

Guía 4: Fluidos y termodinámica

Parte 1: Viscosidad en fluidos - velocidad límite

Cátedra: Prof. Diego Wisniacki - Depto. Física, FCEyN, UBA.

Objetivo: En esta experiencia de laboratorio se estudiará el movimiento de caída de una esfera en el seno de un fluido, analizando en particular el comportamiento de la fuerza viscosa.

Introducción

Es sabido que cuando un cuerpo se mueve en caída libre, en el vacío, el mismo se encuentra sometido sólo a la acción de su peso. Su aceleración es constante (g) y su velocidad aumenta proporcionalmente con el tiempo. ¿Qué diferencia hay cuando el movimiento de caída se da en el seno de un fluido viscoso, ya sea en aire o en un líquido? En la figura 1 se muestra el diagrama de cuerpo libre para un cuerpo que cae en un medio viscoso. Además de a su propio

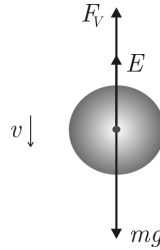


Figura 1: Diagrama de cuerpo libre de una esfera en el seno de un fluido viscoso.

peso (mg), el cuerpo es sometido a una fuerza denominada *empuje* (E), de sentido contrario al peso, por el solo hecho de encontrarse sumergido. Según el principio de Arquímedes, el empuje es igual al peso del líquido desalojado

$$E = g \delta_{liq} V_{esf} \quad (1)$$

siendo δ_{liq} la densidad del líquido y V_{esf} el volumen del cuerpo sumergido (esfera). Además, si el cuerpo se mueve aparece una fuerza viscosa (F_V) que se opone al movimiento del cuerpo. A diferencia de la fuerza de rozamiento dinámico entre dos superficies, esta fuerza viscosa es proporcional a la velocidad y depende también del tamaño y forma del cuerpo. Para el caso de una esfera de radio R que en un fluido con coeficiente de viscosidad η le presenta un flujo laminar al avanzar con velocidad v , la Ley de Stokes establece que

$$F_V = 6\pi\eta Rv. \quad (2)$$

Si analizamos las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo, y planteamos la 2^{da} Ley de Newton, obtenemos

$$mg - E - F_V = ma, \quad (3)$$

donde a es la aceleración del cuerpo. Puede verse que si $mg > E + F_V$ el cuerpo acelerará y aumentará su velocidad. Sin embargo, al aumentar la velocidad, aumenta la fuerza viscosa F_V

reduciéndose la aceleración. En el límite en que $mg = E + F_V$, la aceleración se hace nula y, por lo tanto, la velocidad se hace constante alcanzando su valor límite ($v \rightarrow v_{lim}$).

Para el caso de una esfera, cuyo volumen es $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, es posible obtener una expresión para v_{lim} reemplazando las ecuaciones (1) y (2) en la (3)

$$v_{lim} = \frac{2R^2g}{9\eta}(\delta_{esf} - \delta_{liq}), \quad (4)$$

donde δ_{esf} es la densidad de la esfera.

El desarrollo anterior corresponde a la caída de una esfera en el seno de un fluido infinito. Sin embargo, a partir del estudio del movimiento en un fluido contenido en un recinto limitado (tubos de fluido de radio r_{tubo}), Ladenburg propuso un factor de corrección [1] que permite relacionar la velocidad final efectiva v_{medida} con la velocidad límite del modelo de Stokes [2] v_{lim} :

$$v_{lim} = \left(1 + 2,4 \frac{R}{r_{tubo}}\right) v_{medida} \quad (5)$$

siendo v_{medida} la velocidad límite medida para el movimiento dentro del recipiente.

Más allá de este resultado es importante notar que la ecuación (3) es una ecuación dinámica, y que existe un régimen transitorio hasta llegar a los valores cercanos a la velocidad límite. Escribiendo la ecuación (3) como ecuación diferencial y agrupando las constantes, se obtiene la expresión

$$\ddot{x} = \beta + \alpha \dot{x}. \quad (6)$$

Proponiendo como solución una exponencial (homogenea) más una lineal (particular), y que parte con velocidad nula como condición de contorno obtenemos las siguientes expresiones para la posición y la velocidad en función del tiempo:

$$x(t) = v_{lim} t + \frac{v_{lim}}{\alpha} e^{-\alpha t}, \quad (7)$$

$$\dot{x}(t) = v_{lim} (1 - e^{-\alpha t}). \quad (8)$$

En esta experiencia de laboratorio se estudiará el movimiento de caída de una esfera en el seno de un fluido, registrada con una cámara y utilizando el programa de análisis de imágenes Tracker para extraer la posición de la esfera en función del tiempo. A partir de las mediciones se espera obtener una descripción del movimiento y un valor para la viscosidad (η). Este método para determinar la viscosidad de un fluido es conocido como el método de Stokes.

Actividades

En el laboratorio se cuenta con probetas llenas de glicerina y esferas de acero de distintos tamaños. Se propone estudiar el movimiento de distintas esferas, determinando la velocidad límite alcanzada y analizando si se alcanza efectivamente o no una velocidad constante.

- ¿Cómo puede determinarse la velocidad límite? ¿Cuál sería su error?
- ¿Cómo determinar la densidad de las esferas y del líquido?

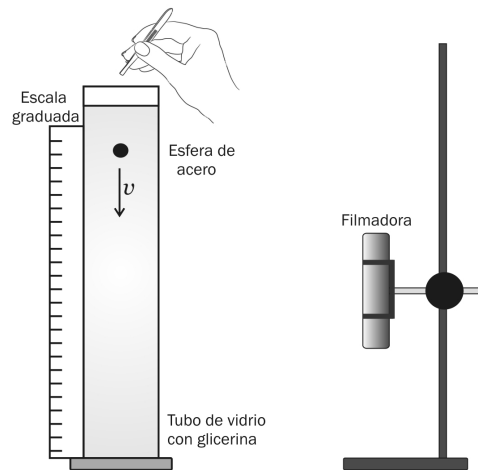


Figura 2: Esquema del experimento.

- ¿Cómo podría determinarse η en este experimento?

En particular, en esta práctica se va a adquirir el video de la trayectoria de la esfera de acero cayendo libremente para luego analizar su movimiento con el programa Tracker. Se propone:

1. Analizar los videos de cada Experiencia con Tracker para extraer la información de posición en función del tiempo de cada uno (esto es $y(t)$).
2. Con un programa de cálculo, obtener las velocidades en función del tiempo (esto es, $\dot{y}(t) = v(t)$. En Origin esto se puede hacer mediante el cálculo de derivada numérica: $\text{velocidad} = (\text{Col}(y)[i+1] - \text{Col}(y)[i]) / (\text{Col}(t)[i+1] - \text{Col}(t)[i])$. Y para el eje de los tiempos: $\text{tiempo} = (\text{Col}(t)[i] + \text{Col}(t)[i+1]) / 2$.
3. Graficar $v(t)$ y obtener la velocidad límite medida v_{medida} de cada bolita. Se puede usar un ajuste no lineal por una exponencial decreciente. También se puede tomar datos de velocidad en la zona estacionaria, si se llega a alcanzar esa velocidad antes de que la esfera toque el piso.
4. Para cada serie de mediciones, calcular v_{lim} corregido mediante el factor de Ladenburg (ecuación (5)). Luego, graficar v_{lim} vs R (radio de bolita).
5. Realizar un ajuste de los datos de v_{lim} vs R para hallar η considerando la ecuación (4).

Comentarios útiles

- Soltar la bolita sumergiendo un poco la pinza en el fluido.
- Emplear bolitas de diámetros $D < 8$ mm.
- Antes de comenzar a filmar el movimiento de la bolita, medir la densidad del fluido con un densímetro.
- Para sacar la bolita del fluido utilizar un imán. Acercar lentamente el imán para evitar que la bolita golpee la probeta de vidrio.

Apéndice: Análisis de imágenes con Tracker

Tracker es un software gratuito creado por Open Source Physics (OSP) con soporte para varios sistemas operativos. El programa permite analizar videos y modelar los resultados. En particular nos interesa una herramienta que permite el seguimiento de objetos (posición, velocidad y aceleración superponiendo los gráficos), posee gran variedad de filtros espaciales para mejorar la imagen, así como también perfiles de línea para analizar espectros y patrones de interferencia. Está especialmente diseñado para ser utilizado en los laboratorios universitarios.

Ayuda

- Es importante que el fondo y la iluminación sean homogéneos para evitar el ruido en la medición.
- En cada video que se hace es necesario tener una magnitud patrón para poder calibrar las distancias recorridas. Una vez abierto el archivo en el Tracker, hay que elegir los cuadros de interés del video con la herramienta “ajustes de corte” (*“clip settings”*), luego cargar la calibración espacial (utilizando el patrón) con la herramienta “Calibración” y finalmente agregar el sistema de referencia.
- La trayectoria de la esfera se puede determinar de forma manual (cuadro a cuadro marcar posición) o de forma automática. Esta última resulta más precisa. Para ello usar “crear” > “masa puntual” (*“point mass”*). Se elige el *key frame* (que es lo que va a tener que seguir el programa), esto se hace en el primer cuadro de la trayectoria presionando **shift+ctrl+click** del mouse.
- En el siguiente sitio se pueden encontrar tutoriales como: <https://www.youtube.com/watch?v=n4Eqy60yYUY>.

Referencias

- [1] R. Ladenburg, Ann. Physik 23, 447. (1907).
- [2] Batchelor, G.K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 223. (2002).