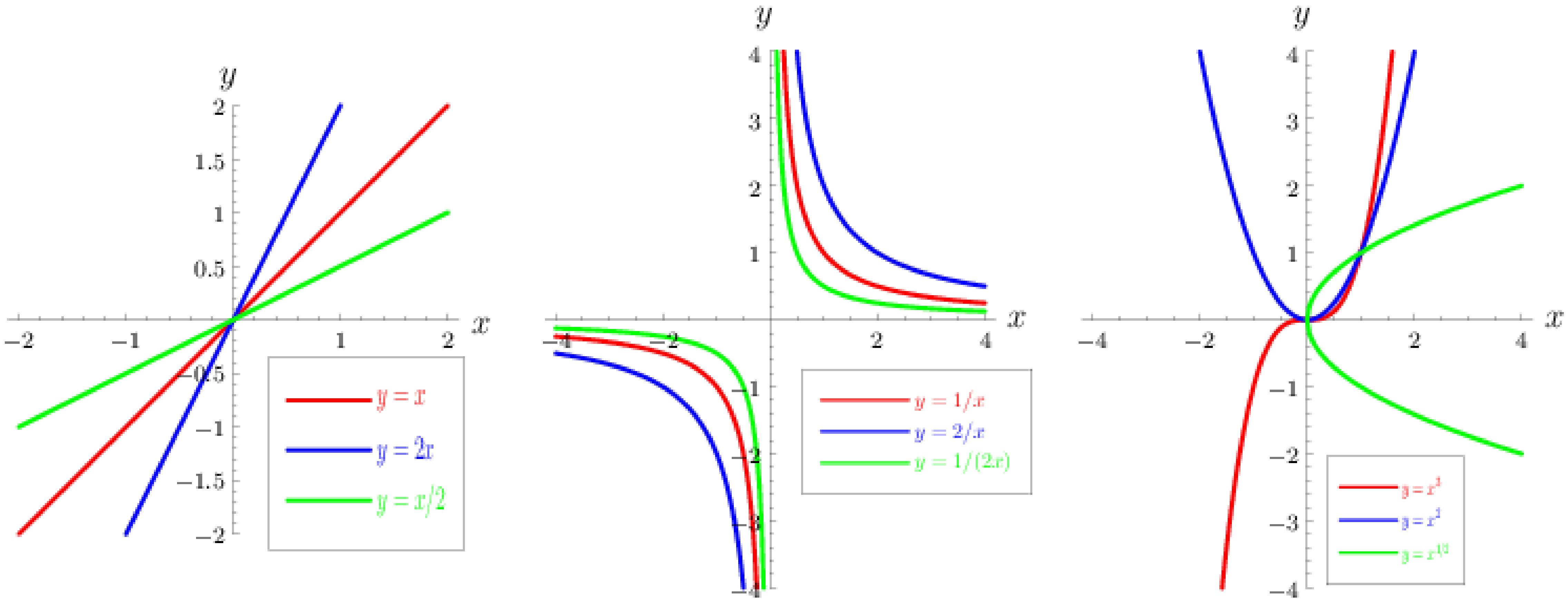
Leyes de escala

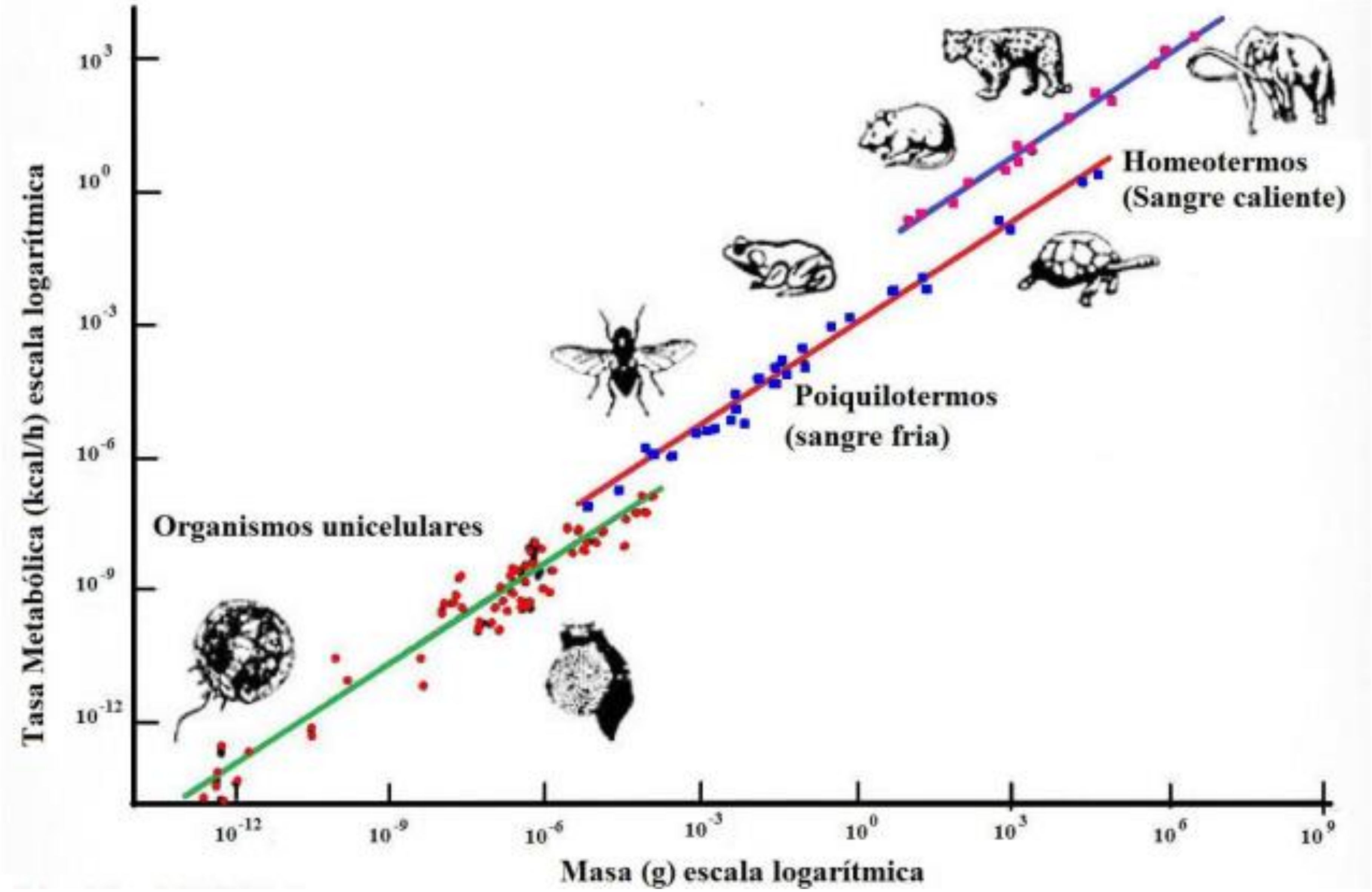
$Y = Y_0 X^b$ (ley de escala o ley de potencia)

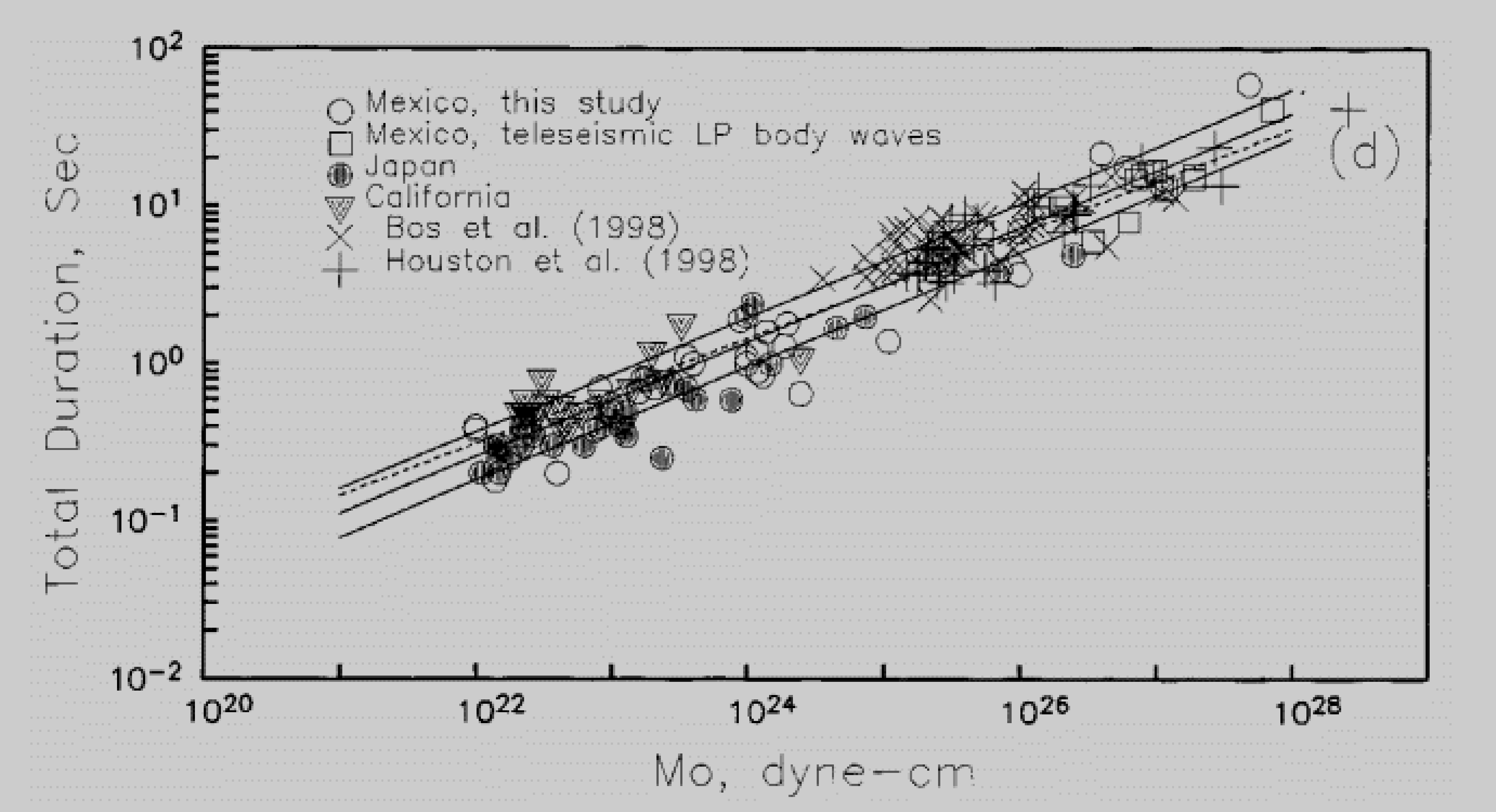
$\ln(Y) = \ln(Y_0) + b \ln(X)$ (forma linealizada)

Siendo b un exponente adimensional


$y = x$
$y = 2x$
$y = x/2$
$y = 1/x$
$y = 2/x$
$y = 1/(2x)$

Veamos algunos ejemplos


Tasa Metabólica (kcal/h) escala logarítmica
10^{3}
10^{0}
10^{-3}
10^{-6}
10^{-9}
10^{-12}
Homeotermos
(Sangre caliente)
Poiquilotermos
(sangre fria)
Organismos unicelulares
10^{-12}
10^{-9}
10^{-6}
10^{-3}
10^{0}
10^{3}
10^{6}
10^{9}
Masa (g) escala logarítmica



Mexico, this study
Mexico, teleseismic LP body waves
Japan
California
Bos et al. (1998)
Houston et al. (1998)
(d)
Total Duration, Sec
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{20}
10^{22}
10^{24}
10^{26}
10^{28}
Mo, dyne-cm

Otros ejemplos de leyes de escala:
Leyes alométricas en plantas

$H = H_0 \boxed{M^{1/4}}$ con H la altura y M la masa de la planta.

Dependencia Funcional
$H \propto M^{1/4}$

$H = H_0 M^{1/4}$

$\ln(H) = \ln(H_0) + \frac{1}{4}\ln(M)$

Otros ejemplos de leyes de escala:

Periodo del péndulo:
$T = k\boxed{L^{1/2}}$

Dependencia Funcional
$T \propto L^{1/2}$

$T = 2\pi(L/g)^{1/2} = (2\pi g^{-1/2})L^{1/2}$

$\ln(T) = \ln(2\pi g^{-1/2}) + \frac{1}{2}\ln(L)$

Procedimiento para detectar una ley de escala:

1) Grafico una variable Y vs la variable X.
2) Analizo si existe una relación lineal o no-lineal entre Y y X.
3) Si la relación es no-lineal, aplico logaritmo natural a ambas variables: ln(Y) y ln(X).
4) Realizo una regresión lineal de ln(Y) vs ln(X), si la relación entre los logaritmos de las variables originales es lineal, entonces se trata de una ley de escala, si la relación entre los logaritmos es no-lineal, existe otro tipo de no linealidad distinta a una ley de escala.

$$Y = AX^b \qquad \ln(Y) = \ln(A) + b\ln(X)$$

Linealización

$$\underbrace{ln(Y)}_{Y'} = ln(Y_0) + b\,\underbrace{ln(X)}_{X'} \longrightarrow Y' = a + b\,X'$$

$$Y' = ln(Y) \quad \rightarrow \quad \Delta Y' = \left|\frac{1}{Y}\Delta Y\right|$$

$$X' = ln(X) \quad \rightarrow \quad \Delta X' = \left|\frac{1}{X}\Delta X\right|$$

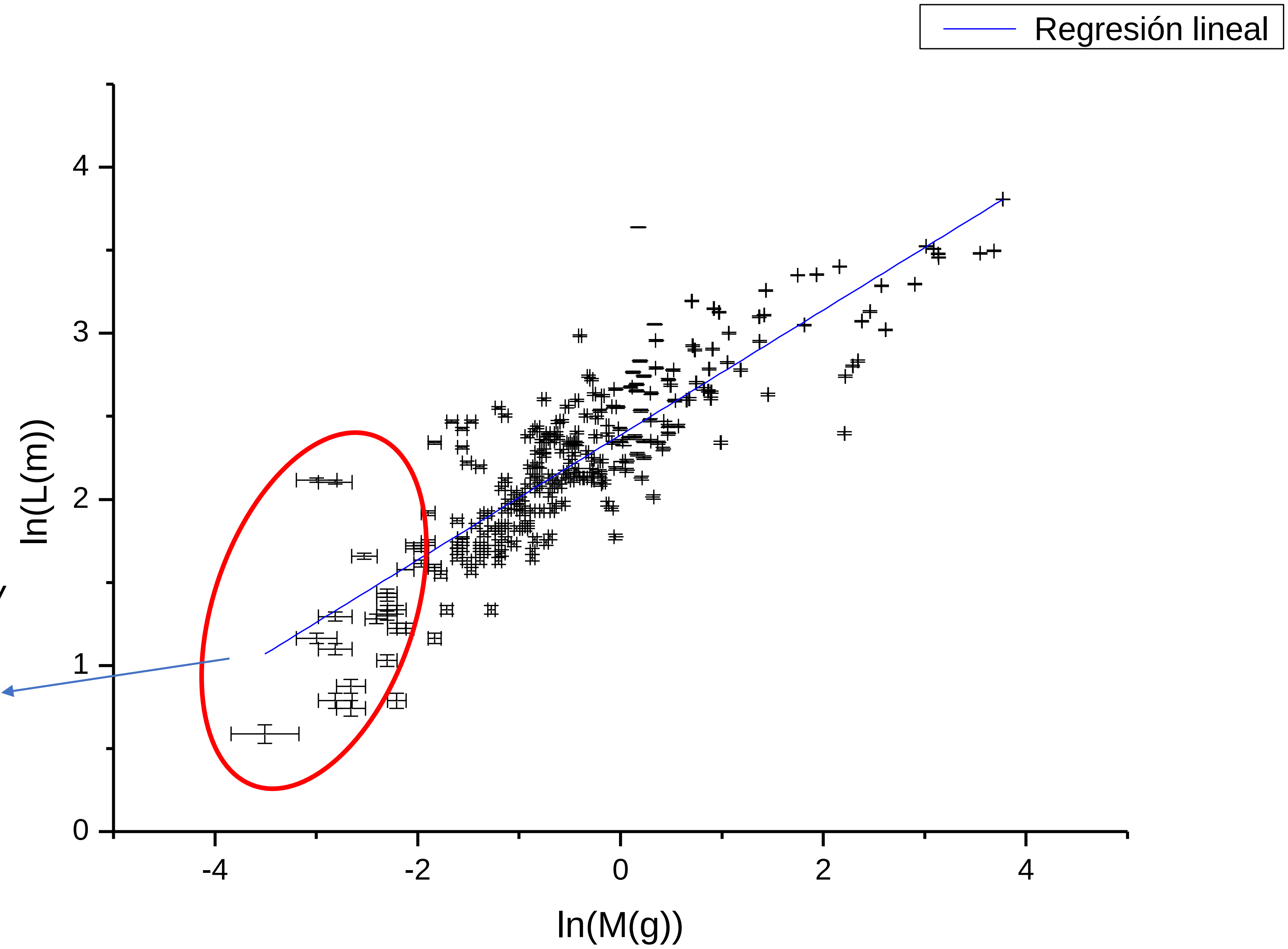
X e Y tienen unidades, pero sus logaritmos: Y' = ln(Y) y X' = ln(X) no poseen unidades!!!

Ej: si X posee unidades de g e Y de m, entonces en los ejes de los gráficos se escribe: ln(Y(m)) en el eje y ln(X(g)) en el eje x

b es la pendiente de la forma linealizada, es adimensional y su incerteza es la de la pendiente.
Si la ordenada al origen a = ln (Y_0), entonces:
$Y_0 = e^a$
Y la incerteza de Y_0 se propaga: $\Delta Y_0 = e^a \Delta a$

Los logaritmos son adimensionales, la magnitud original es la que tiene unidades:

ln(L(m))



Elegir poner en el eje Y aquella variable con mayor error relativo. ¿Cuál variable? Aquella que se esté graficando. En este caso debería analizar los errores relativos del ln(L) y ln(M)

¿Unidades de Y0?

$$Y = Y_0 x^b$$

No posee unidades -> falso

Posee las mismas unidades de Y -> falso

Posee las unidades del ln(Y) -> falso

¿Unidades de Y0?

$$Y = Y_0 x^b$$

No posee unidades -> falso
Posee las mismas unidades de Y -> falso
Posee las unidades del ln(Y) -> falso

¿Unidades de Y_0? $\rightarrow$ **Análisis dimensional** $\rightarrow$ útil para verificar o deducir una fórmula empírica o para determinar las dimensiones de las constantes de una ecuación.

Ejemplo:

si $[Y] = m$ $[X] = kg$ y supongamos que $b = 3$ $\Rightarrow$ $[Y_0] = m/kg^3$

Propiedades de una ley de potencia

$$f(x) = ax^k$$

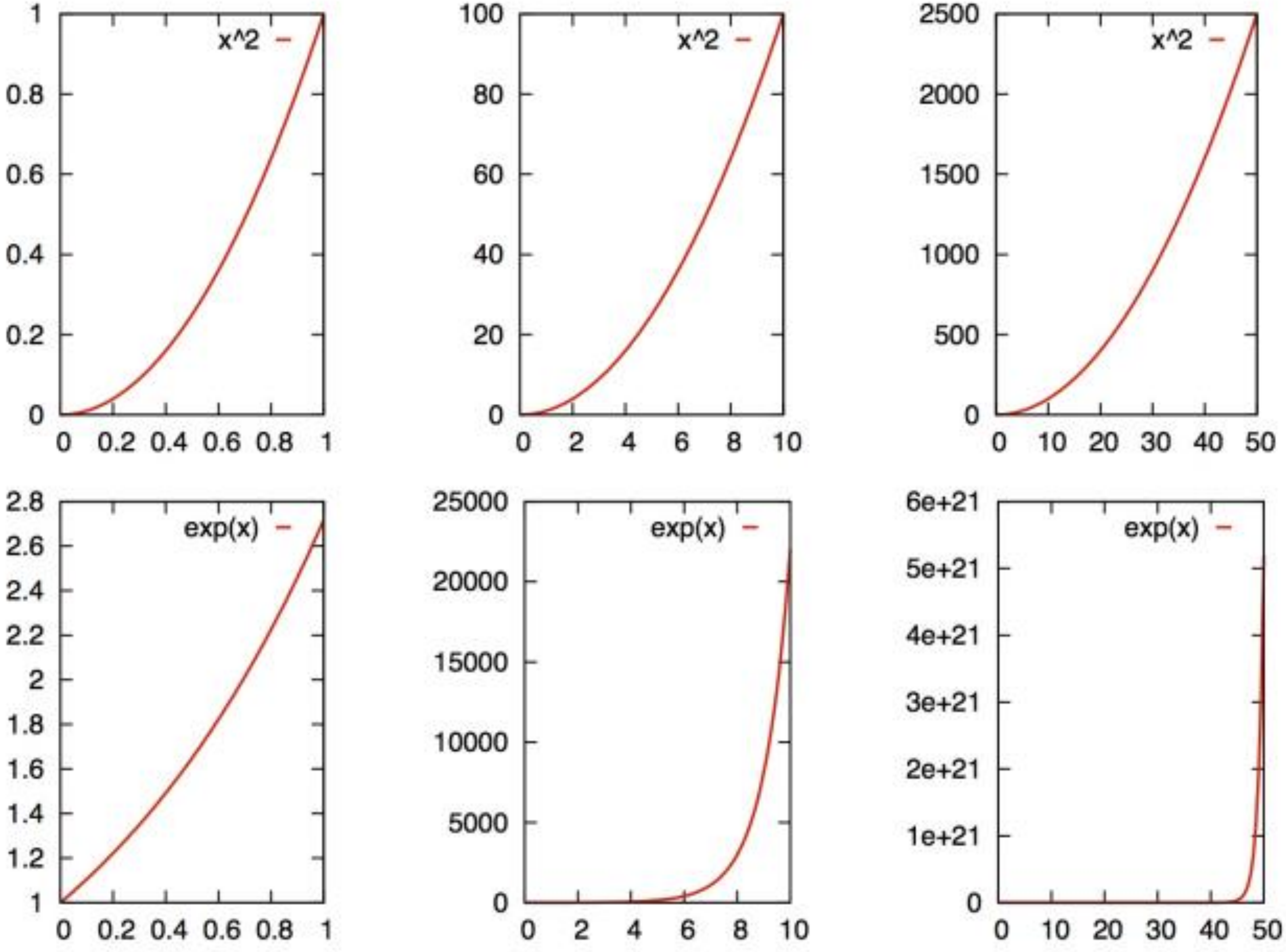
Función potencial de exponente k

$$\Big\downarrow \text{Propiedad}$$

$$f(cx) = a(cx)^k = c^k a x^k = c^k f(x)$$

Si escalo el argumento de la función por una constante c,
se produce el re-escalamiento de la función por una constante c^k.

$$f(cx) \propto f(x)$$


x^2
x^2
x^2
exp(x)
exp(x)
exp(x)
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1
0 2 4 6 8 10
0 10 20 30 40 50
0 20 40 60 80 100
0 500 1000 1500 2000 2500
1 1.2 1.4 1.6 1.8 2 2.2 2.4 2.6 2.8
0 5000 10000 15000 20000 25000
0 1e+21 2e+21 3e+21 4e+21 5e+21 6e+21

Diferencias entre una función exponencial y una ley de potencia

Ley de potencia

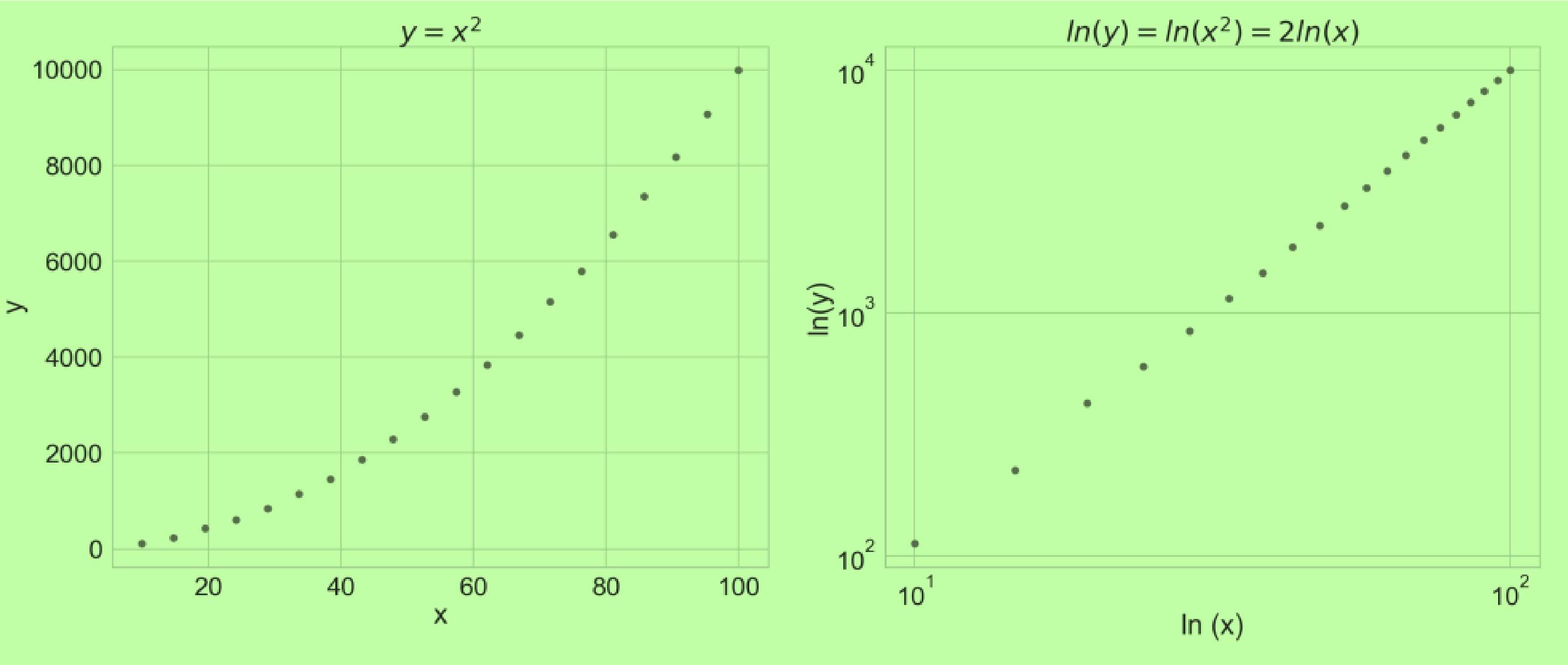
$Y = AX^b$ $\ln(Y) = \ln(A) + b\ln(X)$

Función exponencial

$Y = Ae^{bX}$ $\Rightarrow$ $\ln(Y) = \ln(A) + bX$

La variable x es el exponente de la función.

ln(Y) y x varían linealmente con pendiente b y ordenada al origen ln(A)



Ley de potencia

Función exponencial