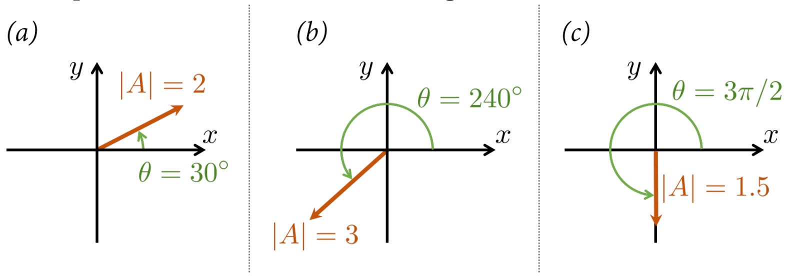
Guía 0: Repaso matemático

Vectores

1. Determinar el módulo y dirección de los siguientes vectores. Representar gráficamente.

$$\mathbf{A} = (-4;3), \quad \mathbf{B} = (2;0), \quad \mathbf{C} = -2\,\hat{x} - 3\,\hat{y}, \quad \mathbf{D} = 0\,\hat{x} - 5\,\hat{y}.$$

2. Hallar las componentes cartesianas de los siguientes vectores:



3. Dados los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, hallar gráficamente la suma, $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

   a) $\mathbf{A} = (-3;2)$, $\mathbf{B} = (-2;5)$
   b) $\mathbf{A} = (-2;0)$, $\mathbf{B} = (0;4)$
   c) $|\mathbf{A}| = 2$, $\theta_A = 20°$, $|\mathbf{B}| = 3$, $\theta_B = 135°$
   d) $|\mathbf{A}| = 3$, $\theta_A = 5\pi/4$, $|\mathbf{B}| = 2$, $\theta_B = -\pi/4$.

4. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ los vectores hallados en el ejercicio anterior. Halle analíticamente las componentes cartesianas y polares de los vectores suma: $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, y diferencia: $\mathbf{A}-\mathbf{B}$. ¿El módulo del vector suma, $\mathbf{C} = \mathbf{A}+\mathbf{B}$, es igual a la suma de los módulos de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$?

5. Encontrar el vector que tiene origen en el punto $\mathbf{P}$ y extremo en $\mathbf{Q}$, en los siguientes casos:

   a) $\mathbf{P} = (2;-1)$ y $\mathbf{Q} = (-5;-2)$.
   b) $\mathbf{P} = (2;-5;8)$ y $\mathbf{Q} = (-4;-3;2)$.

6. Dados los vectores $\mathbf{A} = 3\,\hat{x} + 2\,\hat{y} + 3\,\hat{z}$, $\mathbf{B} = 4\,\hat{x} - 3\,\hat{y} + 2\,\hat{z}$, $\mathbf{C} = -2\,\hat{y} - 5\,\hat{z}$, efectuar las siguientes operaciones:

   a) $(\mathbf{A}-\mathbf{B})/|\mathbf{C}|$
   b) $5\mathbf{A} - 2\mathbf{C}$
   c) $-2\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C}/5$

7. El producto escalar entre dos vectores se define como $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta$, donde θ es el ángulo que forman los dos vectores. Sean $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ los versores usuales que forman una terna derecha:
$$\hat{x} = (1, 0, 0)$$
$$\hat{y} = (0, 1, 0)$$
$$\hat{z} = (0, 0, 1)$$
Calcular los productos: $\hat{x} \cdot \hat{x}$, $\hat{x} \cdot \hat{y}$, $\hat{x} \cdot \hat{z}$, $\hat{y} \cdot \hat{y}$, $\hat{y} \cdot \hat{z}$, $\hat{z} \cdot \hat{z}$.

8. Usando la propiedad distributiva del producto escalar respecto a la suma, y los resultados del ejercicio anterior, demostrar que si:
$$\mathbf{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$
$$\mathbf{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$
entonces:
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

9. Efectuar el producto escalar entre los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, y decir si en algún caso $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares.

   a) $\mathbf{A} = 3\,\hat{x} - 2\,\hat{y} + 1\,\hat{z}$, $\mathbf{B} = -1\,\hat{x} + 3\,\hat{z}$.
   b) $|\mathbf{A}| = 3$, $|\mathbf{B}| = 2$, $\theta_{AB} = 60°$.
   c) $\mathbf{A} = (2; 3; -1)$, $\mathbf{B} = (6; -5; 2)$.
   d) $|\mathbf{A}| = 1$, $|\mathbf{B}| = 4$, $\theta_{AB} = \pi$.

Derivadas e Integrales

10. Sean A, α, b, c, ω y ϕ constantes. Derivar las siguientes funciones:

    a) $f(t) = c$
    b) $f(t) = b \cdot t + c$
    c) $f(t) = b \cdot t^{-1} + c$
    d) $f(t) = b \cdot t^n$, con $n \neq 1$
    e) $f(t) = A\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$
    f) $f(t) = A\,\sin(\omega\,t + \phi)$
    g) $f(t) = A\,\cos(\omega\,t + \phi)$
    h) $f(t) = A\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}\,\cos(\omega\,t + \phi)$

11. La *función primitiva* $F(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t$, es tal que su derivada es $f(t)$. Sean A, α, b, c, ω y ϕ constantes. Hallar la primitiva $F(t)$ de las siguientes funciones. No olvidar las constantes de integración.

    a) $f(t) = c$
    b) $f(t) = b \cdot t + c$
    c) $f(t) = b \cdot t^{-1} + c$
    d) $f(t) = b \cdot t^n$, con $n \neq 1$
    e) $f(t) = A\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$
    f) $f(t) = A\,\sin(\omega\,t + \phi)$
    g) $f(t) = A\,\cos(\omega\,t + \phi)$
    h) $f(t) = \frac{2\,t}{t^2+1}$ [integración por sustitución]
    i) $f(t) = t\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}$ [integración por partes]

12. Utilizando la regla de Barrow: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, con F una primitiva de f, calcular las siguientes integrales:

    a) $v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,\mathrm{d}t$, con a constante.
    b) $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t$, con $v(t)$ del ítem anterior.
    c) $E_p(h) = \int_0^h mg\,\mathrm{d}x$, con mg constante.

Ecuaciones diferenciales

13. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, hallando la función $y(t)$ correspondiente. En todos los casos, y_0 es una constante. Notación: $\dot{y} \equiv dy/dt$.

    a) $\dot{y} = 2$, $y(0) = 0$.
    b) $\dot{y} = a$, $y(0) = y_0$.
    c) $\dot{y} = \mathrm{e}^t + 2$, $y(0) = y_0$.
    d) $\dot{y} - \sin(3\,t) = 0$, $y(0) = y_0$.
    e) $\dot{y} = 2\,y$, $y(1) = y_0$.
    f) $t\,\dot{y} = 1$, $y(1) = y_0$.

    Discuta: ¿por qué es necesario (o no) definir $y(t_0) = y_0$?

14. Supongamos que una colonia tiene N_0 bacterias al tiempo $t = 0$. Si la colonia crece a una tasa proporcional a su población, entonces

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \kappa N, \quad \kappa > 0.$$

    a) Resolver la ecuación anterior para hallar $N(t)$. Graficar cualitativamente la solución.
    b) ¿Cuánto tarda la colonia en duplicar la población inicial? ¿Cuánto hay que esperar luego para que se vuelva a duplicar?

15. **(Optativo)** La ecuación del ejercicio anterior (crecimiento exponencial o Malthusiano) tiene una aplicación limitada ya que no es razonable que la colonia siga creciendo para siempre. Una mejora es considerar que la tasa de crecimiento depende del número de bacterias de forma tal que si N es un número “chico”, la colonia crezca pero si es un número “grande” disminuya. Esto puede tenerse en cuenta de la siguiente forma:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN\left(1 - \frac{N}{\kappa}\right), \quad \kappa > 0.$$

    a) Discuta de qué manera esta ecuación diferencial produce el efecto buscado según N sea grande o chico. *Ayuda:* analice el signo de $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ en función de N.
    b) ¿Para qué valores de N la población dismuye, y para cuáles crece? ¿Es posible que la población se mantenga constante para algún N?
    c) ¿Existe algún valor de N estable? Por estable queremos decir que si N aumenta o disminuye respecto de ese valor, la población vuelve a ese valor.
    d) Encuentre la solución $N(t)$. Para hacerlo considere la primitiva:

$$\int \frac{1}{x(1 - x\kappa^{-1})} dx = \ln \frac{x}{x - \kappa} + C$$

    e) Grafique cualitativamente la solución para distintas condiciones iniciales e interprete el resultado en función de las respuestas anteriores.

16. **(Optativo)** Una reacción química autocatalítica es una en la que la producción de una sustancia es estimulada por la propia sustancia. Este proceso (retroalimentación positiva) llevaría a un crecimiento descontrolado de la sustancia en cuestión si no estuviera limitado de alguna forma. Supongamos que llamamos c a la concentración de la sustancia C y $f(c)$ a su tasa de producción por unidad de tiempo $\frac{dc}{dt}$. La siguiente ecuación es un ejemplo de una ecuación que modela una reacción autocatalítica:

$$f(c) = \frac{dc}{dt} = 2\frac{\text{molar}}{\text{seg}} \cdot c - 1\frac{\text{molar}}{\text{seg}^2} \cdot c^2$$

a) Grafique la tasa de producción $f(c)$ en función de c.

b) ¿Para qué valores de c la tasa de producción es positiva y para qué valores es negativa?

c) Si inicialmente la concentración de C es 0.75 molar, ¿subirá o disminuirá la concentración con el tiempo?

d) Encuentre una expresión para $c(t)$.

e) ¿Qué relación tiene este problema con el del Ej. 15 (crecimiento logístico)?

17. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden. Tomar como condición inicial, en todos los casos, $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$. F, A y m son constantes.

a) $m\ddot{x} = F$.

b) $\ddot{x} = At$.

c) $\ddot{x} = \mathrm{e}^t$.

Ayuda: Para resolver este tipo de ecuaciones, puede ser conveniente asignar un nuevo nombre a la derivada primera. Por ejemplo, en lugar de trabajar con $\ddot{x}$, usar $\dot{x} = v$, y $\ddot{x} = \dot{v}$. *Notación:* $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $\ddot{x} = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$.

18. **(Optativo)** Considere la ecuación $\ddot{x} = -\gamma\dot{x}$, donde γ es una constante positiva. Obtenga la función $\dot{x}$ en función del tiempo bajo la condición inicial $\dot{x}(t = 0) = v_0$ con v_0 una constante positiva.

Nota: Bajo ciertas condiciones que estudiaremos cuando veamos mecánica a escala celular y molecular, la aceleración a ($\ddot{x}$) de un objeto que se mueve en un fluido verifica la ecuación $a = -\gamma v$, donde v ($\dot{x}$) es la velocidad, y γ es una constante positiva que depende de la masa del objeto, de su forma y de la viscosidad del fluido.

19. Considere la ecuación diferencial $\ddot{x} = -9x$:

a) Demuestre que $x(t) = \cos(3t)$ es una solución.

b) Demuestre que $x(t) = A\cos(3t)$ y $x(t) = \cos(3t + \phi)$ son soluciones.

c) ¿Es $x(t) = A\cos(3t + \phi)$ la solución más general posible? ¿Qué valores pueden tomar A y ϕ?

Ayuda: Para demostrar que una función propuesta es solución de una ecuación diferencial, siempre es posible obtener sus derivadas y reemplazarlas, junto con la función original, en la ecuación diferencial. Si tras reemplazar se obtiene una igualdad matemática, la función es solución; si en cambio se obtiene un absurdo, no lo es.

20. **(Optativo)** Encontrar una solución para las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas.

a) $\ddot{x} = -4x$, con $x(0) = 3$ y $\dot{x}(0) = 0$.

b) $\ddot{x} = -4x$, con $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 6$.

c) $\ddot{x} = -4x - 12$, con $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 0$.

d) $\ddot{x} = -4x - 12$, con $x(0) = -3$ y $\dot{x}(0) = v_0$.

21. **(Optativo)** La ecuación diferencial $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ tiene como solución a la función $x(t) = A\,\cos(ct + \phi)$, donde A y ϕ quedan determinadas por las condiciones iniciales del problema.

    a) Encuentre el valor de c para que esta función efectivamente sea solución de la ecuación.

    b) Una vez hallado c, encuentre los valores de A y ϕ sabiendo que a $t = 0$, $x(t = 0) = 0$ y $v(t = 0) = v_0$. *Ayuda:* Para encontrar c, reemplace $x(t)$ en la ecuación y despeje c.

    Esta ecuación (y su solución) describen el movimiento de un péndulo o un resorte (más de estos temas en próximas guías).

22. **(Optativo)** Supongamos ahora que la ecuación a resolver es:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \frac{\gamma}{m} v = 0$$

donde $v = \ddot{x}$. Sabemos que, bajo ciertas condiciones, la solución a esta ecuación diferencial es de la forma:

$$x(t) = A\,\mathrm{e}^{-bt}\,\cos(ct + \phi)$$

donde A y ϕ son constantes a determinar por las condiciones iniciales del problema. Al igual que en el problema anterior, halle los valores de b y c para que $x(t)$ sea efectivamente solución de la ecuación diferencial. Esta ecuación es una combinación de las situaciones dadas en los Ejs. 18 y en 21. Es decir, esta ecuación describe un movimiento oscilatorio, al que se le agrega una amortiguación.