Introducción a la estadística de las mediciones

Mónica B. Agüero
Dpto. de Física, FCEyN, UBA
Revisado: marzo 2022

Los **errores casuales** o **aleatorios** generan distinguibilidad entre dato y dato (obtenemos resultados distintos), cuando repetimos un experimento en idénticas condiciones. Sin embargo, mediante la teoría estadística podemos determinar el valor de la magnitud medida y estimar su error estadístico.

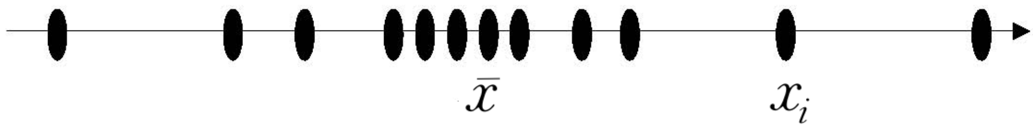
Supongamos que realizamos una serie de N mediciones de una misma magnitud obteniendo los resultados $x_1, ..., x_N$. Nos podemos preguntar:

¿Hay alguna regularidad en los resultados?

¿Alguno de ellos aparece con más frecuencia que los demás?

¿Qué resultado representa mejor al grupo de observaciones en su totalidad?

Si consideremos el caso particular de una serie de resultados distribuidos alrededor del promedio $\bar{x}$, observamos que hay valores que están más cerca del promedio y otros, menores en número, se encuentran más lejos. Si hacemos una nueva medición x_{N+1} no sabemos de antemano



el resultado que va a salir pero sí podremos decir que, con cierta probabilidad, estará cerca del promedio. No podemos predecir el valor de una medición dada pero sí podemos decir algo sobre la probabilidad de que su valor caiga en un determinado intervalo de valores posibles.

Una herramienta útil que vamos a usar en este curso para analizar este conjunto de datos son los histogramas.

1. Histograma

Si dividimos el eje x en pequeños intervalos iguales Δx, podemos contar el número de observaciones ΔN que caen en cada intervalo y representarlo gráficamente. Este gráfico de barras verticales se llama histograma (ver Fig. 2). Los histogramas son útiles para describir distribuciones con un gran número de datos $(x_1, x_2, ..., x_N)$ obtenidos experimentalmente. Para realizar un histograma:

- marcamos intervalos regulares sobre un eje horizontal (en el rango donde están los valores de las mediciones). El ancho de estos intervalos se llama *factor de clase* o *bin size*.
- sobre cada intervalo dibujamos un rectángulo cuya altura es proporcional a la cantidad de mediciones que caen dentro de dicho intervalo (*número de ocurrencia*).

- Cuanto más grande sea la estadística, más pequeños podemos hacer los intervalos Δx y tener un número suficientemente grande de datos ΔN en cada intervalo.

- En vez del *número de ocurrencia* podemos graficar, en el eje de las ordenadas, la *frecuencia de ocurrencia* que se obtiene dividiendo el *número de observación* de cada intervalo por el *número total de observaciones*: $\frac{\Delta N}{N}$.

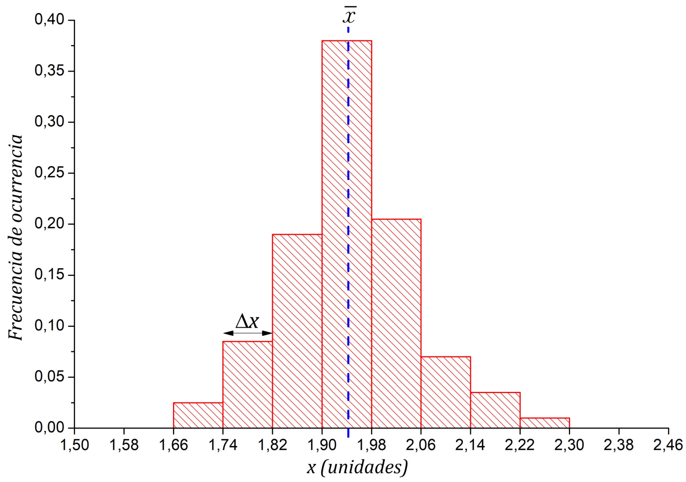


Figura 1: Modelo de histograma. El ancho Δx de las barras del histograma se lo conoce como *factor de clase* o *bin size*.

Ahora podemos apreciar de un solo vistazo cómo se distribuyen los valores a lo largo de la escala. Esta distribución es clave para una interpretación satisfactoria de las mediciones.

Se necesita tener algún cuidado en la elección del bin size en un histograma. Si los bin size se hacen demasiado anchos, entonces todas las mediciones (o casi todas) caerán en una misma barra, y el histograma consistirá en un único rectángulo, lo cual no aporta mucha información. Si los bin size se hacen demasiado angostos, entonces pocas barras incluirán más de un resultado, y el histograma consistirá en numerosos rectángulos estrechos, casi todos de la misma altura. Claramente, el bin size debe elegirse de modo que cada una de las diferentes barras del histograma incluya varios resultados.

2. Tratamiento estadístico de datos

Pero queremos ir más lejos. Entonces, para analizar la serie de N mediciones de una misma magnitud obtenida en igualdad de condiciones vamos a emplear la Teoría Estadística. Los métodos estadísticos aportan una estimación fiable de las incertidumbres aleatorias y proporcionan un procedimiento bien definido para reducirlas. Para ello veamos algunas definiciones a tener en cuenta.

2.1. Medidas de Centralización

Hay diferentes posibilidades para definir el resultado que representa mejor al grupo de observaciones en un conjunto de datos [1]. En la Fig. 2 se muestran algunos ejemplos.

- **Media o promedio:** Supongamos que tenemos N mediciones de la variable x (medidas en las mismas condiciones, con el mismo equipo y procedimientos) y obtenemos los N resultados $x_1, ..., x_N$. La mejor estimación de x es usualmente la media de $x_1, ..., x_N$. Esto es $x_0 = \bar{x}$ donde
$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}. \tag{1}$$
La media es el promedio aritmético de todas las mediciones de esa cantidad.
Otros conceptos útiles en el análisis de una serie de mediciones son la *mediana* y la *moda*:

- **Mediana:** si ordeno las mediciones de menor a mayor, la mediana es aquel valor que separa por la mitad las observaciones de tal forma que el 50 % de estas son menores que la *mediana* y el otro 50 % son mayores.

- **Moda:** valor de la variable que más veces se repite, es decir, aquella cuya frecuencia absoluta es mayor. No tiene por qué ser única (ver Fig. 3). Si queremos destacar aquel valor que sale más veces, entonces mencionamos el *valor modal*.

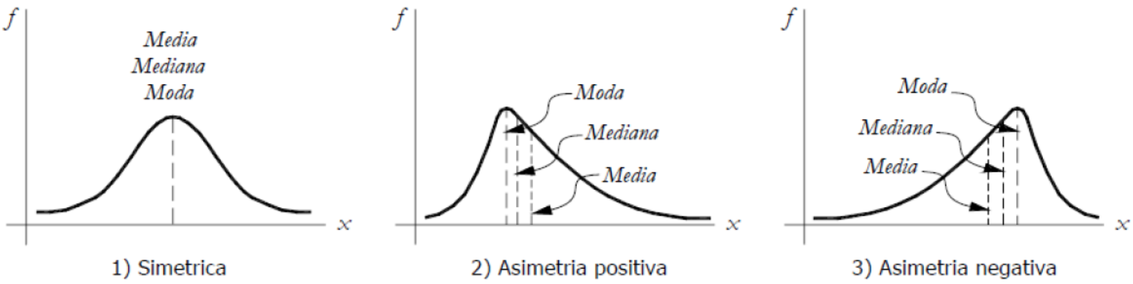


Figura 2: Distribuciones donde se ejemplifica la relación entre moda, mediana y media. Notar que para una distribución simétrica, la media, la mediana y la moda coinciden todas en el centro de la distribución.

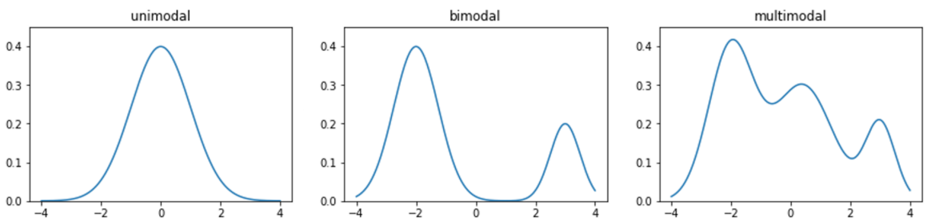


Figura 3: Ejemplos de distribuciones unimodal, bimodal y multimodal.

2.2. Amplitud de las distribuciones

Otra parámetro que se utiliza en Estadística es el **desvío estándar σ** [1,2]

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum (x_i - \bar{x})^2}. \tag{2}$$

Mientras que el desvío estándar <u>de una muestra</u> se define como

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum (x_i - \bar{x})^2}. \tag{3}$$

En las ecs. (2) y (3), la diferencia $d_i = x_i - \bar{x}$ se suele llamar *desviación* (o *residual*) de x_i respecto de $\bar{x}$, y nos dice por cuánto la i-ésima medida x_i difiere del promedio $\bar{x}$. La ec. (2) también se conoce como *desvío estándar poblacional* y la ec. (3) como *desvío estándar muestral.*

La cantidad S estima la desviación estándar de una población basada en una muestra aleatoria (porque no se dispone de datos sobre la población completa). Sin embargo, cuando la muestra es grande, $N - 1$ tiende a N. Por este motivo el desvío estándar de la muestra tiende al poblacional para muestras grandes ($S \to \sigma$).

El desvío estándar como incertidumbre en una sola medición

El desvío estándar es una medida de la distribución de las mediciones alrededor del valor más probable. Nos da una idea de cuán dispersos están los datos alrededor del valor promedio.

Si se mide la misma cantidad x muchas veces, siempre usando el mismo método, y si todas sus fuentes de incertidumbre son pequeñas y aleatorias, entonces los resultados se distribuirán alrededor del valor verdadero x_{true} siguiendo una curva en forma de campana (*distribución Normal*). En particular, aproximadamente el 68 % de las mediciones estarán dentro del rango $\bar{x} \pm \sigma$ (donde nuestra mejor estimación del valor verdadero está dado por $\bar{x}$).

En otras palabras, si realiza una sola medición (utilizando el mismo método), hay una probabilidad del 68 % de que el resultado esté dentro del intervalo $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$.

La desviación estándar σ caracteriza las incertidumbres asociadas a las **medidas experimentales individuales** que se realizan con el fin de determinar el valor "verdadero". Para un dado número de observaciones, la incertidumbre al determinar la media $\bar{x}$ de la distribución es **proporcional** a la desviación estándar de esa distribución.

Importante: Cuando informamos el resultado final de la medición reportamos

$$x = x_0 \pm \epsilon = \bar{x} \pm \epsilon \tag{4}$$

donde ϵ tiene en cuenta todas las fuentes de error. Si $\epsilon^2 = \epsilon_{inst}^2 + \epsilon_{est}^2$, ϵ_{inst} es el error instrumental y ϵ_{est} es el error estadístico (o error aleatorio). Recordar que σ **no** es el error estadístico porque el resultado final que informamos es un valor promedio.

En la Sec. 2.3 se discute cómo calcular el error estadístico y en la Sec. 2.4 se ejemplifica el rol de σ para una distribución Gaussiana.

2.3. Error estadístico de la serie de N mediciones

Si $x_1, x_2, ..., x_N$ representan los resultados de N mediciones de la misma cantidad x, entonces, la mejor estimación para la cantidad x es su media $\bar{x}$. El resultado $x_0 = \bar{x}$ proviene de una combinación de todas las mediciones realizadas.

Se puede demostrar que el error estadístico de la serie de N mediciones viene dado por el desvío estándar dividido por $\sqrt{N}$. Esta cantidad se llama **desvío estándar de la media**

$$\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \tag{5}$$

también conocido como *error estándar.* Ahora ξ me indica que, si realizo una nueva serie de mediciones, hay un 68 % de probabilidad de que el nuevo promedio caiga en el intervalo $(\bar{x} -$

$\xi, \bar{x} + \xi)$.

La demostración de la ec. (5) excede el alcance de estas notas introductorias. Quienes estén interesados en más detalles pueden leer el capítulo 5 de la referencia [2].

Por lo tanto, el resultado final de la medición será

$$x = \bar{x} \pm \epsilon \tag{6}$$

donde $\bar{x}$ está dado por la ecuación (1) y el error absoluto por $\epsilon = \sqrt{\epsilon_{inst}^2 + \epsilon_{est}^2}$ con

$$\epsilon_{est} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \tag{7}$$

Una característica importante en la ec. (7) es el término $\sqrt{N}$ en el denominador. Por lo tanto, si hacemos más mediciones (medidas en las mismas condiciones y usando la misma técnica), σ no cambiaría de forma apreciable pero ϵ_{est} disminuiría al aumentar N.

Si bien al aumentar el número de mediciones es posible disminuir el error estadístico, desde el punta de vista físico, el error de $\bar{x}$ nunca puede ser cero. Sólo puede hacerse igual o del orden del ϵ_{inst}. El mejor balance se logra cuando $\epsilon_{est} \approx \epsilon_{inst}$. Esta relación nos da un criterio para determinar el número óptimo (N_{op}) de mediciones que se deberían realizar

$$N_{op} \approx \left(\frac{\sigma}{\epsilon_{inst}}\right)^2. \tag{8}$$

Esto nos muestra que no tiene sentido disminuir el ϵ_{est} más allá del error dado por el instrumento de medición. Si se quiere reducir el error absoluto ϵ será más conveniente cambiar el instrumento o mejorar el método de medición que aumentar el número de mediciones.

2.4. Distribución de Gauss (o distribución Normal)

En la mayoría de los experimentos, a medida que se aumenta el número de mediciones, el histograma empieza a tomar una forma definida. A medida que el número de mediciones se aproxima a infinito, su distribución se asemeja cada vez más a una determinada curva continua. Cuando esto sucede, dicha curva continua define lo que se denomina la *distribución límite*[1] [2].

Es importante tener en cuenta que la distribución límite es una construcción teórica que nunca puede medirse con exactitud. Cuantas más mediciones hagamos, nuestro histograma se acercará cada vez más a la distribución límite.

Diferentes tipos de medidas tienen diferentes distribuciones límite. En particular, si la forma obtenida para el histograma es una barra central rodeada por barras decrecientes distribuidas más o menos simétricamente a su alrededor, la distribución límite parece estar próxima a una curva acampanada simétrica. En este caso se dice que dicho histograma presenta una típica *distribución normal* o *Gaussiana*.

La experiencia muestra que, para todos los casos de errores casuales, el histograma correspondiente a la serie de N mediciones $(x_1, x_2, ..., x_N)$ puede ser aproximado por una función continua bien definida conocida como curva de **distribución de Gauss**. Los datos están dis-

[1] También llamada distribución poblacional, distribución poblacional infinita, distribución asintótica.

tribuidos alrededor del promedio $\bar{x}$, donde algunos valores que estarán cerca del promedio y, otros menos en número, estarán lejos.

Sea ΔN el número de mediciones que caen en el intervalo (entre x y $x+\Delta x$). Se comprueba experimentalmente que ese número depende del valor de x y de la longitud del intervalo Δx en forma aproximada [3]

$$\Delta N \approx \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right] \Delta x \tag{9}$$

La relación se transforma en igualdad para diferenciales dN y dx

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta x} = \frac{dN}{dx} = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{10}$$

Si además dividimos la expresión (10) por el número total de mediciones N, se tiene la función

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{11}$$

conocida como *distribución normal* o *curva de Gauss*.

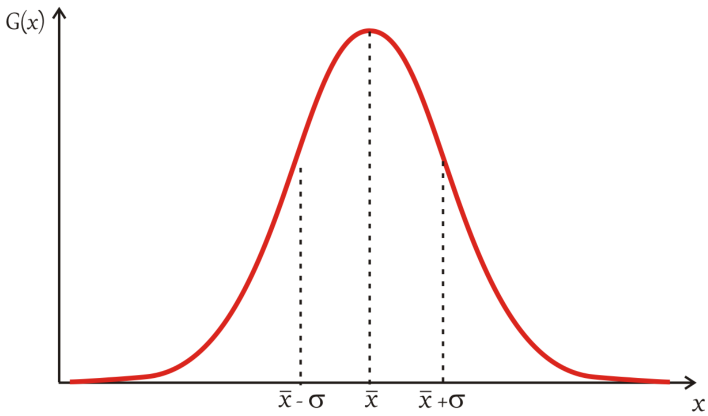


Figura 4: Curva de Gauss. En el eje de las abscisas se indican el promedio $\bar{x}$ y los puntos de inflexión de la curva ($\bar{x}-\sigma$ y $\bar{x}+\sigma$).

Podemos notar lo siguiente:

1. Presenta un máximo en $x = \bar{x}$.
2. Es simétrica respecto de ese valor medio $\bar{x}$.
3. Tiene forma de campana.
4. Sus puntos de inflexión están en $\bar{x} \pm \sigma$.
5. Tiende a cero a medida que nos alejamos de $\bar{x}$.

Cuanto **menor sea** σ, **más aguda** resultará la **curva resultante** y los errores mayores tendrán una menor probabilidad de ocurrencia, lo que significa que la **precisión del experimento es alta**. En cambio, si σ **es grande**, la **curva** será **achatada** (o dispersa) y esto indica una **baja precisión del experimento** (habrá un número considerable de mediciones con grandes desviaciones). En la Fig. 5 se muestran ejemplos de estos casos.

Si bien es imposible predecir el valor exacto que saldrá de una medición dada, sí se puede decir algo sobre la probabilidad de que ese valor este comprendido en un intervalo dado. El

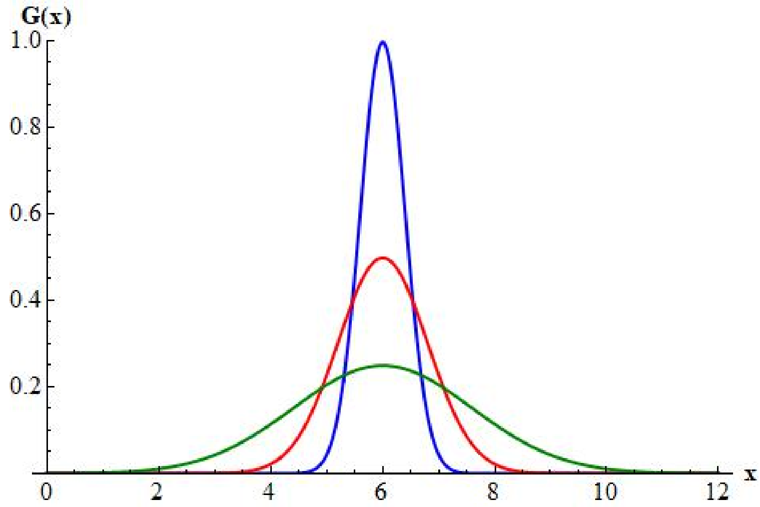


Figura 5: Efecto de σ sobre el ancho de la campana de Gauss.Curva azul: $\sigma = 0,4$. Curva roja: $\sigma = 0,8$. Curva verde: $\sigma = 1{,}6$. Notar que las tres curvas están centradas en $\bar{x} = 6$.

número de observaciones cuyo valor está comprendido entre x_1 y x_2 será

$$\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left[\frac{-(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \Delta N \tag{12}$$

Si ahora dividimos ΔN por N (número total de datos)

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left[\frac{-(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \int_{x_1}^{x_2} G(x)dx \tag{13}$$

obtenemos lo que se llama la **probabilidad de que una observación dada esté comprendida en este intervalo**. Es decir,

$$Probabilidad = \int_{x_1}^{x_2} G(x)dx. \tag{14}$$

Efectivamente, la probabilidad es por definición el cociente entre el número de casos "favorables" (o sea, en este caso, los que están en ese intervalo (x_1, x_2)) y el número de casos totales (N). El número $100\frac{\Delta N}{N}$ representa la probabilidad expresada en porcentaje. La probabilidad de encontrar un dato entre $-\infty$ y $+\infty$ es 1 (o sea 100 %). La probabilidad de encontrar un dato fuera del intervalo (x_1, x_2) será $1 - \frac{\Delta N}{N}$.

En resumen: de esto deducimos que, si bien es imposible predecir el valor exacto que saldrá en una medición dada, sí podemos decir algo sobre la probabilidad de que ese valor esté comprendido en un intervalo dado. Y para la predicción de esas probabilidades hemos utilizado la función de Gauss.

A partir de la Ec. (14) se obtiene que la probabilidad de que una medición dada caiga entre $\bar{x} - \sigma$ y $\bar{x} + \sigma$ es del 68 %:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} \exp\left[\frac{-(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right] dx = 0,68 \quad (68\,\%) \tag{15}$$

Cambiando los límites de integración en (15), se obtiene que la probabilidad de que la medida se encuentre entre $\bar{x} - 2\sigma$ y $\bar{x} + 2\sigma$ es del 95.4 % (ver Fig. 6).

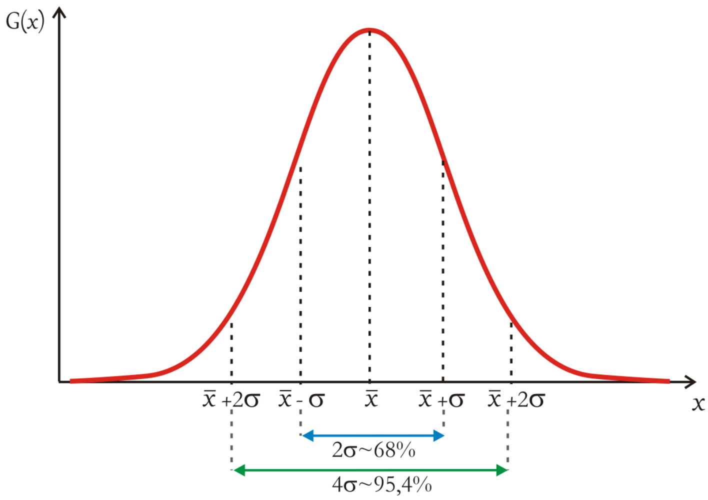


Figura 6: Distribución de probabilidades.

Supongamos haber hecho 100 mediciones de una magnitud, con un valor medio $\bar{x}$ y un desvío estándar σ de cada dato [3]. Supongamos que entre los 100 datos haya tres que difieren del valor medio en más de 3σ, por ejemplo. De acuerdo con la función de Gauss, la probabilidad de que un dato caiga fuera del intervalo $\bar{x} \pm 3\sigma$ es

$$1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{x}-3\sigma}^{\bar{x}+3\sigma} \exp\left[\frac{-(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right] dx = 0,0028 \quad (0,28\,\%) \tag{16}$$

O sea que sólo entre 1000 datos podría esperarse que haya 3 fuera de ese intervalo. Esto indica que esas tres mediciones particulares padecen de un defecto “extra-gaussiano”: deben rechazarse. De esta manera podemos fijar para cada serie de mediciones un “límite de confidencia”. Cualquier dato cuyo valor caiga fuera del intervalo dado por el límite de confidencia debe ser rechazado. Por supuesto que para determinar el límite de confidencia no puede darse un criterio unívoco; ese límite dependerá además del número total de mediciones N. En este curso no profundizaremos sobre ese tema.

2.5. Distribución de los promedios

Cuando tenemos varias (M) series de N mediciones, con sus promedios parciales $\bar{x}^k$, se comprueba experimentalmente que estos M promedios también se distribuyen “gaussianamente” alrededor del promedio total $\bar{X}$.

El ***teorema central del límite*** es uno de los resultados fundamentales de la estadística. Este teorema nos dice que si una muestra es lo bastante grande, sin importar la distribución de la serie de N mediciones, el histograma de los M promedios seguirá aproximadamente una distribución normal. O sea, su distribución es a su vez una curva de Gauss en la que el desvío estándar de la media ξ es el parámetro que fija sus puntos de inflexión. La interpretación de ξ, como uno de los parámetros de esa curva de Gauss, nos dice que el 68 % de los promedios parciales estarán entre $\bar{X} - \xi$ y $\bar{X} + \xi$.

Cuando hacemos una sola serie de N mediciones, obteniendo un promedio $\bar{x}$, sabemos a priori que ese promedio, y todos los promedios de otras series de N mediciones, pertenecerán a una distribución de Gauss alrededor del "valor verdadero". Y podemos interpretar el error estándar del promedio ξ como aquel valor que determina el intervalo alrededor del promedio, $\bar{x} \pm \xi$, dentro del cual el "verdadero valor" de la magnitud estará comprendido con una probabilidad del 68 %.

2.6. Comentarios finales

- Dada una serie de mediciones, σ (desvío estándar) me indica que hay un 68 % de probabilidad de que una nueva medición caiga en el intervalo $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$.
- Dada una serie de promedios, ξ (desvío estándar de la media, error estándar) me indica que, si realizo una nueva serie de mediciones, hay un 68 % de probabilidad de que el nuevo promedio caiga en el intervalo $(\bar{x} - \xi, \bar{x} + \xi)$.
- Cuando realizo estadística reporto el resultado del promedio $\bar{x}$ con una incerteza $\epsilon_{est} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$.
- El error estadístico puede reducirse aumentando el número de mediciones pero su límite está dado por otras fuentes de error (por ejemplo, la incertidumbre instrumental). Se puede utilizar este concepto para predecir el número de mediciones que se deben realizar a fin de obtener una cota de incertidumbre similar a la incertidumbre instrumental.
- **Incerteza final:** recordar sumar todas las contribuciones. Por ejemplo, en una serie de mediciones donde solo haya error estadístico ϵ_{est} y error instrumental ϵ_{inst}, el error final será $\epsilon = \sqrt{\epsilon_{inst}^2 + \epsilon_{est}^2}$.

Referencias

[1] D. C. Baird, *Experimentación: Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*, Prentice-Hall Hispanoaméricana S.A, México (1991).

[2] J. R. Taylor, *An introduction to error analysis: the study of uncertainties in physical measurements*, University Science Book, California (1997).

[3] J. G. Roederer, *Mecánica Elemental*, Eudeba, Universidad de Buenos Aires, Bs. As. (2005).