Repaso de propagación de incertezas

Se puede obtener en forma indirecta la magnitud W, midiendo en forma directa las magnitudes *x, y, z,* etc. independientes entre sí, mediante una función *f (x, y, z, ...)* que las relacione tal que $W = f(x, y, z, ...)$.

Entonces a partir de las mediciones directas, conocemos los valores:

$$x_o \pm \Delta x$$
$$y_o \pm \Delta y$$
$$z_o \pm \Delta z$$
$$...$$

se puede obtener en forma indirecta la magnitud $W_o \pm \Delta W$ siendo:

$$W_o = f(x_o, y_o, z_o, ...) \qquad (1)$$

$$\Delta W = \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o, ...) \cdot \Delta x \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o, ...) \cdot \Delta y \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(x_o, y_o, z_o, ...) \cdot \Delta z \right]^2 + ... \right\}^{1/2} \qquad (2)$$

Donde $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o, ...)$ es la derivada parcial de f con respecto a *x*, que se obtiene considerenado a *x* como la única variable y al resto (*y, z,* …) como constantes. Notar que recién después de calcular la derivada parcial de la función, se evalúa dicha expresión en los valores medios (x_o, y_o, z_o, …). De la misma forma, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o, ...)$ es la derivada de *f* con respecto a la variable *y*, considerando al resto (*x, z,* …) constantes, etc.

La expresión (2) se conoce como *fórmula de propagación de errores*. Es válida siempre que las mediciones de *x, y, z,…* sean independientes (*independencia* significa que conocer la incerteza de la magnitud *x* no nos da ninguna información acerca de la incerteza de la magnitud *y*; y es lo que ocurre siempre que medimos ambas magnitudes realizando experimentos independientes). La expresión (2) es una fórmula aproximada para ΔW, que es válida cuando las derivadas parciales de f de orden superior son despreciables frente a la primer derivada parcial (en general, estaremos dentro de las hipótesis de validez de esta aproximación).

Ejemplos

a) Si se quiere medir el área S de una mesa rectangular de lados $A_o \pm \Delta A$ y $B_o \pm \Delta B$.
El resultado de la medición indirecta de esta magnitud será $S_o \pm \Delta S$.
El valor medio del área de la mesa se obtiene como:

$$S_o = A_o \,.B_o$$

Y su incerteza

$$\Delta S = \left\{ \left[\frac{\partial S}{\partial A}(A_o, B_o) \cdot \Delta A \right]^2 + \left[\frac{\partial S}{\partial B}(A_o, B_o) \cdot \Delta B \right]^2 \right\}^{1/2} = \left\{ [B_o \cdot \Delta A]^2 + [A_o \cdot \Delta B]^2 \right\}^{1/2}$$

donde $\frac{\partial S}{\partial A}(A_o, B_o) = B_o$ y $\frac{\partial S}{\partial A}(A_o, B_o) = A_o$.

b) ¿ y si se quiere medir el perímetro $P_o \pm \Delta P$ de la misma mesa?

En este caso se puede usar que $P = 2 \cdot A + 2 \cdot B$

Entonces $P_o = 2 \cdot A_o + 2 \cdot B_o$

$$\Delta P = \left\{ \left[\frac{\partial P}{\partial A}(A_o, B_o) \cdot \Delta A \right]^2 + \left[\frac{\partial P}{\partial B}(A_o, B_o) \cdot \Delta B \right]^2 \right\}^{1/2} = \left\{ [2 \cdot \Delta A]^2 + [2 \cdot \Delta B]^2 \right\}^{1/2}$$

ya que $\frac{\partial P}{\partial A}(A_o, B_o) = \frac{\partial P}{\partial B}(A_o, B_o) = 2$

c) Para pensar: ¿y si quisiéramos obtener el volúmen $V_o \pm \Delta V$ de un cuerpo esférico a partir de la medición de su diámetro $D_o \pm \Delta D$, usando $V = \frac{4}{3}\pi \cdot D^3$? ¿Qué valor le asignarían a π? ¿ π tiene incerteza? ¿Por qué?

d) Para pensar (un poco más…): si medimos N veces una misma magnitud, siempre con la misma incerteza, es decir, obtenemos como resultado los rangos: $x_1 \pm \Delta x$, $x_2 \pm \Delta x, \ldots$, $x_N \pm \Delta x$, y queremos obtener el promedio de las mediciones: $\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \right) / N$. ¿ Cuál será la incerteza de $\bar{x}$?