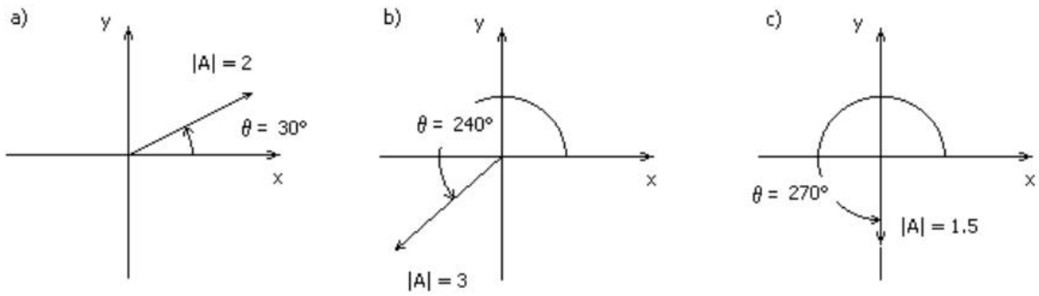
Práctica N° 0: adicionales matemáticos

Parte I: vectores

1. Determine el módulo y la dirección de los siguientes vectores. Represéntelos gráficamente.

   $\mathbf{A} = (-4; 3)$ $\mathbf{B} = (2; 0)$ $\mathbf{C} = -2\,\hat{x} - 3\,\hat{y}$ $\mathbf{D} = 0\,\hat{x} - 5\,\hat{y}$

2. Halle las componentes cartesianas de los siguientes vectores:



3. Dados los vectores **A** y **B**, halle gráficamente la suma.

   (a) $\mathbf{A} = (-3; 2)$ y $\mathbf{B} = (-2; 5)$.

   (b) $|\mathbf{A}| = 2$, $\theta_A = 20°$ y $|\mathbf{B}| = 3$, $\theta_B = 135°$.

   (c) $\mathbf{A} = (-2; 0)$ y $\mathbf{B} = (0; 4)$.

4. Sean **A** y **B** los vectores dados en el ejercicio anterior. Halle analíticamente las componentes cartesianas y polares del vector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, y del vector $\mathbf{A} - \mathbf{B}$. ¿El módulo del vector suma, $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, es igual a la suma de los módulos de **A** y de **B**?

5. Halle el vector que tiene origen en el punto **A** y extremo en el punto **B** en los siguientes casos:

   (a) $\mathbf{A} = (2; -1)$ y $\mathbf{B} = (-5; -2)$.

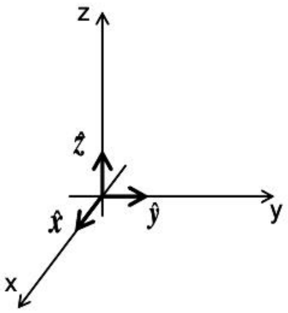
   (b) $\mathbf{A} = (2; -5; 8)$ y $\mathbf{B} = (-4; -3; 2)$.

6. Dados los vectores $\mathbf{A} = (3\,\hat{x} + 2\,\hat{y} + 3\,\hat{z})$, $\mathbf{B} = (4\,\hat{x} - 3\,\hat{y} + 2\,\hat{z})$, $\mathbf{C} = (-2\,\hat{y} - 5\,\hat{z})$. Efectúe las siguientes operaciones:

   (a) $(\mathbf{A} - \mathbf{B})/|\mathbf{C}|$ (b) $5\mathbf{A} - 2\mathbf{C}$ (c) $-2\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C}/5$

   Se define el producto escalar entre dos vectores como $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\,\cos\theta$, donde θ es el ángulo que forman los dos vectores.

7. Sean $\{\hat{x},\, \hat{y},\, \hat{z}\}$ los versores usuales de la terna derecha mostrada en la figura.



La base canónica se define con los siguientes versores: $\hat{x} = (1;0;0)$, $\hat{y} = (0;1;0)$, $\hat{z} = (0;0;1)$. Calcule: $\hat{x}\cdot\hat{x}$, $\hat{x}\cdot\hat{y}$, $\hat{x}\cdot\hat{z}$, $\hat{y}\cdot\hat{y}$, $\hat{y}\cdot\hat{z}$, $\hat{z}\cdot\hat{z}$.

8. Usando la propiedad distributiva del producto escalar respecto a la suma y los resultados del ejercicio anterior, demuestre que si

$\mathbf{A} = A_x\,\hat{x} + A_y\,\hat{y} + A_z\,\hat{z}$ y $\mathbf{B} = B_x\,\hat{x} + B_y\,\hat{y} + B_z\,\hat{z}$, entonces:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z$$

9. Efectúe el producto escalar entre los vectores **A** y **B** y diga si en algún caso **A** es perpendicular a **B**.

   (a) $\mathbf{A} = 3\,\hat{x} - 2\,\hat{y} + 1\,\hat{z}$ $\qquad$ $\mathbf{B} = -1\,\hat{x} + 3\,\hat{z}$

   (b) $\mathbf{A} = (2;3;-1)$ $\qquad$ $\mathbf{B} = (6;-5;2)$

   (c) $|\mathbf{A}| = 3$, $|\mathbf{B}| = 2$, $\theta_{AB} = 60°$

Parte II: ecuaciones diferenciales

10. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales. Es decir, encuentre la función $y(t)$. En todos los casos, y_0 es una constante.

   (a) $\frac{dy}{dt} = 2$, $y(0) = 0$;

   (b) $\frac{dy}{dt} = a$, $y(0) = y_0$;

   (c) $\frac{dy}{dt} = e^t + 2$, $y(0) = y_0$;

   (d) $\frac{dy}{dt} - \sin(3t) = 0$, $y(0) = y_0$;

   (e) $\frac{dy}{dt} = 2y$, $y(1) = y_0$

   (f) $t\frac{dy}{dt} = 1$, $y(1) = y_0$.

11. Suponga una colonia que tiene N_0 bacterias al tiempo $t = 0$. Si la colonia crece a una tasa proporcional a su población, entonces:

$$\frac{dN}{dt} = \kappa\, N, \quad \kappa > 0$$

   (a) Resuelva esta ecuación para encontrar N(t). Grafique cualitativamente la solución.

(b) ¿Cuánto tarda la población inicial en duplicarse? ¿Cuánto tiempo más hay que esperar para que se vuelva a duplicar?

12. La ecuación del ejercicio 11. (crecimiento exponencial o Malthusiano) tiene una aplicación limitada porque no es razonable que la colonia siga creciendo para siempre. Una mejora es considerar que la tasa de crecimiento depende del número de bacterias de forma tal que si N es un número "chico" la colonia crezca pero si es un número "grande" disminuya. Esto puede tenerse en cuenta de la siguiente forma (¿por qué?):

$$\frac{dN}{dt} = r\,N\left(1 - \frac{N}{\kappa}\right)$$

La ecuación anterior, en donde tanto r como κ son constantes positivas, se conoce *capacidad de carga.*

(a) ¿Para qué conjunto de valores de N, la población disminuye y para cuales crece?

(b) ¿Para qué valores de N, la población no crece ni disminuye?

(c) ¿Existe algún valor de N estable? Por estable queremos decir que si N aumenta o disminuye respecto de ese valor, la población vuelve a ese valor.

(d) Encuentre la solución $N(t)$. Para hacerlo considere la ayuda.

(e) Grafique cualitativamente la solución para distintas condiciones iniciales e interprete el resultado en función de las respuestas anteriores.

Ayuda: $\int dx\, \frac{1}{x\left(1-\frac{x}{\kappa}\right)} = \ln \frac{x}{x-\kappa}$

13. Una reacción química autocatalítica es una en la que la producción de una sustancia es estimulada por la propia sustancia. Este proceso (retroalimentación positiva) llevaría a un crecimiento descontrolado de la sustancia en cuestión si no estuviera limitado de alguna forma. Supongamos que llamamos c a la concentración de la sustancia C y $f(c)$ a su tasa de producción por unidad de tiempo dc/dt . La siguiente ecuación es un ejemplo de una ecuación que modela una reacción autocatalítica:

$$\frac{dc}{dt} = f(c) = 2\frac{molar}{seg}\cdot c - 1\frac{molar}{seg^2}c^2$$

(a) Haga un gráfico de la tasa de producción en función de c.

(b) ¿Para qué valores de c la tasa de producción es positiva y para qué valores es negativa?

(c) Si inicialmente la concentración de C es 0.75 molar, ¿subirá o disminuirá la concentración con el tiempo?

(d) Encuentre una expresión para $c(t)$.

(e) ¿Qué relación tiene este problema con el del crecimiento logístico (ejercicio 11.)?

14. Bajo ciertas condiciones que estudiaremos cuando veamos mecánica a escala celular y molecular, la aceleración de un objeto que se mueve en un fluido es $\mathbf{a} = -\gamma\,\mathbf{v}$, donde γ es una constante positiva que depende de la masa y de la forma del objeto y de la viscosidad del fluido. Si la velocidad inicial es $v_0 > 0$, encuentre la velocidad en función del tiempo para el objeto.

15. Resuelva estas ecuaciones diferenciales de segundo orden. Tome como condición inicial en todos los casos $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$ (m, F y A son constantes).

    (a) $m\,x'' = F$ (b) $x'' = A\,t$ (c) $x'' = e^t$

    Ayuda: Muchas veces, para resolver una de segundo orden, conviene primero asignarle un nuevo nombre a la derivada primera. Por ejemplo, en lugar de x'', usar $x' = v$ y $x'' = v'$.

    Notación: $x' = \frac{dx}{dt}$, y $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$

16. Probar que $x = \cos(3t)$ es una solución de la ecuación $x'' = -9\,x$.

17. Encontrar una solución para las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas.

    (a) $x'' = -4\,x$, $x(0) = 3$ y $x'(0) = 0$;

    (b) $x'' = -4\,x$, $x(0) = 0$ y $x'(0) = 6$;

    (c) $x'' = -4\,x - 12$, $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$.