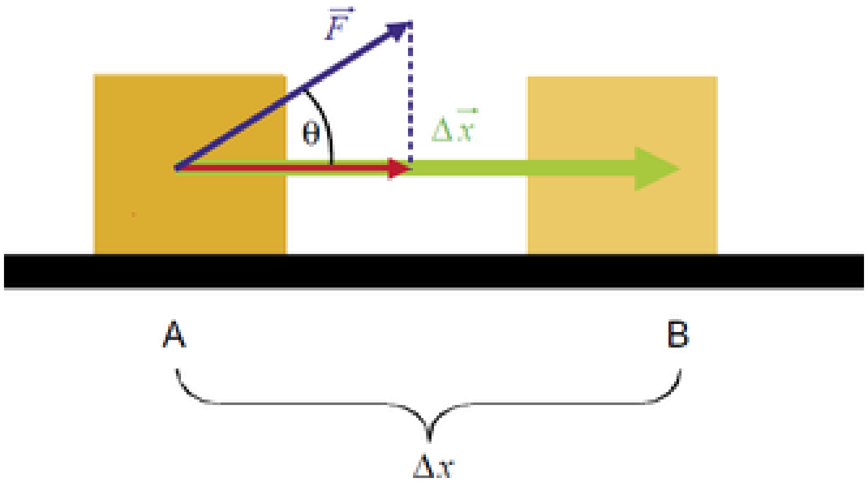
Repaso *trabajo*

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Delta r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\theta$$



Repaso *trabajo*

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Delta r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\theta$$



Trabajo de fuerzas no conservativas:

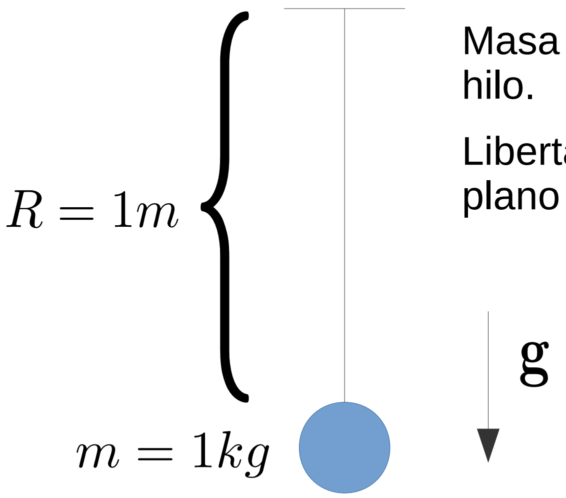
$$W_{A,B}^{FNC} = \Delta E_{mec} = E(B) - E(A)$$

Si todas las fuerzas son conservativas:

$$\Delta E_{mec} = 0$$

El trabajo de las fuerzas conservativas **no** depende del camino.

Ejercicio 7

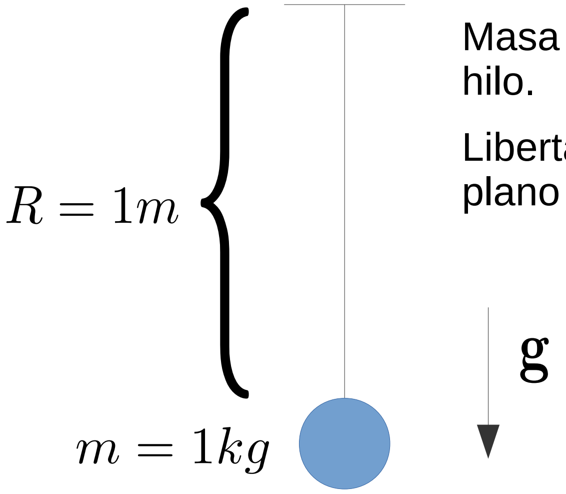


Masa que pende de un hilo.

Libertad para girar en el plano vertical.

(a) ¿Velocidad mínima para poder dar la vuelta con el hilo siempre tensado?
¿Se puede realizar un MCU?

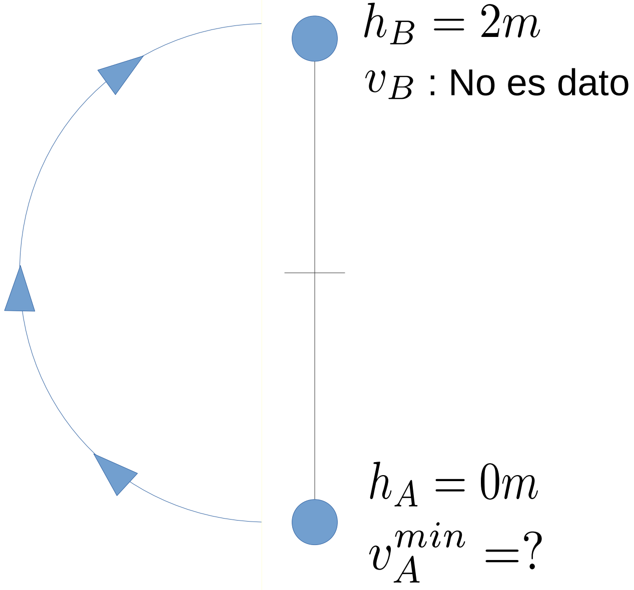
Ejercicio 7



Masa que pende de un hilo.

Libertad para girar en el plano vertical.

(a) ¿Velocidad mínima para poder dar la vuelta con el hilo siempre tensado?
¿Se puede realizar un MCU?

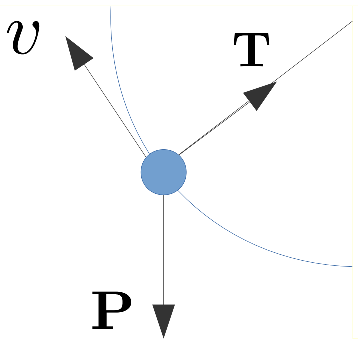


$$\begin{cases} E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \\ E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 \end{cases}$$

Ejercicio 7

Fuerzas: *Peso* (Conservativo) y *Tensión* (No conservativo)

Ejercicio 7



Fuerzas: *Peso* (Conservativo) y *Tensión* (No conservativo)

El hilo esta siempre tensado.

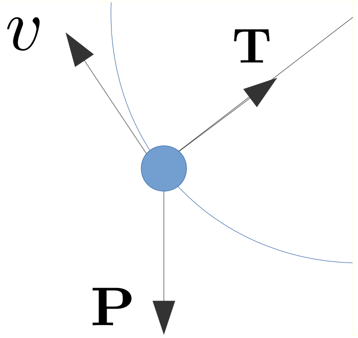
La tensión siempre es
perpendicular al desplazamiento.

Entonces no realiza trabajo!

$$W_T = 0$$

Ejercicio 7

Fuerzas: *Peso* (Conservativo) y *Tensión* (No conservativo)



El hilo esta siempre tensado.

La tensión siempre es perpendicular al desplazamiento.

Entonces no realiza trabajo!

$$W_T = 0$$

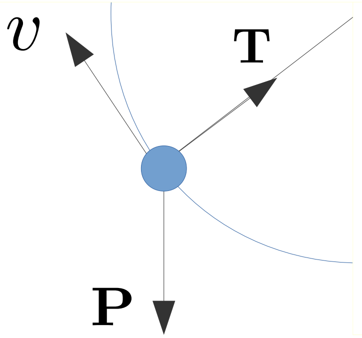
La tensión era la única fuerza no conservativa, entonces:

$$\Delta E = 0 \rightarrow E_A = E_B$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

Ejercicio 7

Fuerzas: *Peso* (Conservativo) y *Tensión* (No conservativo)



El hilo esta siempre tensado.

La tensión siempre es perpendicular al desplazamiento.

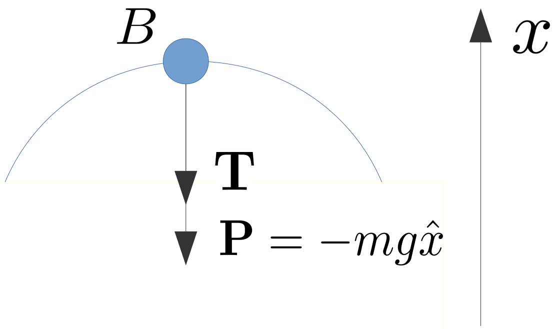
Entonces no realiza trabajo!

$W_T = 0$

La tensión era la única fuerza no conservativa, entonces:

$$\Delta E = 0 \rightarrow E_A = E_B$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$



¿Cuánto vale v_B ?

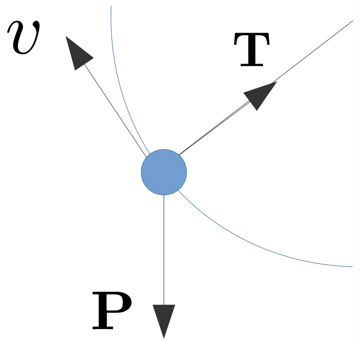
Hilo tenso $\longleftrightarrow$ $T \neq 0$

El punto superior es el punto crítico. Si la tensión es no nula ahí, lo será en toda la circunferencia.

Caso límite: $T_B = 0$

Ejercicio 7

Fuerzas: *Peso* (Conservativo) y *Tensión* (No conservativo)



El hilo esta siempre tensado.

La tensión siempre es perpendicular al desplazamiento.

Entonces no realiza trabajo!

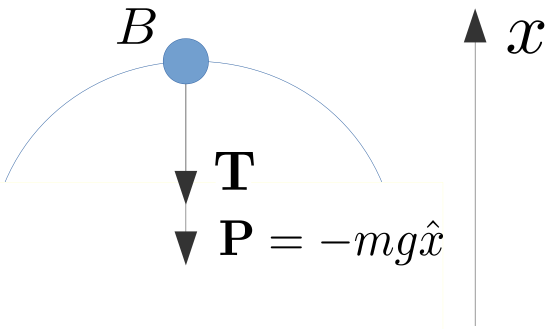
$$W_T = 0$$

La tensión era la única fuerza no conservativa, entonces:

$$\Delta E = 0 \rightarrow E_A = E_B$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 + m g h_B$$

¿Cuánto vale v_B ?



Ecuación de movimiento en B:

$$-P - \underbrace{T_B}_{=0} = -m\frac{v_B^2}{R} \longrightarrow$$

Usé la aceleración de un movimiento circular!

$$mg = m\frac{v_B^2}{R} \longrightarrow v_B = \sqrt{Rg}$$

Ejercicio 7

$v_B = \sqrt{Rg}$

Es la *velocidad mínima* que tiene que tener la masa en B para que el hilo este siempre tenso.

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

Ahora la única incógnita es la velocidad en A.

Si uso $v_B = \sqrt{Rg}$ y despejo v_A, obtengo la velocidad mínima que tiene que tener la masa en A para dar la vuelta completa con el hilo *siempre* tenso.

Ejercicio 7

$v_B = \sqrt{Rg}$ → Es la *velocidad mínima* que tiene que tener la masa en B para que el hilo este siempre tenso.

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

→ Ahora la única incógnita es la velocidad en A.

→ Si uso $v_B = \sqrt{Rg}$ y despejo v_A, obtengo la velocidad mínima que tiene que tener la masa en A para dar la vuelta completa con el hilo *siempre* tenso.

Despejando, obtenemos: $\boxed{v_A^{min} = \sqrt{5Rg}}$

Ejercicio 7

$v_B = \sqrt{Rg}$ → Es la *velocidad mínima* que tiene que tener la masa en B para que el hilo este siempre tenso.

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

→ Ahora la única incógnita es la velocidad en A.

→ Si uso $v_B = \sqrt{Rg}$ y despejo v_A, obtengo la velocidad mínima que tiene que tener la masa en A para dar la vuelta completa con el hilo *siempre* tenso.

Despejando, obtenemos: $\boxed{v_A^{min} = \sqrt{5Rg}}$

Ayuda para el ejercicio 9!

El ejercicio 9 se resuelve muy parecido a este, salvo que tenemos la fuerza normal en vez de la tensión.

Ejercicio 7

$v_B = \sqrt{Rg}$ $\longrightarrow$ Es la *velocidad mínima* que tiene que tener la masa en B para que el hilo este siempre tenso.

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

Ahora la única incógnita es la velocidad en A.

Si uso $v_B = \sqrt{Rg}$ y despejo v_A, obtengo la velocidad mínima que tiene que tener la masa en A para dar la vuelta completa con el hilo *siempre* tenso.

Ayuda para el ejercicio 9!

El ejercicio 9 se resuelve muy parecido a este, salvo que tenemos la fuerza normal en vez de la tensión.

Despejando, obtenemos: $\boxed{v_A^{min} = \sqrt{5Rg}}$

¿Se puede realizar un MCU?

Ejercicio 7

$v_B = \sqrt{Rg}$ → Es la *velocidad mínima* que tiene que tener la masa en B para que el hilo este siempre tenso.

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

→ Ahora la única incógnita es la velocidad en A.

→ Si uso $v_B = \sqrt{Rg}$ y despejo v_A, obtengo la velocidad mínima que tiene que tener la masa en A para dar la vuelta completa con el hilo *siempre* tenso.

Ayuda para el ejercicio 9!

El ejercicio 9 se resuelve muy parecido a este, salvo que tenemos la fuerza normal en vez de la tensión.

Despejando, obtenemos: $\boxed{v_A^{min} = \sqrt{5Rg}}$

¿Se puede realizar un MCU? → **NO!** En un MCU no hay fuerzas tangenciales, y en este caso, el peso tiene componente tangencial. (La tensión es siempre radial)

Ejercicio 7

(b) ¿Trabajo de cada una de las fuerzas al ir de A hasta B?

Ejercicio 7

(b) ¿Trabajo de cada una de las fuerzas al ir de A hasta B?

La tensión no realiza trabajo $\longrightarrow$ $\boxed{W_T^{A,B} = 0}$

Ejercicio 7

(b) ¿Trabajo de cada una de las fuerzas al ir de A hasta B?

La tensión no realiza trabajo $\longrightarrow$ $\boxed{W_T^{A,B} = 0}$

Trabajo del peso $\longrightarrow$ $W_P^{A,B} = \int_A^B \mathbf{P} \cdot \mathbf{dr}$

Ejercicio 7

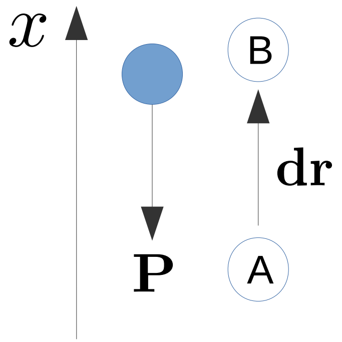
(b) ¿Trabajo de cada una de las fuerzas al ir de A hasta B?

La tensión no realiza trabajo

$$\boxed{W_T^{A,B} = 0}$$

Trabajo del peso

$$W_P^{A,B} = \int_A^B \mathbf{P} \cdot \mathbf{dr}$$



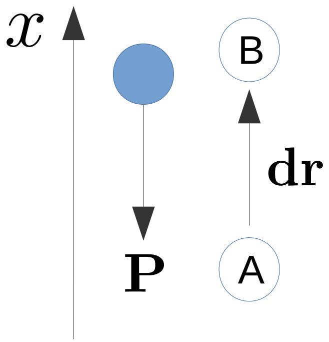
El trabajo de las fuerzas conservativas **no** depende del camino.
Entonces elijo un camino VERTICAL desde A hasta B.

Ejercicio 7

(b) ¿Trabajo de cada una de las fuerzas al ir de A hasta B?

La tensión no realiza trabajo $\longrightarrow$ $\boxed{W_T^{A,B} = 0}$

Trabajo del peso $\longrightarrow$ $W_P^{A,B} = \int_A^B \mathbf{P} \cdot \mathbf{dr} = \int_{h_A}^{h_B} -mg\hat{x} \cdot dx\hat{x} = \int_{h_A}^{h_B} -mg \cdot dx$



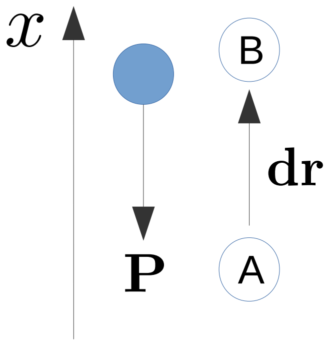
$$\boxed{W_P^{A,B} = mgh_A - mgh_B}$$

Ejercicio 7

(b) ¿Trabajo de cada una de las fuerzas al ir de A hasta B?

La tensión no realiza trabajo → $\boxed{W_T^{A,B} = 0}$

Trabajo del peso → $W_P^{A,B} = \int_A^B \mathbf{P} \cdot \mathbf{dr} = \int_{h_A}^{h_B} -mg\hat{x} \cdot dx\hat{x} = \int_{h_A}^{h_B} -mg \cdot dx$



$$\boxed{W_P^{A,B} = mgh_A - mgh_B}$$

Ayuda para el ejercicio 8!
En este ejercicio tienen que usar esta forma integral de calcular el trabajo porque la fuerza depende de la posición.

Ejercicio 7

(c) En vez de un hilo, tenemos una varilla de masa despreciable que genera una rotación con velocidad angular constante. ¿Trabajo de la fuerza de vínculo para ir de A hasta B y viceversa?

Velocidad angular constante $\longrightarrow$ MCU (a diferencia de los items anteriores)

Ejercicio 7

(c) En vez de un hilo, tenemos una varilla de masa despreciable que genera una rotación con velocidad angular constante. ¿Trabajo de la fuerza de vínculo para ir de A hasta B y viceversa?

Velocidad angular constante $\longrightarrow$ MCU (a diferencia de los items anteriores)

La fuerza de vínculo es la única NO conservativa. $\longrightarrow$ $W_{vinculo} = \Delta E_{mec} = E_{final} - E_{inicial}$

Ejercicio 7

(c) En vez de un hilo, tenemos una varilla de masa despreciable que genera una rotación con velocidad angular constante. ¿Trabajo de la fuerza de vínculo para ir de A hasta B y viceversa?

Velocidad angular constante $\longrightarrow$ MCU (a diferencia de los items anteriores)

La fuerza de vínculo es la única NO conservativa. $\longrightarrow$ $W_{vinculo} = \Delta E_{mec} = E_{final} - E_{inicial}$

$$\begin{cases} W^{A,B}_{vinculo} = E_B - E_A \\ W^{B,A}_{vinculo} = E_A - E_B \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Les dejo las cuentas a ustedes.

Potencial *de una fuerza*

Potencial de una fuerza conservativa
(caso unidimensional):

$\phi \rightarrow$ Potencial

$$\mathbf{F} = -\frac{d\phi}{dx}\hat{x}$$

$$\phi = -\int F dx$$

Potencial *de una fuerza*

Potencial de una fuerza conservativa (caso unidimensional):

$\phi \rightarrow$ Potencial

$$\mathbf{F} = -\frac{d\phi}{dx}\hat{x}$$

$$\phi = -\int F dx$$

Sumémosle una constante al potencial y veamos que pasa:

$$\boxed{\phi \rightarrow \phi + cte}$$

Potencial *de una fuerza*

Potencial de una fuerza conservativa (caso unidimensional):

$\phi \rightarrow$ Potencial

$$\mathbf{F} = -\frac{d\phi}{dx}\hat{x}$$

$$\phi = -\int F dx$$

Sumémosle una constante al potencial y veamos que pasa:

$$\boxed{\phi \rightarrow \phi + cte}$$

$$-\frac{d(\phi + cte)}{dx} = -\left[\frac{d\phi}{dx} + \frac{d}{dx}(cte)\right]$$

$$= -\frac{d\phi}{dx}$$

$$= F$$

Potencial *de una fuerza*

Potencial de una fuerza conservativa (caso unidimensional):

$$\phi \rightarrow \text{Potencial}$$

$$\mathbf{F} = -\frac{d\phi}{dx}\hat{x}$$

$$\phi = -\int F dx$$

Sumémosle una constante al potencial y veamos que pasa:

$$\boxed{\phi \rightarrow \phi + cte}$$

$$-\frac{d(\phi + cte)}{dx} = -\left[\frac{d\phi}{dx} + \frac{d}{dx}(cte)\right]$$

$$= -\frac{d\phi}{dx}$$

$$= F$$

Sumarle al potencial una constante, me da la misma fuerza!

Entonces hay *infinitos* potenciales!

Equilibrio

Puntos de **equilibrio**:

$$\frac{d\phi}{dx}(x_{eq}) = 0$$

Equilibrio

Puntos de **equilibrio**:

$$\frac{d\phi}{dx}(x_{eq}) = 0$$

Equilibrio estable:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}(X_{eq}) > 0$$

Equilibrio inestable:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}(X_{eq}) < 0$$

Equilibrio

Puntos de **equilibrio**:

$$\frac{d\phi}{dx}(x_{eq}) = 0$$

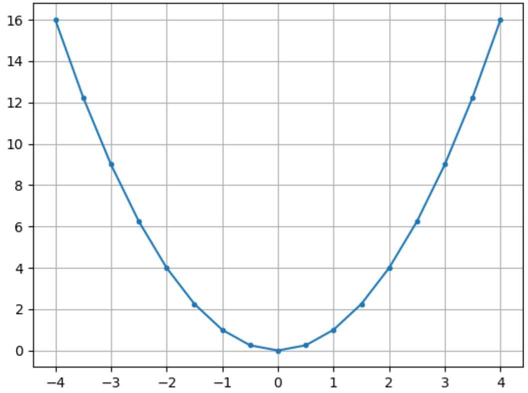
Equilibrio estable:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}(X_{eq}) > 0$$

Equilibrio inestable:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}(X_{eq}) < 0$$

Ejemplo: $x_{eq} = 0$



$$\phi(x) = x^2$$

$$\frac{d\phi}{dx} = 2x$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2$$

Equilibrio

Puntos de **equilibrio**:

$$\frac{d\phi}{dx}(x_{eq}) = 0$$

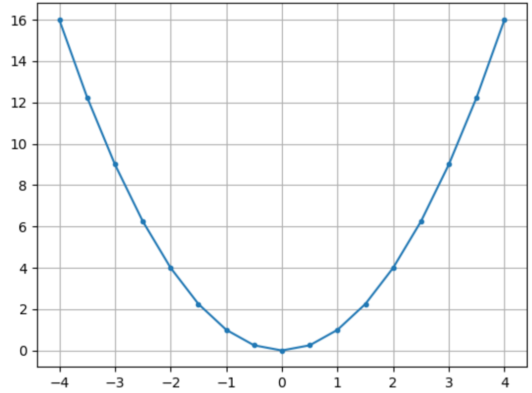
Equilibrio estable:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}(X_{eq}) > 0$$

Equilibrio inestable:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}(X_{eq}) < 0$$

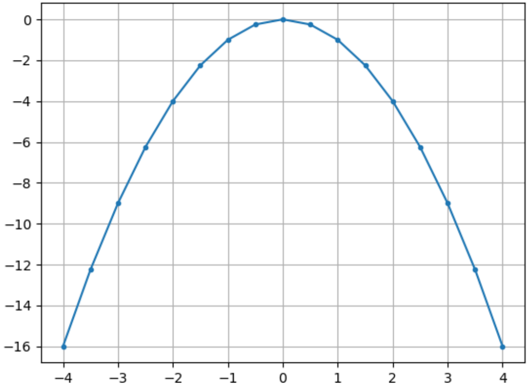
Ejemplo: $x_{eq} = 0$



$$\phi(x) = x^2$$

$$\frac{d\phi}{dx} = 2x$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2$$



$$\phi(x) = -x^2$$

$$\frac{d\phi}{dx} = -2x$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -2$$

Gráfico de potencial

Nota: Lo que vamos a hacer ahora sirve para varios ejercicios de la guía.

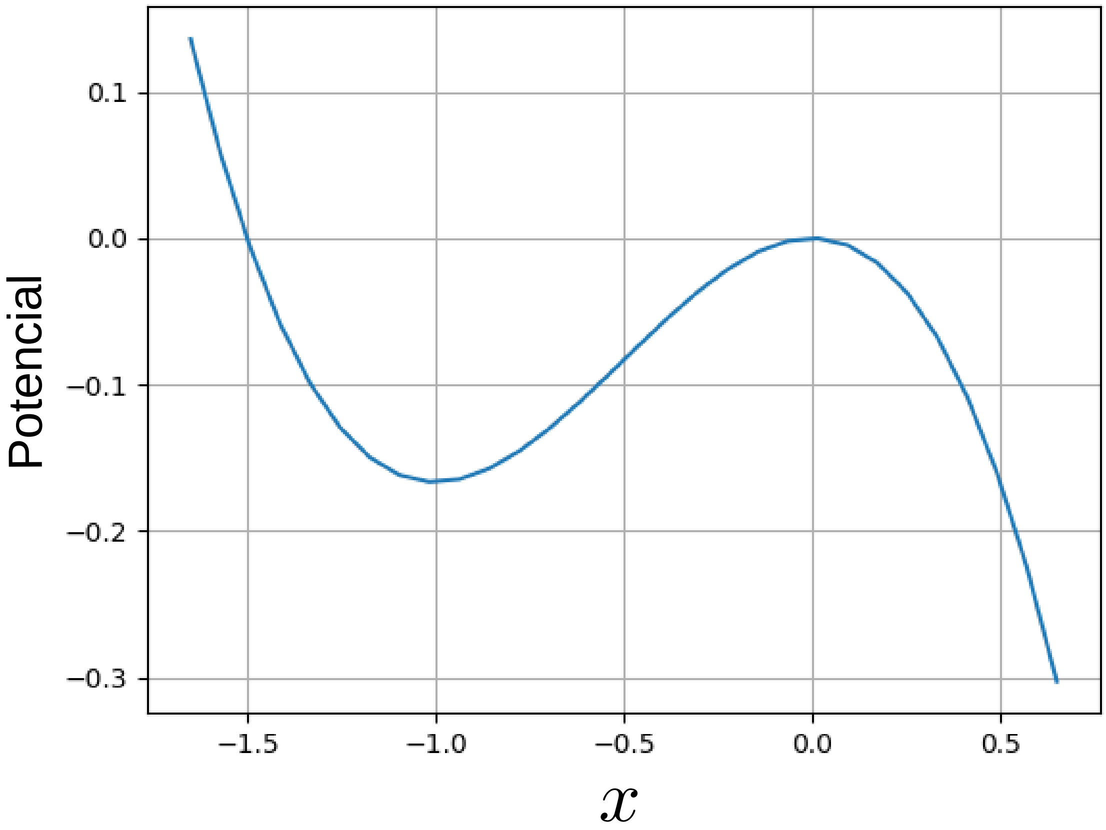


Gráfico de potencial

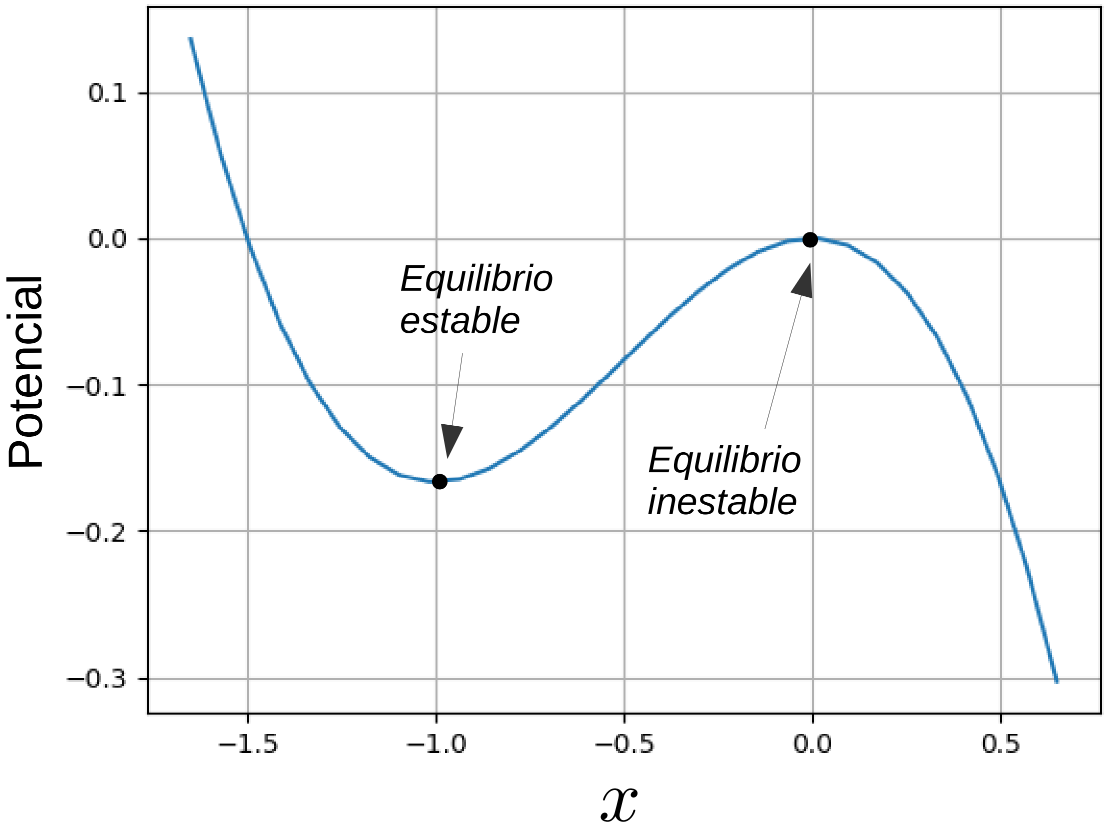
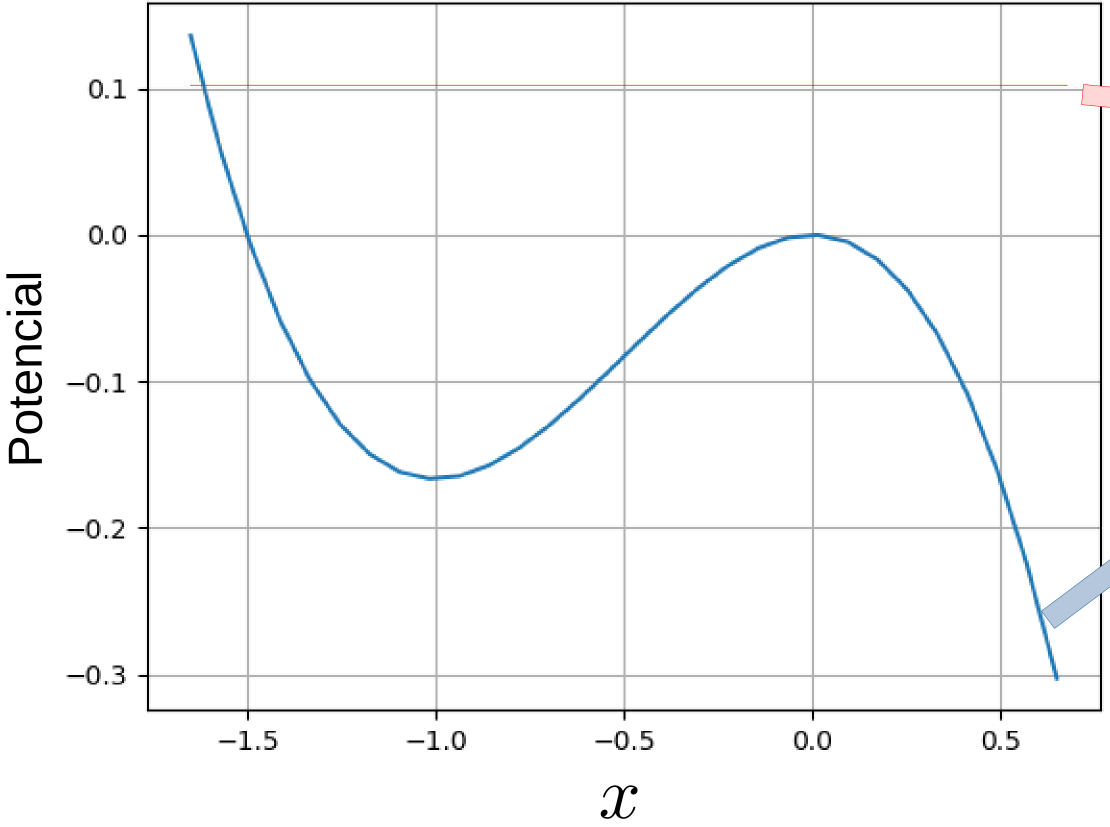


Gráfico de potencial

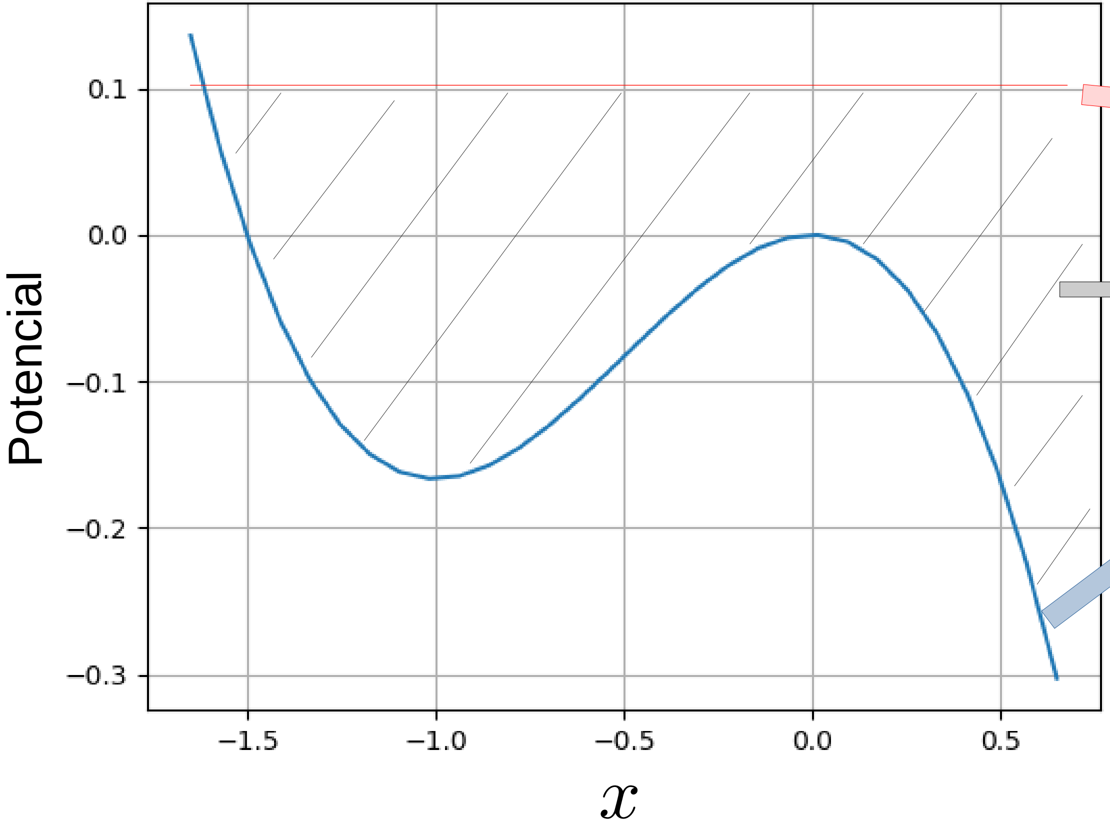
Sin trabajo de fuerzas no conservativas,
la energía mecánica se conserva.



E_{mec}

$\phi = E_{pot}$

Gráfico de potencial



Sin trabajo de fuerzas no conservativas, la energía mecánica se conserva.

E_{mec}

E_{cin}

$\phi = E_{pot}$

$$\begin{cases} E_{mec} = E_{cin} + E_{pot} \\ E_{cin} = E_{mec} - E_{pot} \end{cases}$$

Si la energía potencial disminuye, la cinética aumenta, y viceversa.

Gráfico de potencial

Veamos que pasa si cambiamos la energía total.

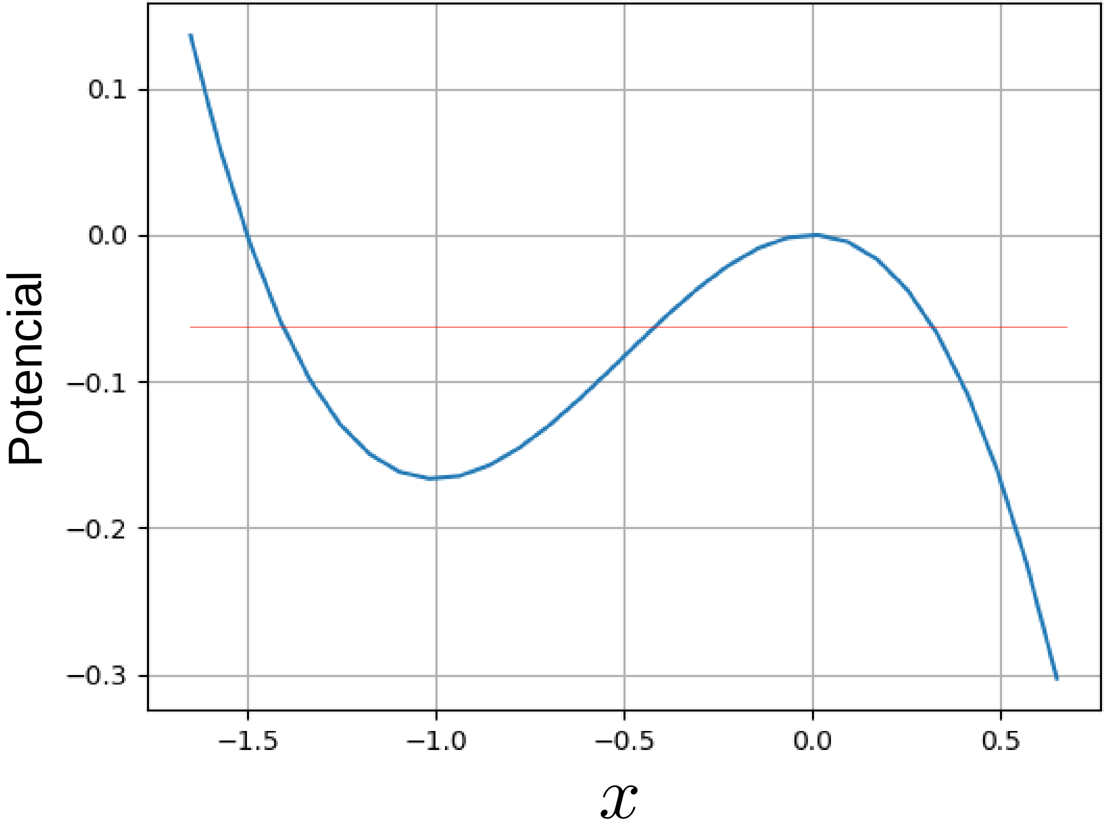
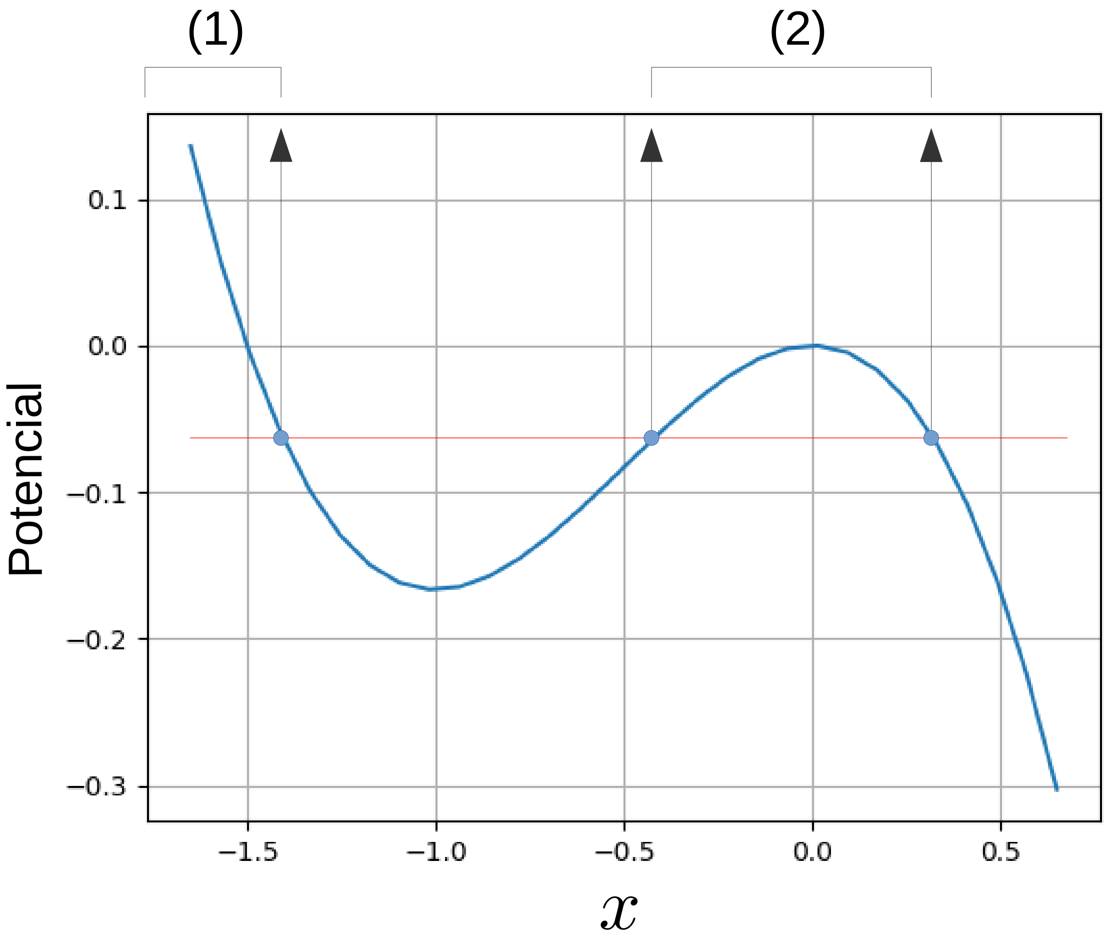


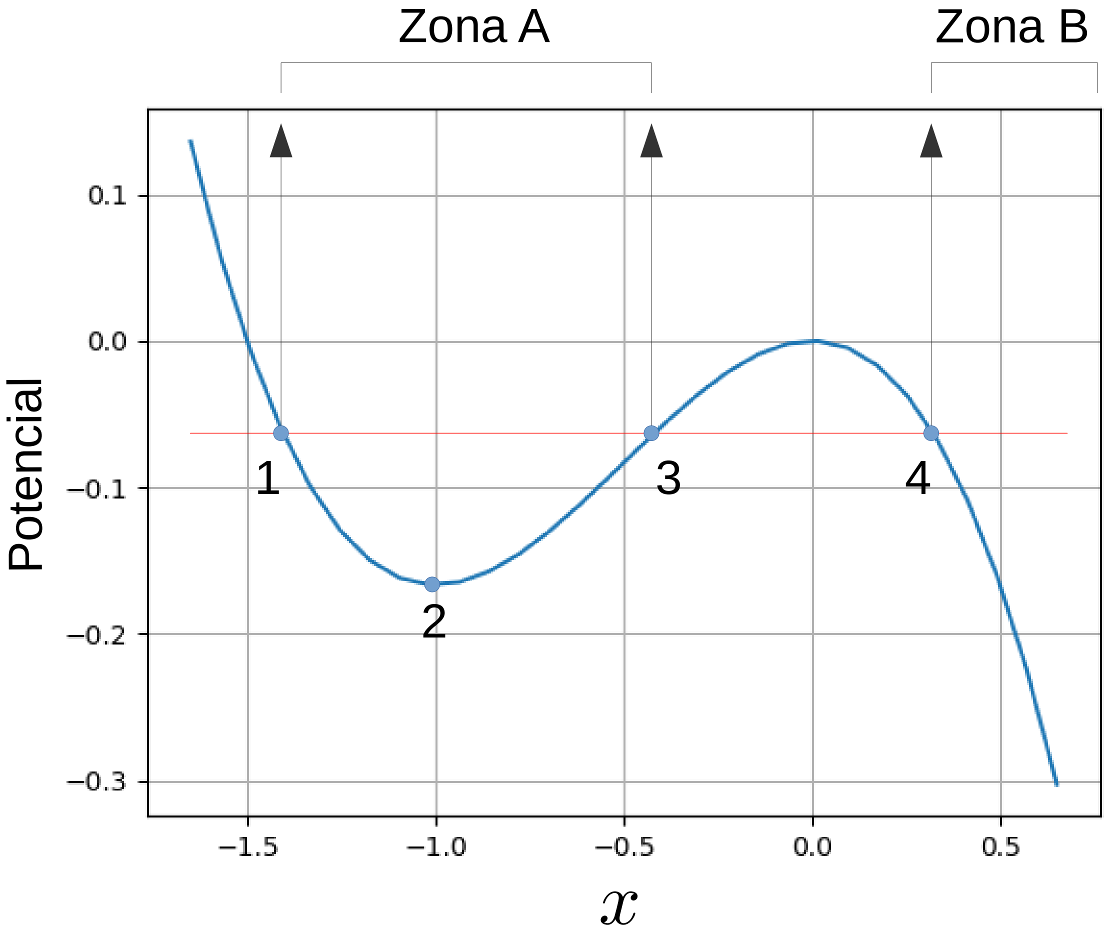
Gráfico de potencial



NO puede pasar que: $E_{pot} > E_{mec}$

Entonces, (1) y (2) son las zonas prohibidas.

Gráfico de potencial



Zona A:

* Movimiento **restringido**.
* Puntos 1 y 3: Energía cinética nula.
* Punto 2: Energía cinética máxima.

Zona B:

* Movimiento **no restringido**.
* Puntos 4: Energía cinética nula.