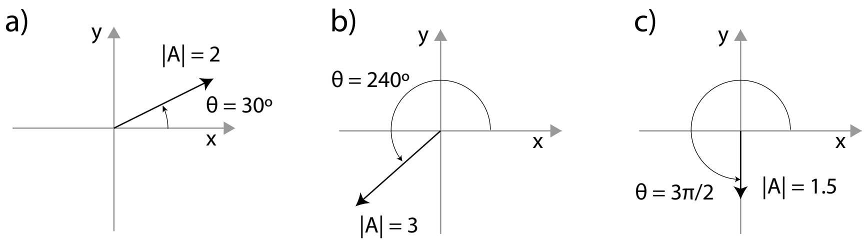
Guía 0: repaso matemático

Parte I: vectores

1. Determine el módulo y la dirección de los siguientes vectores. Represéntelos gráficamente.

$$\mathbf{A} = (-4; 3) \qquad \mathbf{B} = (2; 0) \qquad \mathbf{C} = -2\,\hat{\mathbf{x}} - 3\,\hat{\mathbf{y}} \qquad \mathbf{D} = 0\,\hat{\mathbf{x}} - 5\,\hat{\mathbf{y}}$$

2. Halle las componentes cartesianas de los siguientes vectores:



3. Dados los vectores **A** y **B**, halle gráficamente la suma, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

   (a) $\mathbf{A} = (-3; 2)$ y $\mathbf{B} = (-2; 5)$.
   (b) $|\mathbf{A}| = 2$, $\theta_A = 20°$ y $|\mathbf{B}| = 3$, $\theta_B = 135°$.
   (c) $\mathbf{A} = (-2; 0)$ y $\mathbf{B} = (0; 4)$.
   (d) $|\mathbf{A}| = 3$, $\theta_A = 5\pi/4$ y $|\mathbf{B}| = 2$, $\theta_B = -\pi/4$.

   Ahora, halle analíticamente las componentes cartesianas y polares del vector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, y del vector $\mathbf{A} - \mathbf{B}$. ¿El módulo del vector suma, $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, es igual a la suma de los módulos de **A** y de **B**?

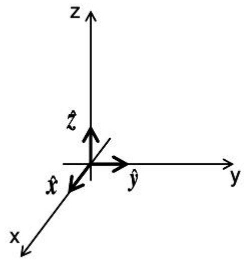
4. Halle el vector que tiene origen en el punto **P** y extremo en el punto **Q** en los siguientes casos:

   (a) $\mathbf{P} = (2; -1)$ y $\mathbf{Q} = (-5; -2)$.
   (b) $\mathbf{P} = (2; -5; 8)$ y $\mathbf{Q} = (-4; -3; 2)$.

5. Dados los vectores $\mathbf{A} = (3\,\hat{\mathbf{x}} + 2\,\hat{\mathbf{y}} + 3\,\hat{\mathbf{z}})$, $\mathbf{B} = (4\,\hat{\mathbf{x}} - 3\,\hat{\mathbf{y}} + 2\,\hat{\mathbf{z}})$, $\mathbf{C} = (-2\,\hat{\mathbf{y}} - 5\,\hat{\mathbf{z}})$, efectúe las siguientes operaciones:

   (a) $(\mathbf{A} - \mathbf{B})/|\mathbf{C}|$
   (b) $5\mathbf{A} - 2\mathbf{C}$
   (c) $-2\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C}/5$

6. Se define el producto escalar entre dos vectores como $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\,\cos\theta$, donde θ es el ángulo que forman los dos vectores. Sean $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$ los versores usuales de la terna derecha mostrada en la figura.



La base canónica se define con los siguientes versores: $\hat{\mathbf{x}} = (1;0;0)$, $\hat{\mathbf{y}} = (0;1;0)$, $\hat{\mathbf{z}} = (0;0;1)$. Calcule los siguientes productos escalares: $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}}$.

7 Usando la propiedad distributiva del producto escalar respecto a la suma y los resultados del ejercicio anterior, demuestre que si

$\mathbf{A} = A_x\,\hat{\mathbf{x}} + A_y\,\hat{\mathbf{y}} + A_z\,\hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{B} = B_x\,\hat{\mathbf{x}} + B_y\,\hat{\mathbf{y}} + B_z\,\hat{\mathbf{z}}$, entonces:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_x\,B_x + A_y\,B_y + A_z\,B_z$$

8 Efectúe el producto escalar entre los vectores **A** y **B** y diga si en algún caso **A** es perpendicular a **B**.

(a) $\mathbf{A} = 3\,\hat{\mathbf{x}} - 2\,\hat{\mathbf{y}} + 1\,\hat{\mathbf{z}}$ $\qquad \mathbf{B} = -1\,\hat{\mathbf{x}} + 3\,\hat{\mathbf{z}}$

(b) $|\mathbf{A}| = 3$, $|\mathbf{B}| = 2$, $\theta_{AB} = 60°$

(c) $\mathbf{A} = (2;3;-1)$ $\qquad \mathbf{B} = (6;-5;2)$

(d) $|\mathbf{A}| = 1$, $|\mathbf{B}| = 4$, $\theta_{AB} = \pi$

Parte II: derivadas e integrales

9 Sean A, α, b, c, ω y ϕ constantes. Derive las siguientes funciones.

(a) $f(t) = c$

(b) $f(t) = b\cdot t + c$

(c) $f(t) = b\cdot t^{-1} + c$

(d) $f(t) = b\cdot t^n$, con $n \neq 0$

(e) $f(t) = A\,e^{\alpha\,t}$

(f) $f(t) = A\sin(\omega\,t + \phi)$

(g) $f(t) = A\cos(\omega\,t + \phi)$

(h) $f(t) = A\,e^{\alpha\,t}\,\cos(\omega\,t + \phi)$ $\qquad$ (producto, regla de la cadena)

10 Sean A, α, b, c, ω y ϕ constantes. Halle la primitiva $F(t)$ de las siguientes funciones. *Recordatorio:* La función primitiva $F(t) = \int f(t)dt$ es una función cuya derivada da $f(t)$. NO olvide la constante de integración.

(a) $f(t) = c$

(b) $f(t) = b\cdot t + c$

(c) $f(t) = b\cdot t^{-1}$

(d) $f(t) = b \cdot t^n$, con $n \neq -1$

(e) $f(t) = A\, e^{\alpha\, t}$

(f) $f(t) = A \sin(\omega\, t + \phi)$

(g) $f(t) = A \cos(\omega\, t + \phi)$

(h) $f(t) = \frac{2t}{t^2+1}$ (integración por sustitución)

(i) $f(t) = t\, e^{\alpha\, t}$ (integración por partes)

11 Utilizando la regla de Barrow, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (con F una primitiva de f), calcule las siguientes integrales.

(a) $v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\, dt$ (a constante)

(b) $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt$ ($v(t)$ del ítem anterior)

(c) $E_p(h) = \int_0^h mg\, dx$ (mg constante es la fuerza gravitatoria)

Parte III: ecuaciones diferenciales

12 Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales. Es decir, encuentre la función $y(t)$. En todos los casos, y_0 es una constante.

(a) $\frac{dy}{dt} = 2$, $y(0) = 0$;

(b) $\frac{dy}{dt} = a$, $y(0) = y_0$;

(c) $\frac{dy}{dt} = e^t + 2$, $y(0) = y_0$;

(d) $\frac{dy}{dt} - \sin(3t) = 0$, $y(0) = y_0$;

(e) $\frac{dy}{dt} = 2y$, $y(1) = y_0$

(f) $t\frac{dy}{dt} = 1$, $y(1) = y_0$.

13 Suponga una colonia que tiene N_0 bacterias al tiempo $t = 0$. Si la colonia crece a una tasa proporcional a su población, entonces:

$$\frac{dN}{dt} = \kappa\, N, \quad \kappa > 0$$

(a) Resuelva esta ecuación para encontrar $N(t)$. Grafique cualitativamente la solución.

(b) ¿Cuánto tarda la población inicial en duplicarse? ¿Cuánto tiempo más hay que esperar para que se vuelva a duplicar?

14 Bajo ciertas condiciones que estudiaremos cuando veamos mecánica a escala celular y molecular, la aceleración de un objeto que se mueve en un fluido es $a = -\gamma\, v$, donde γ es una constante positiva que depende de la masa y la forma del objeto y de la viscosidad del fluido. Si la velocidad inicial es $v_0 > 0$, encuentre la velocidad en función del tiempo para el objeto.

15 Resuelva estas ecuaciones diferenciales de segundo orden. Tome como condición inicial en todos los casos $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$ (m, F y A son constantes).

(a) $m\, \ddot{x} = F$ (b) $\ddot{x} = A\, t$ (c) $\ddot{x} = e^t$

Ayuda: Muchas veces, para resolver una de segundo orden, conviene primero asignarle un nuevo nombre a la derivada primera. Por ejemplo, en lugar de $\ddot{x}$, usar $\dot{x} = v$ y $\ddot{x} = \dot{v}$.

Notación: $\dot{x} = x' = \frac{dx}{dt}$, y $\ddot{x} = x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$

16 Sabemos que la solución de la ecuación diferencial $\ddot{x} = -\omega^2 x$ viene dada por una función de la forma $x(t) = A\cos(c\,t + \phi)$, donde A y ϕ quedan determinadas por las condiciones iniciales del problema. Encuentre el valor de c para que esta función efectivamente sea solución de la ecuación. Una vez hallado c, encuentre los valores de A y ϕ sabiendo que a $t = 0$, $x(t = 0) = 0$ y $v(t = 0) = v_0$. *Ayuda:* Para encontrar c, reemplace $x(t)$ en la ecuación y despeje c.

Esta solución (y la ecuación que se resuelve) es la que se encuentra para el movimiento de un péndulo o un resorte (más de estos temas en próximas guías).

17 Encuentre una solución para las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas. Para ello, use el enunciado de **16**.

(a) $\ddot{x} = -4\,x$, $\quad x(0) = 3$ y $\dot{x}(0) = 0$;

(b) $\ddot{x} = -4\,x$, $\quad x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 6$;

18 Supongamos ahora que la ecuación a resolver es $\ddot{x} = -\omega^2\,x - \frac{\gamma}{m}\,v = -\omega^2\,x - \frac{\gamma}{m}\,\dot{x}$. Sabemos que, bajo ciertas condiciones, la solución a esta ecuación diferencial es de la forma $x(t) = Ae^{-bt}\cos(c\,t + \phi)$, donde A y ϕ son constantes a determinar por las condiciones iniciales del problema. Al igual que en **16**, halle los valores de b y c para que $x(t)$ sea efectivamente solución de la ecuación diferencial.

Esta ecuación es una combinación de las situaciones dadas en **14** y en **16**. Es decir, esta ecuación describe un movimiento oscilatorio, al que se le agrega una amortiguación.