

# Mediciones indirectas

## Objetivos generales

- Explorar distintas formas de **medir una magnitud de manera indirecta** e identificar las ventajas e hipótesis de cada una.
- Aprender a **propagar incertezas** para obtener la incerteza de la magnitud bajo interés.
- Aplicar los conceptos de **precisión, exactitud, cifras significativas y discrepancia**.

## Introducción

Cuando se desea obtener una **magnitud física**, no siempre se cuenta con un instrumento para medirla en forma DIRECTA. Frecuentemente, la magnitud deseada se deriva de algunas otras magnitudes que fueron obtenidas en forma directa. Esto se logra a través de alguna relación funcional entre las magnitudes, y se dice que la medición fue INDIRECTA.

*Por ejemplo, podemos medir la distancia recorrida por un móvil y el tiempo transcurrido de forma directa (con metro y cronómetro), pero para saber la velocidad debemos estimarla de forma indirecta.*

La elección del experimento es un punto crítico a la hora de obtener una magnitud. Para ello, resulta de suma importancia la decisión de los **instrumentos** a utilizar, así como el **método** elegido (siempre se debe evaluar la **validez de las hipótesis** del método utilizado).

*Por ejemplo, si queremos obtener la superficie de un cuerpo cuya forma se aproxima a alguna forma geométrica conocida (círculo, cuadrado, etc.), se podría medir directamente las longitudes (diámetros, lados, etc.) y luego realizar la cuenta adecuada para obtener la magnitud deseada. ¿Pero son realmente esas superficies círculos o cuadrados perfectos?*

Cuando medimos una magnitud en forma directa, obtenemos como resultado de la medición un conjunto de valores que llamamos INTERVALO DE CONFIANZA, relacionado con la INCERTEZA de la medición. Por ejemplo, si medimos en forma directa la magnitud  $x$ , dando  $x = x_0 \pm \Delta x$  (donde:  $x_0$  es el valor medio y  $\Delta x$  el error absoluto), podemos decir que un dado valor de la magnitud medida se encuentra en el intervalo ( $x_0 - \Delta x$ ,  $x_0 + \Delta x$ ) con cierta probabilidad, que depende de cómo hayamos calculado el error absoluto. Al expresar una magnitud que fue obtenida en forma indirecta, también lo haremos en la forma:  $W = W_0 \pm \Delta W$ .

Pero, ¿cómo se obtiene  $\Delta W$ ? Las incertezas de las mediciones directas **se propagan** sobre la incerteza de la medición indirecta, y esa propagación depende tanto de las incertezas de las mediciones directas como también de la relación entre ellas. Supongamos entonces

que se puede obtener en forma indirecta la magnitud  $W$  midiendo en forma directa las magnitudes  $x, y, z, \dots$  (independientes entre sí), mediante una función  $f(x, y, z, \dots)$ , tal que  $W = f(x, y, z, \dots)$ .

A partir de las mediciones directas, conocemos los valores:  $x = x_0 \pm \Delta x$ ;  $y = y_0 \pm \Delta y$ ;  $z = z_0 \pm \Delta z$ ;...

Entonces, se puede obtener en forma indirecta la magnitud  $W = W_0 \pm \Delta W$  siendo:

$$W_0 = f(x_0, y_0, z_0, \dots) \quad (1)$$

$$\Delta W = \sqrt{\left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0, \dots) \cdot \Delta x \right]^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0, \dots) \cdot \Delta y \right]^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0, \dots) \cdot \Delta z \right]^2} \quad (2)$$

donde  $\partial f/\partial x$  es la derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x$ , evaluada en los valores medios:  $x_0, y_0, z_0, \dots$ .<sup>1</sup> Notar que recién después de calcular la derivada parcial se evalúa dicha expresión en  $x_0, y_0, z_0, \dots$ . La expresión (2) se conoce como **fórmula de propagación de errores**. Es válida siempre que los parámetros  $x, y, z, \dots$  sean independientes. Independencia significa que conocer una magnitud (ya sea  $x, y, z$ , etc.) no provee ninguna información acerca de las otras magnitudes).

La expresión (2) es una fórmula aproximada para  $\Delta W$ , que es válida cuando las derivadas parciales de  $f$  de orden superior son despreciables frente a la primer derivada parcial (en general, estaremos dentro de las hipótesis de validez de esta aproximación). Pueden seguir un ejemplo en el apéndice.

En esta práctica aprenderemos las herramientas necesarias para obtener la incerteza de una medición indirecta a partir de mediciones directas de magnitudes independientes. Y además aprenderemos a comparar resultados de una misma magnitud procedentes de experimentos diferentes discutiendo los conceptos de precisión y exactitud. Si medimos una misma magnitud física utilizando diferentes métodos, ¿obtendremos resultados diferentes? ¿Cómo las comparamos? ¿Cómo podemos determinar si dos resultados son equivalentes o son distintos?

## ACTIVIDAD

Se buscará obtener el volumen de un cuerpo utilizando tres métodos experimentales diferentes. Cabe recordar que el método involucra tanto la elección de los instrumentos de medición, como el diseño del experimento. ¿Qué suposiciones haría en cada caso para que el método sea razonablemente válido?

<sup>1</sup> La derivada parcial de una función respecto a  $x$  se obtiene considerando a  $x$  como la única variable, mientras que al resto  $y, z, \dots$  se las considera constantes.

- a) **Por medición de sus lados.** Para medir el volumen del cuerpo, medir las magnitudes de interés utilizando un calibre. A partir de esas mediciones averiguar el volumen del objeto proponiendo un modelo geométrico.
- b) **Por medición de la masa utilizando una balanza.** Pesarse el objeto del cual quiere conocer su volumen, obtener la masa y, utilizando la relación  $V = m / \rho$  donde  $\rho$  es la densidad del material del cual está hecho el objeto, determinar el volumen del cuerpo.
- c) **Por desplazamiento de volumen.** Utilizar una probeta graduada. Llenarla hasta un volumen conocido con agua y luego sumergir cuidadosamente el objeto (debe quedar completamente sumergido). Determinar el volumen de agua desplazada por el objeto y concluir a partir de este resultado cuál es el volumen del cuerpo.

Las siguientes preguntas pueden ayudar para el análisis de los datos y considerar algunos aspectos de los métodos utilizados:

- Si utilizaron valores tabulados para alguno de los experimentos, ¿Qué incerteza les asignaron?
- ¿Se obtuvo el mismo resultado mediante los distintos métodos utilizados? ¿Cómo los compararon?
- ¿Cómo se informarían los resultados en caso de ser comparables? ¿Y si no lo fueran?
- ¿Cuál fue la medición más precisa? ¿Corresponde a la más confiable? ¿Podemos hablar de exactitud si desconocemos el volumen real?

### Apéndice. Determinación del error al medir una superficie.

Si se quiere medir el área  $S$  de una mesa rectangular de lados  $A$  y  $B$ . Tanto  $A$  como  $B$  fueron medidas directamente utilizando una cinta métrica, resultando:  $A = A_0 \pm \Delta A$  y  $B = B_0 \pm \Delta B$ . El resultado de la medición indirecta de esta magnitud  $S$  será:  $S = S_0 \pm \Delta S$ . El valor medio del área de la mesa se obtiene como:

$$S_0 = A_0 \cdot B_0$$

Y su incerteza:

$$\Delta S = \sqrt{\left[ \frac{\partial S}{\partial A}(A_0, B_0) \cdot \Delta A \right]^2 + \left[ \frac{\partial S}{\partial B}(A_0, B_0) \cdot \Delta B \right]^2}$$

donde,  $\partial S / \partial A(A_0, B_0) = B_0$  y  $\partial S / \partial B(A_0, B_0) = A_0$ . Entonces obtenemos:

$$\Delta S = \sqrt{[B_0 \cdot \Delta A]^2 + [A_0 \cdot \Delta B]^2}$$