Guía 4: Leyes de escala
Parte 1: Leyes alométricas en plantas

Cátedra: Prof. Ana María Llois - Depto. Física, FCEyN, UBA.

Objetivo general: Esta práctica tiene como objetivo el análisis de relaciones no-lineales mediante el estudio de leyes de escala alométricas en plantas.

Introducción

Las leyes de escala describen como varía alguna cantidad con un cambio de escala (ver discusión de un ejemplo en el Apéndice I). Estas leyes pueden aplicarse en muchos sistemas de la naturaleza. Un ejemplo notable en biología es el caso de las *leyes alométricas* que se expresan como una relación potencial entre dos variables de la forma:

$$Y = Y_0 X^b \tag{1}$$

donde X e Y son variables biológicas, mientras que b y Y_0 son constantes que caracterizan la relación. Muchos y variados fenómenos biológicos tienen la particularidad de escalear como "cuartos". Por ejemplo, si X es la masa M, la tasa metabólica escalea como $M^{3/4}$, el ritmo cardíaco y la tasa de metabolismo celular escalean como $M^{1/4}$, el tiempo de circulación de la sangre y el crecimiento embrionario escalean como $M^{1/4}$. Existe un modelo desarrollado por West, Brown y Enquist [1] (modelo de WBE) que propone que, tanto en plantas como en animales, la evolución por selección natural ha resultado en optimizar las redes vasculares de forma fractal. Esta es la principal hipótesis que permite predecir las leyes de escala mencionadas anteriormente (entre muchas otras) [2]. En el Apéndice II se muestran más ejemplos.

Actividad

Se propone estudiar diversas leyes de escala en plantas. Se trabajarán con fotografías de hojas frescas de una misma especie. Las imágenes se registraron con una cámara fotográfica Canon PowerShot SX150 IS. La masa de cada hoja se determinó con la balanza digital (rango de medición: hasta 500 g, resolución: 0,01 g).

En particular, se quiere obtener la función que mejor aproxime la relación entre las distintas variables asociadas a las hojas de estudio.

En **`MATERIAL DE LAS CLASES`** se encuentran disponibles tutoriales para realizar las distintas actividades de esta guía.

Mediciones:

Para realizar las mediciones de los distintos parámetros de las hojas se propone usar el programa de análisis de imágenes **ImageJ**, que es de distribución libre y de fácil instalación (https://imagej.nih.gov/ij/download.html). Procedimiento:

1. Familiarizarse con el programa ImageJ. Para ello se sugiere tomar una fotografía de un objeto (de geometría simple) junto con una escala de referencia (por ejemplo, una regla). Calcular el área del objeto con ImageJ y verificar si el resultado obtenido es el esperado (necesitará calcular previamente el área del objeto por otro método).

2. Estimar la incerteza de la arista y del área de un pixel.

3. Para cada hoja medir el largo L y el área A. Estimar las incertezas de las mediciones.

Análisis:

1. Graficar (ambas magnitudes con sus incertezas)

   i. L vs. M

   ii. A vs. M

   iii. L vs. A

   Observando los gráficos que construyó, responda:
   ¿Qué forma tienen los datos? (por ejemplo: recta, cuadrática, cúbica, raíz cuadrada, etc).
   ¿Puede hacerse un ajuste lineal?

2. Repetir los gráficos del ítem anterior, pero esta vez utilizando el logaritmo de las variables. Observe los gráficos y reflexione acerca de las siguientes preguntas:
   ¿Qué forma adoptan en esta representación? Discutir la información que podría obtenerse de un ajuste lineal sobre estos datos.
   Obtenga los valores de los parámetros Y_0 y b con sus respectivas incertezas para aquellos casos en los cuales las relaciones entre las variables sigan una ley de potencias.
   Sugerencia: para realizar la regresión lineal coloque como variable Y aquella variable con mayor error relativo.

Algunas preguntas más

Aquí van algunas preguntas que pueden orientar a lo largo de la practica. Recomendamos leerlas antes, y sobre todo ¡volver a leerlas después! Las preguntas pueden cambiar de significado a medida que la practica avanza.

- Si la masa de una hoja crece al doble, ¿el largo/área de la hoja crece al doble también?
- Si los datos en escala lineal no parecen una recta, pero en logaritmo sí, ¿qué puede decirse?
- Si los datos en escala lineal parecen una recta, y en logaritmo también, ¿qué puede decirse?
- ¿Y si los datos no parecen una recta de ningún modo?

Apéndice I

Como ejemplo muy particular de funciones no lineales, estudiaremos una relación definida por una función potencial que tiene la forma funcional $f(x) = ax^k$, donde a es la constante de proporcionalidad y k el exponente.

Estas funciones tienen la siguiente propiedad:

$$f(cx) = a(cx)^k = c^k ax^k = c^k f(x) \tag{2}$$

donde c es una constante. O sea, escalando el argumento de la función por un factor constante c, se produce un re-escalamiento de la función por un factor constante c^k ($f(cx) \propto f(x)$). Esto quiere decir que alcanzará con una transformación lineal para superponer los gráficos correspondientes a distintos dominios. En la figura 1 se muestra un ejemplo de este caso.

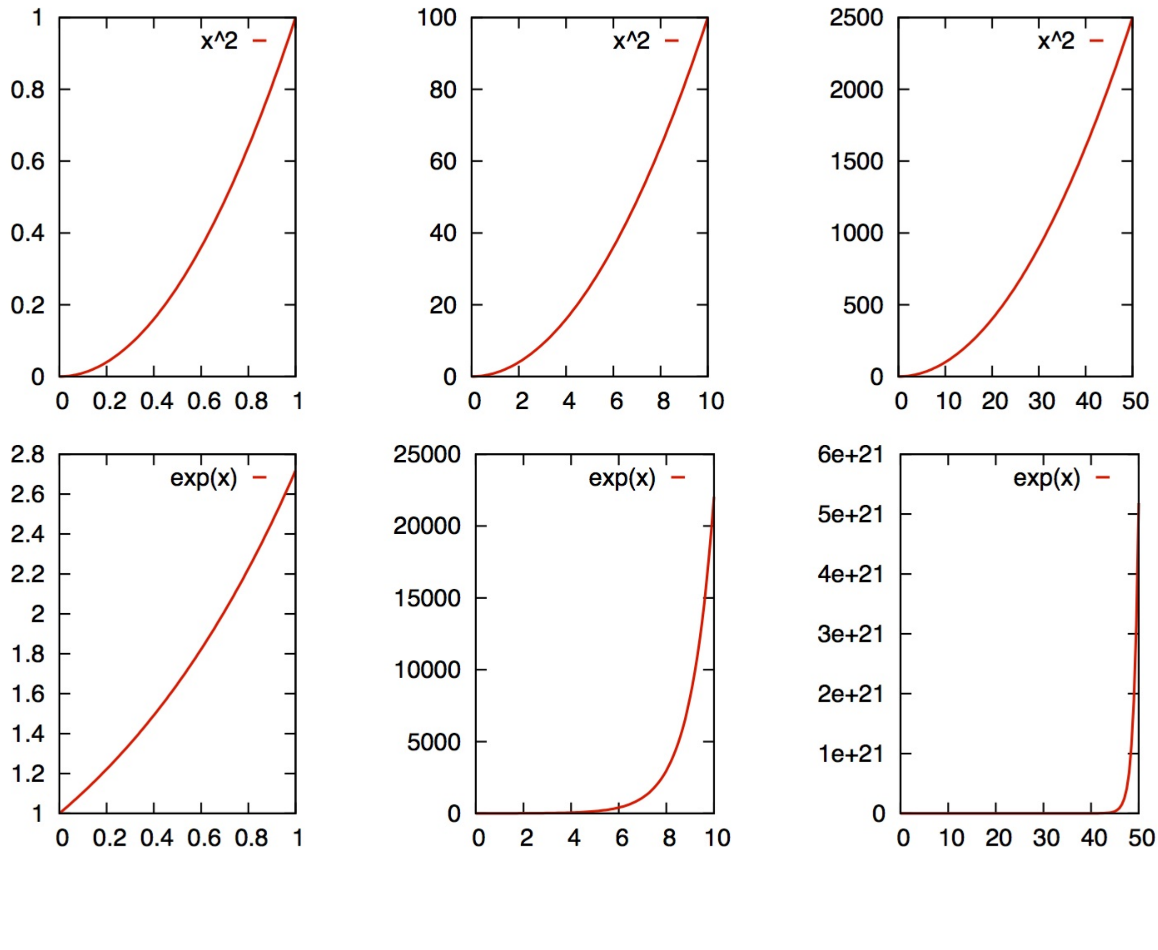

Figura 1: Comparación entre funciones potenciales (por ejemplo x^2) y no potenciales (por ejemplo e^x).

En este sentido, un fenómeno descripto por una función potencial tiene el mismo aspecto, independientemente de la escala a la que la contemplemos. Debido a esto, si un fenómeno puede ser descripto por una ley potencial se dice que sigue una “ley de escala”.

Apéndice II: Información adicional

En el caso de plantas, el modelo de WBE permite realizar ciertas predicciones:

$$H = H_0 M^{1/4} \tag{3}$$

$$r = r_0 M^{1/4} \tag{4}$$

siendo H la altura de la planta, r el radio del tronco y M la masa. Respecto de la geometría de la planta, también existen predicciones interesantes:

$$A = A_0 r^2 \tag{5}$$

$$N = N_0 r^{-2} \tag{6}$$

siendo A el área de la hoja, N el número de ramas, y r el radio del tronco. Pueden encontrar una lista con muchas más leyes alométricas en la Tabla 1.

Table 1 Predicted values of scaling exponents for physiological and anatomical variables of plant vascular systems.

Variable	Plant mass		Branch radius		
	Exponent predicted	Symbol	Symbol	Exponent	
				Predicted	Observed
Number of leaves	$\frac{3}{4}$ (0.75)	n_0^L	n_k^L	2 (2.00)	2.007 (ref. 12)
Number of branches	$\frac{3}{4}$ (0.75)	N_0	N_k	–2 (–2.00)	–2.00 (ref. 6)
Number of tubes	$\frac{3}{4}$ (0.75)	n_0	n_k	2 (2.00)	n.d.
Branch length	$\frac{1}{4}$ (0.25)	l_0	l_k	$\frac{2}{3}$ (0.67)	0.652 (ref. 6)
Branch radius	$\frac{3}{8}$ (0.375)	r_0			
Area of conductive tissue	$\frac{7}{8}$ (0.875)	A_0^{CT}	A_k^{CT}	$\frac{7}{3}$ (2.33)	2.13 (ref. 8)
Tube radius	$\frac{1}{16}$ (0.0625)	a_0	a_k	$\frac{1}{6}$ (0.167)	n.d.
Conductivity	1 (1.00)	K_0	K_k	$\frac{8}{3}$ (2.67)	2.63 (ref. 12)
Leaf-specific conductivity	$\frac{1}{4}$ (0.25)	L_0	L_k	$\frac{2}{3}$ (0.67)	0.727 (ref. 17)
Fluid flow rate			$\dot{Q}_k$	2 (2.00)	n.d.
Metabolic rate	$\frac{3}{4}$ (0.75)	$\dot{Q}_0$			
Pressure gradient	$-\frac{1}{4}$ (–0.25)	$\Delta P_0/l_0$	$\Delta P_k/l_k$	$-\frac{2}{3}$ (–0.67)	n.d.
Fluid velocity	$-\frac{1}{8}$ (–0.125)	u_0	u_k	$-\frac{1}{3}$ (–0.33)	n.d.
Branch resistance	$-\frac{3}{4}$ (–0.75)	Z_0	Z_k	$-\frac{1}{3}$ (–0.33)	n.d.
Tree height	$\frac{1}{4}$ (0.25)	h			
Reproductive biomass	$\frac{3}{4}$ (0.75)				
Total fluid volume	$\frac{25}{24}$ (1.0415)				

Values are given as a function of total plant mass, M, and branch radius, r_k. For the latter case, predictions are compared with measured values in the last column. References cited do not quote confidence levels, except for branch length, where they are given as ±0.036. Because botanists rarely report allometric scaling with mass, no values for observed exponents are quoted. n.d., no data available.

Tabla 1: Leyes de escala alométricas para diversas variables anatómicas y fisiológicas de sistemas vasculares de plantas [1].

Referencias

[1] G. West, J. Brown y B. Enquist, *A general model for the structure and allometry of plant vascular systems*, Nature **400**, 664 (1999).

[2] C. Price y B. Enquist, *Scaling of mass and morphology in plants with minimal branching: an extension of the WBE model*, Functional Ecology **20**, 11 (2006).