

Adquisición de datos y cuadrados mínimos: determinación de g con un péndulo

Contenidos

Objetivos generales	1
Determinación de la constante de gravedad g	1
PARTE 1. Adquisición digital de datos: “estudiando” el SensorDAQ.....	3
PARTE 2. Medición del período del péndulo, análisis gráfico de dependencias funcionales, ajuste lineal y cuadrados mínimos. Determinación de g.	4
Apéndice. Instructivo de cómo calcular el periodo y su incerteza	5

Objetivos generales

- Introducir la **adquisición digital de datos**: frecuencia de muestreo y resolución.
- **Analizar gráficamente** dependencias funcionales.
- Determinar magnitudes experimentales a través de un **ajuste lineal con cuadrados mínimos**.
- Montar un experimento para determinar la **aceleración local de la gravedad g** a partir del **periodo de un péndulo**.

Determinación de la constante de gravedad g

Si resolvemos las ecuaciones mecánicas para el periodo de un péndulo simple se obtiene la relación funcional de la Ecuación 1, que vincula el periodo T con la longitud del péndulo L y con la aceleración de la gravedad g.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (1)$$

Se propone entonces construir un péndulo simple e investigar los factores que influyen en el período de oscilación. Para ello:

- Construya un péndulo simple cuya longitud L sea fácilmente variable y asegúrese de poder cubrir el mayor rango de longitudes posibles.
- Discuta en grupo las hipótesis de trabajo (ángulo de inicio, oscilación en el plano, masa puntual, punto de agarre, etc.). ¿Cómo haría el experimento reproducible?

¿Cómo vamos a medir el periodo del péndulo? Para poder explicarlo hagamos un paréntesis y estudiemos algunos conceptos de adquisición de datos.

Sistemas de adquisición de datos

Para realizar las medidas de período de este trabajo, se utilizará el sistema de adquisición de datos *SensorDAQ / MotionDAQ* conectado a un sensor infrarrojo de tipo barrera (photogate).

Los sensores son transductores que utilizan algún mecanismo para transformar alguna magnitud física (temperatura, presión, luz, fuerza, etc.) en diferencias de potencial. El *photogate* emite y detecta una luz infrarroja. La señal de voltaje cambia cuando el camino óptico de la luz es interrumpido, evidenciando el paso de un objeto.

El *SensorDAQ* es un sistema que adquiere estas diferencias de potencial en función del tiempo (señales analógicas) y las digitaliza en un conjunto de datos de voltaje en función del tiempo, para que puedan ser interpretadas y procesadas en una computadora. Es por esto que resulta necesario analizar la precisión de la señal digital obtenida tanto en voltaje como en tiempo:

- La resolución en voltaje de la placa de adquisición está determinada por el rango de medición y el número de bits de la misma, que fija en cuántos intervalos se discretiza el rango de voltaje medido. Por ejemplo, una placa de 8 bits divide el rango en $2^8 = 256$ intervalos, y si el rango es de 10 Volts, esto equivale a una resolución en voltaje de 0.04 V.
- La resolución temporal está dada por el intervalo de tiempo entre datos sucesivos, determinado por la frecuencia de adquisición o frecuencia de muestreo de datos. Esta frecuencia puede ser determinada por el usuario, pero sólo en un cierto rango, que depende de la duración del evento y del número total de datos permitidos por el programa. Por ejemplo, si la frecuencia de adquisición es de 1000 Hz, la resolución temporal es de $1/1000 \text{ Hz} = 1 \text{ ms}$. En forma general, **la incerteza del tiempo se calcula como la inversa de la frecuencia de adquisición**. Frecuencias de muestreo muy bajas pueden no capturar la señal en forma adecuada, frecuencias de muestreo muy altas suelen generar un volumen de datos difícil de procesar o que ocupan mucha memoria, en especial en experimentos largos.

PARTE 1. Adquisición digital de datos: “estudiando” el SensorDAQ

En primer lugar, es necesario interiorizarse en el uso de equipamiento, para ello se propone variar la frecuencia de muestreo y el tiempo de adquisición de datos mientras se obtura con la mano un photogate (fotosensor) mientras se observa la señal.

- ¿Qué diferencia de potencial registra el SensorDAQ cuando el *photogate* está obturado? ¿Y cuándo no lo está?

- ¿Cómo son los cambios entre uno y otro estado? ¿Qué pasa cuando se aumenta la frecuencia de adquisición? Determine una frecuencia de adquisición adecuada para la medición del período del péndulo.
- Si busca medir el período de un péndulo, ¿cómo será la señal de V vs t que observe? Discutan cómo podrían obtener el período T de esa señal. ¿puede automatizar el cálculo de alguna manera?

PARTE 2. Medición del período del péndulo, análisis gráfico de dependencias funcionales, ajuste lineal y cuadrados mínimos. Determinación de g .

Elija un conjunto de distintas longitudes de hilo L posibles (mínimo 8) y obtenga el período T para cada longitud de hilo utilizando el *photogate*. Coloque el *photogate* de manera de tal que el péndulo interrumpa el haz de luz en su recorrido (Piense si está midiendo el periodo o el semiperiodo).

- a) Para una cierta longitud de hilo L , mida el período del péndulo T con una buena estadística a partir de la señal del *photogate* y determine su incerteza (Ver instructivo en el Apéndice). Repita el procedimiento para el resto de las longitudes de hilo. Tenga en cuenta que al modificar la longitud del hilo cambia el periodo, por lo cual quizás sea necesario modificar la frecuencia de adquisición a lo largo del experimento. ¿Cuál es la incerteza de la longitud de hilo L ?
- b) Para el análisis gráfico de datos, grafique T en función de L (con las incertezas correspondientes). ¿observa una relación lineal? ¿Qué nos dice la teoría? (Ecuación 1)
- c) En la planilla de datos de Origin calcule en una nueva columna \sqrt{L} . Tenga en cuenta que debe también calcular su incerteza por propagación. Cree una nueva columna para las incertezas. Calcule el error relativo de T y de \sqrt{L} y grafique “ \sqrt{L} en función de T ”, o “ T en función de \sqrt{L} ” (Criterio para elegir cuál graficar: coloque en el eje Y aquella magnitud con mayor error relativo medio). ¿Es ésta una relación lineal? ¿Qué nos dice la teoría?
- d) En la planilla de datos de Origin calcule en una nueva columna T^2 . Tenga en cuenta que debe también calcular su incerteza por propagación. Cree una nueva columna para las incertezas. Calcule el error relativo de L y de T^2 y grafique “ L en función de T^2 ”, o “ T^2 en función de L ” (Criterio para elegir cuál graficar: coloque en el eje Y aquella magnitud con mayor error relativo medio). ¿Es ésta una relación lineal? ¿Qué nos dice la teoría?

- e) Para los gráficos de los puntos c) y d) realice una regresión lineal por cuadrados mínimos de las variables (consulte el apunte de regresión lineal por cuadrados mínimos y el apunte de implementación en Origin o SciDavis) y calcule el valor de g con su incerteza considerando la relación funcional entre el periodo de la oscilación T y la longitud del hilo L para un péndulo simple, dada por la ecuación 1.
- f) Por último, compare los resultados obtenidos a partir de los gráficos entre sí, con el valor obtenido en el TP1 y con el valor tabulado. ¿Hay discrepancia entre los distintos valores? Discuta la precisión y exactitud de los resultados obtenidos.

Apéndice. Instructivo de cómo calcular el periodo y su incerteza

En la Figura 1 se observa la señal a obtener con el fotosensor en el software MotionDAQ. El voltaje es mínimo cuando no se obtura el fotosensor y es máximo cuando el sensor está obturado.

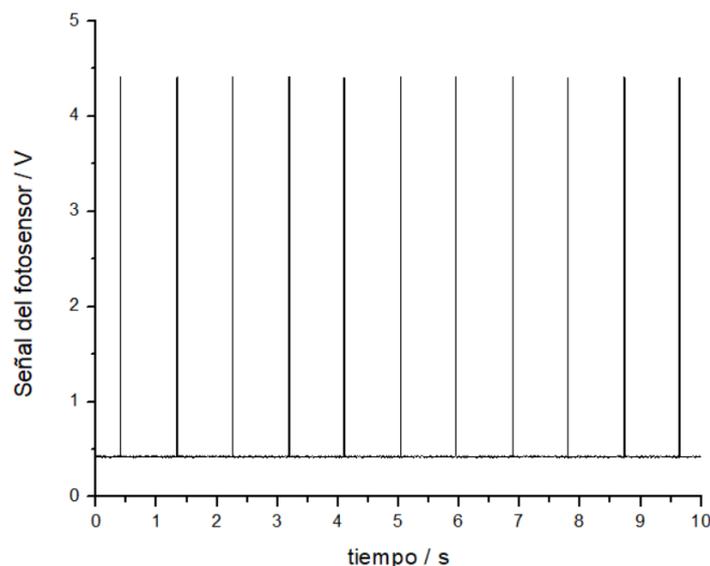


Figura 1. Señal obtenida con el fotosensor al producirse su obturación debido a la oscilación del péndulo.

Los datos deben importarse al Origin para su procesamiento. (FILE -> IMPORT -> MULTIPLE ASCII -> (Seleccionar archivo de datos proveniente del MotionDAQ) -> ADD FILE -> OK -> OK). En la figura 2 se observan los datos importados al Origin.

	A(X)	B(Y)
Long Name	time	(V)
Units		
Comments		
Sparklines		
1	0	0.41903
2	0.00513	0.42407
3	0.01026	0.42912
4	0.01538	0.43164
5	0.02051	0.42407

Figura 2. Datos provenientes del MotionDAQ importados en el Origin. La columna A corresponde a los tiempos y la columna B a los voltajes del fotosensor.

Hacer en Origin un gráfico de Voltaje vs tiempo similar al de la Figura 1. Si se realiza un zoom de una de las barras correspondientes a la obturación del sensor, se observa una señal similar a la de la Figura 3.

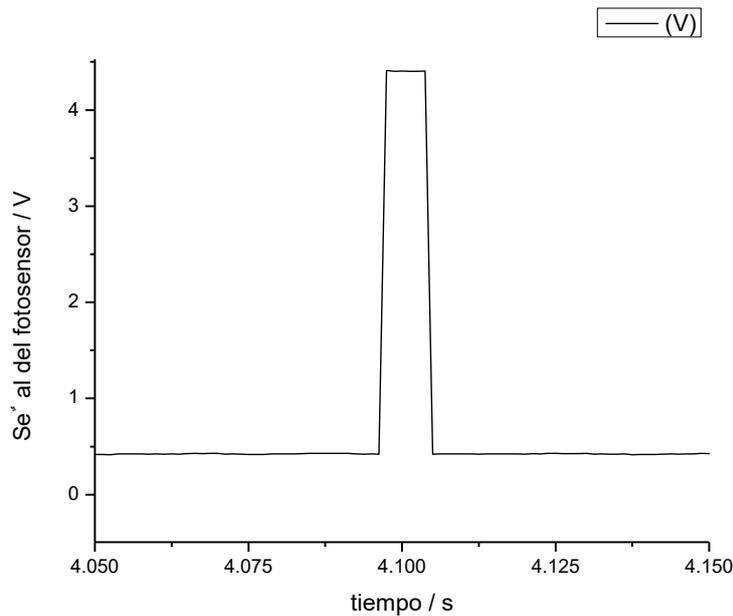


Figura 3. Señal obtenida con el fotosensor al producirse su obturación debido a la oscilación del péndulo. Zoom de una de las obturaciones de la Figura 1.

La incerteza del tiempo se puede calcular como la inversa de la frecuencia de muestreo o bien como la diferencia temporal entre dos señales consecutivas. Esto se puede hacer de la siguiente manera: Si Col(A) es el tiempo y Col(B) es el voltaje medido, clickeo con el botón derecho sobre una columna nueva (Col (C)) y voy a **Set Colum Values**.

Calculo entonces en la columna C el tiempo transcurrido entre dos mediciones consecutivas: $Col(A)[i+1] - Col(A)[i]$ (Ver Figura 4 (a)).

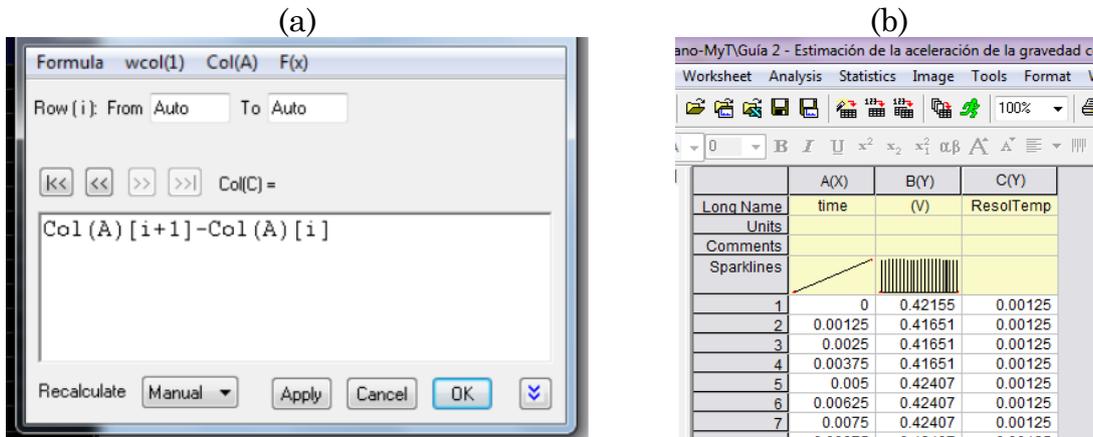


Figura 4. (a) Panel de “Set Column Values” para hacer operaciones entre columnas. (b) Resultado de haber restado los valores de tiempo consecutivos.

En la Figura 4 (b), se observa en la columna C la diferencia temporal entre dos datos consecutivos 0.00125s, lo cual concuerda con la inversa de la frecuencia de muestreo que en el ejemplo fue de 800 Hz.

¿Cómo obtenemos el periodo a partir de la medición hecha con el MotionDAQ?

Lo primero que hay que tener en cuenta es que, si el sensor está colocado en la posición de equilibrio del péndulo, al oscilar, el fotosensor se obturará dos veces por cada periodo de oscilación, esto quiere decir que el tiempo entre dos obturaciones consecutivas corresponde al semiperiodo T_s .

Para obtener el semiperiodo, vamos a usar la opción **Worksheet Query** del Origin (Figura 5). Dada una lista de datos, esta opción permite extraer (o filtrar) aquellos datos que cumplan con alguna condición específica.

- 1- Seleccionar la columna Voltaje (Supongo que en la columna B están los datos de voltaje).
- 2- Ir a Worksheet > Worksheet Query -> Seleccionar las columnas que se quieren usar (tiempo y voltaje del fotosensor) (Ver Figura 5) y escribir la condición:

$$Col(B)[i] - Col(B)[i+1] > 3$$

En clase se discutirá la elección de esta condición particular. Piense que puntos se extraen con esta condición.

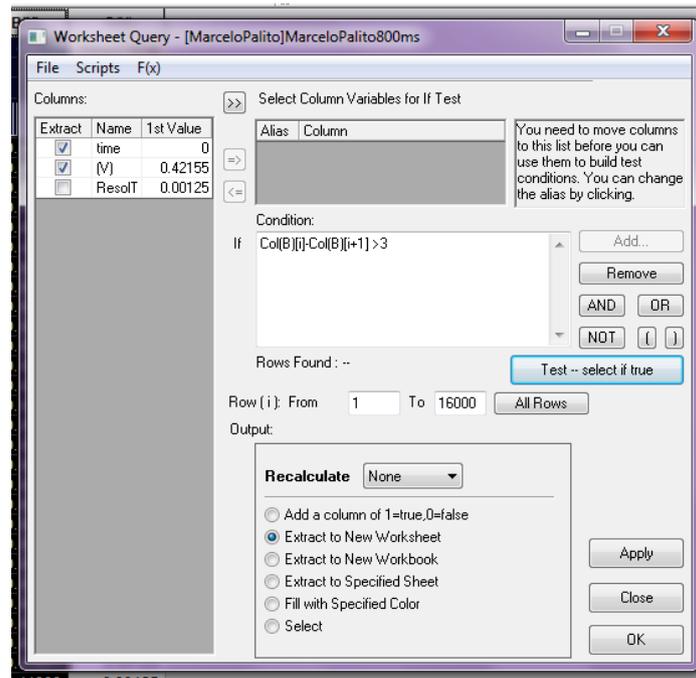


Figura 5. Panel de Worksheet Query del Origin.

Como resultado se obtiene, en otra hoja de datos, dos columnas: tiempo (columna A) y voltaje (columna B), con los datos que satisfacen la condición pedida en el Worksheet Query.

De los datos filtrados solo me interesa la columna A que corresponde a los tiempos. Calculo T_s como el tiempo transcurrido entre dos tiempos filtrados consecutivos: Me paro en la columna C, voy a **Set Column Values** y escribo: $Col(A)[i+1] - Col(A)[i]$. De esta manera obtengo una columna (columna C) con varios valores de semiperiodo T_s . Al tener varios valores del semiperiodo T_s podría hacer estadística, sin embargo, por ligeros corrimientos del *photogate* respecto del centro del movimiento oscilatorio, es posible que los semiperíodos consecutivos medidos sean dispares. Observar si esto es así comparando los semiperíodos de las filas pares e impares. Para solucionar este problema, crear una nueva columna y en Set Column Values calcular la suma de filas consecutivas impares con pares (1+2, 3+4, 5+6, etc): $Col(C)[2*i-1] + Col(C)[2*i]$. De esta manera se obtienen los períodos, que deberían ser similares ya que al sumarse los semiperíodos consecutivos, lo que le faltó a uno, lo tiene el otro. (Notar que en todos los casos, el nombre de la columna debe ser el correspondiente a lo que corresponda según su *worksheet*, no copiar y pegar sin prestar atención a esto). Ahora sí, con los datos de período obtenidos en el último paso, es posible hacer estadística (**Statistics on columns**) y obtener la media de T y su incerteza total, considerando su contribución instrumental y estadística.

Incerteza instrumental de **T**: Cada tiempo **t** tiene una incerteza que es la inversa de la frecuencia de muestreo. Como el semiperiodo **T_s** se calcula como la diferencia entre dos tiempos, su incerteza se calcula por propagación. Luego, como **T** se calcula como la suma de dos **T_s**, vuelve a ser necesaria la propagación (análoga a la anterior). La incerteza obtenida es la “instrumental” porque está vinculada exclusivamente a la frecuencia de adquisición.

Incerteza estadística de **T**: Calculamos con el Origin el desvío standard de la media o error standard (error estadístico), equivalente al desvío standard muestral de los períodos **T** dividido por la raíz cuadrada del número de períodos.